

**Л.Е. Парамонов**

**РАСSEЯНИЕ СВЕТА ЭЛЕМЕНТАРНЫМ РАСSEИВАЮЩИМ ОБЪЕМОМ ПРИ СFOКУСИРОВАННОМ ПАДАЮЩЕМ ИЗЛУЧЕНИИ**

С помощью разложения матрицы рассеяния по обобщенным сферическим функциям решена задача рассеяния света элементарным рассеивающим объемом при сфокусированном падающем излучении. Рассмотрен ряд частных случаев. Иллюстрируется влияние геометрии падающего пучка на пространственное распределение рассеянного излучения (индикатриса рассеяния).

В теоретических исследованиях в области оптики дисперсных сред предположение, что падающее излучение представляет собой плоскую электромагнитную волну или параллельный пучок, не всегда оправдано, в практике оптического эксперимента следует учитывать геометрию [1, 2] и структуру падающего излучения [3,4].

В настоящей статье рассматривается задача рассеяния сфокусированного или расходящегося пучков элементарным рассеивающим объемом, исследуется влияние геометрии падающего пучка на величину рассеянного излучения в различных углах.

Элементарный рассеивающий объем содержит хаотически ориентированные частицы, имеющие плоскость симметрии, и (или) частицы и их зеркальные отражения в равном количестве при хаотичной ориентации.

Пусть падающее излучение - сфокусированный или расходящийся пучки в виде конуса, направляющая которых совпадает с осью Z, степень сходимости или расходимости определяется углом ( $\nu'_n$ ) между направляющей и образующей конуса.

Предполагаем, что расположение частиц и элементарном рассеивающем объеме хаотично, таким образом, пучки рассеянного частицами излучения некогерентны, что позволяет использовать свойство аддитивности параметров Стокса. Результат взаимодействия падающего излучения с отмеченным объемом есть сумма результатов взаимодействия каждого локального пучка ( условно параллельного ) с этим объемом.

Исходя из сделанных предположений, решение для сфокусированного и расходящегося падающих пучков с одинаковыми степенью расходимости или сходимости, структурой (интенсивность и поляризация) имеет один и тот же результат.

В статье используются два представления напряженности электрического поля и соответствующие им системы параметров Стокса и матриц рассеяния.

В СР-представлении компоненты напряженности электрического поля [5]

$$\begin{bmatrix} E_{+1} \\ E_{-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}, \tag{1}$$

где  $E_1, E_2$  – параллельная и перпендикулярная составляющие в ЛР-представлении [6] относительно плоскости референции.

Системы параметров Стокса для падающего и рассеянного излучений определяются в ЛР-представлении [6]:

$$\begin{aligned} I &= E_1 E_1^* + E_2 E_2^*, \quad Q = E_1 E_1^* - E_2 E_2^*, \\ U &= E_1 E_2^* + E_2 E_1^*, \quad V = i(E_2 E_1^* - E_1 E_2^*); \end{aligned} \tag{2}$$

в СР-представлении [5]:

$$I_2 = E_{+1} E_{-1}^* = \frac{1}{2}(Q - iU), \quad I_0 = E_{+1} E_{+1}^* = \frac{1}{2}(I - V),$$

$$I_{-0} = E_{-1} E_{-1}^* = \frac{1}{2}(I + V), \quad I_{-2} = E_{-1} E_{+1}^* = \frac{1}{2}(Q + iU),$$

$$\mathbf{I}^L = (I, Q, U, V)^T, \quad \mathbf{I}^C = (I_2, I_0, I_{-0}, I_{-2})^T, \quad (3)$$

где звездочка в индексе означает комплексное сопряжение;  $^T$  – транспонирование.

Трансформация параметров Стокса  $\mathbf{I}^L$  к  $\mathbf{I}^C$  может быть записана в форме

$$\mathbf{I}^C = \mathbf{A} \mathbf{I}^L, \quad (4)$$

где

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & i & 0 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

обратная операция имеет вид

$$\mathbf{I}^L = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{I}^C, \quad (6)$$

где

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ i & 0 & 0 & -i \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

(верхний индекс «минус единица» используется для обозначения обратной матрицы).

Рассмотрим систему координат (рис. 1), в которой направление рассеяния и направление распространения локального пучка задаются соответственно сферическими углами  $(\vartheta, \varphi)$  и  $(\vartheta', \varphi')$ .

Преобразование параметров Стокса падающего излучения в параметры Стокса рассеянного излучения, обусловленное рассеянием света элементарным рассеивающим объемом, зависит от угла рассеяния  $\vartheta$  и задается [5–7]

$$\mathbf{I}_{sc}^{C,L} = r^{-2} \mathbf{Z}^{C,L}(\theta) \mathbf{I}_i^{C,L}, \quad (8)$$

$r$  – расстояние до точки наблюдения;  $\mathbf{I}_{sc}^{C,L}$  и  $\mathbf{I}_i^{C,L}$  – параметры Стокса рассеянного и падающего излучения относительно плоскости рассеяния, содержащей направления распространения падающего излучения и рассеяния.

Используя (6), получим соотношения между матрицами рассеяния (8)

$$\mathbf{Z}^C(\theta) = \mathbf{A} \mathbf{Z}^L(\theta) \mathbf{A}^{-1}. \quad (9)$$

Определим

$$\mathbf{F}^{C,L}(\theta) = \frac{4\pi}{C_{scat}} \mathbf{Z}^{C,L}(\theta), \quad (10)$$

где

$$C_{scat} = \int_{4\pi} Z_{11}^L(\theta) d\Omega, \quad (11)$$

$F_{11}^L(\theta)$  является индикатрисой рассеяния и удовлетворяет условию нормировки

$$\frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} F_{11}^L(\theta) d\Omega = 1. \quad (12)$$

Для отмеченного элементарного рассеивающего объема матрица рассеяния в LP-представлении имеет вид [7]

$$\mathbf{F}^L = \begin{bmatrix} a_1(\theta) & b_1(\theta) & 0 & 0 \\ b_1(\theta) & a_2(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3(\theta) & b_2(\theta) \\ 0 & 0 & -b_2(\theta) & a_4(\theta) \end{bmatrix}, \quad (13)$$

в CP-представлении [5, 8–10] в соответствии с (9)

$$\mathbf{F}^C = \{F_{mn}^C\} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a_2^+ a_3 & b_1^+ i b_2 & b_1^- i b_2 & a_2^- a_3 \\ b_1^+ i b_2 & a_1^+ a_4 & a_1^- a_4 & b_1^- i b_2 \\ b_1^- i b_2 & a_1^- a_4 & a_1^+ a_4 & b_1^+ i b_2 \\ a_2^+ a_3 & b_1^- i b_2 & b_1^+ i b_2 & a_2^- a_3 \end{bmatrix}, \quad (14)$$

$m, n = 2, 0, -0, -2$ .

Согласно [5,8] элементы матрицы рассеяния (14) разлагаются в ряд по обобщенным сферическим функциям [11]:

$$F_{mn}^C = \sum_{s=s_m}^{\infty} g_{mn}^s P_{mn}^s(\cos \theta); \quad m, n = 2, 0, -0, -2; \quad s_m = \max(|m|, |n|). \quad (15)$$

Коэффициенты разложения имеют следующие свойства симметрии [5]:

$$g_{mn}^s = g_{nm}^s = g_{-m-n}^s, \quad g_{20}^s = g_{2-0}^{s*}, \quad (16)$$

$g_{mn}^s, g_{-m-n}^s$  – действительные числа.

Преимущество использования CP-представления, в отличие от общепринятого LP-представления, заключается в следующем:

- 1) существование разложения (15) для отмеченного элементарного рассеивающего объема;
- 2) в CP-представлении матрица преобразования параметров Стокса при повороте плоскости референции на угол  $\alpha$  диагональна [5,10]:

$$\mathbf{I}^C(\alpha) = \mathbf{L}_C(\alpha) \mathbf{I}^C(0),$$

$$I_n(\alpha) = e^{in\alpha} I_n(0), \quad n = 2, 0, -0, -2, \quad (17)$$

отсчет ведется по часовой стрелке вдоль направления распространения.

Преобразование параметров Стокса падающего локального пучка относительно меридиональной плоскости, содержащей направление распространения, к параметрам Стокса рассеянного излучения относительно меридиональной плоскости, содержащей направление рассеяния, может быть проведено следующим образом (см. рис. 1):

- 1) преобразование вектора Стокса локального падающего пучка из меридиональной плоскости к плоскости рассеяния;
- 2) нахождение вектора Стокса рассеянного излучения;

3) преобразование вектора к выводу формулы (21) Стокса из плоскости рассеяния к меридиональной плоскости.

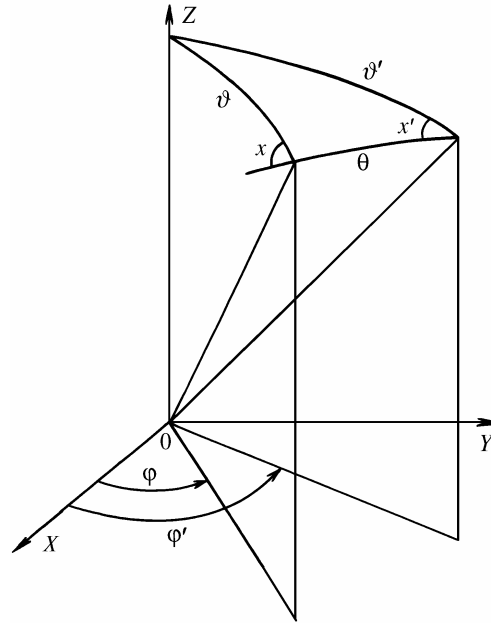


Рис. 1. К выводу формулы (21)

С учетом (8), (10), (15), (17) отмеченное преобразование имеет вид

$$\mathbf{I}_{sc}^C(\nu, \varphi; \nu', \varphi') = r^{-2} \mathbf{L}_C(-\chi) \mathbf{Z}^C(\theta) \mathbf{L}_C(\chi') \mathbf{I}_i^C(\nu', \varphi'),$$

$$I_m^{sc}(\nu, \varphi; \nu', \varphi') = r^{-2} \frac{C_{scat}}{4\pi} \sum_{n=2, 0, -0, -2} \left\{ \sum_{s=sm}^{\infty} g_{mn}^s e^{-im\chi} P_{mn}^s(\cos \theta) e^{im\chi'} \right\} I_n^i(\nu', \varphi'), \quad m = 2, 0, -0, -2, \quad (18)$$

где  $I_n^i, I_m^{sc}$  – параметры Стокса падающего локального пучка и рассеянного излучения соответственно.

Использование теоремы сложения для обобщенных сферических функций [11]

$$e^{-im\chi} P_{mn}^s(\cos \theta) e^{im\chi'} = \sum_{q=-s}^s (-1)^q P_{mq}^s(\cos \nu) P_{qn}^s(\cos \nu') e^{iq(\varphi-\varphi')} \quad (19)$$

позволяет исключить переменные  $\chi, \theta, \chi'$  в формуле (18).

Для падающего сфокусированного или расходящегося излучения, распространяющегося в коническом телесном угле  $\Omega'$ , параметры Стокса рассеянного излучения с учетом свойства аддитивности имеют вид

$$I_m^{sc}(\nu, \varphi; \nu'_0) = \frac{1}{\int_{\Omega'} I_m^{sc}(\nu, \varphi; \nu', \varphi') d\omega'} \int_{\Omega'} I_m^{sc}(\nu, \varphi; \nu', \varphi') d\omega', \quad (20)$$

где  $m = 2, 0, -0, -2; I_m^i(\nu', \varphi')$  – интенсивность локального пучка.

Бесконечно малая величина [12]  $d\Phi = Id\sigma$  пропорциональна мощности излучения, переносимого пучком лучей, распространяющихся внутри бесконечно малого телесного угла  $d\omega$ :  $d\sigma = r^2 d\omega$  – элементарная площадка сферы радиуса  $r$ , выделяемая телесным углом  $d\omega$ ;  $I$  – интенсивность излучения.

В дальнейшем

$$\Phi = \int_{\Omega} I r^2 d\omega$$

– поток излучения, распространяющийся в телесном угле  $\Omega$ .

Нормировочный множитель в (20) – поток падающего излучения. Отметим, что согласно данному определению поток параллельного пучка равен 0. В этом случае необходим предельный переход в формуле (20) при  $\Omega' \rightarrow 0$ , что, в конечном итоге, приводит к формуле (8) (с точностью до множителя, равного интенсивности падающего излучения) и совпадению с ней при единичной интенсивности падающего пучка.

Нормируя (20), с учетом условия нормировки индикатрисы рассеяния (12), после использования (18), (19) и подстановки в (20) получим

$$\hat{I}_m^{sc}(\nu, \varphi; \nu_0) = \frac{1}{\int_{\Omega'} I^i(\nu', \varphi') d\omega'} \left\{ \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\nu_0'} d\nu' \sin \nu' \sum_{n=2,0,-0,-2} \left\{ \sum_{s=sm}^{\infty} g_{mn}^s \sum_{q=-s}^s (-1)^q \times \right. \right. \\ \left. \left. \times P_{mq}^s(\cos \nu) P_{qn}^s(\cos \nu') e^{iq(\varphi-\varphi')} \right\} I_n^i(\nu', \varphi') \right\}, \quad m = 2, 0, -0, -2. \quad (21)$$

Формула (21) учитывает геометрию (расходимость, сходимость) и структуру (интенсивность и поляризацию) падающего излучения.

Рассмотрим некоторые частные случаи формулы (21).

1. Однородное по интенсивности ( $I^i(\nu', \varphi') = \dot{I} = \text{const}$ ) и поляризации падающее излучение.

а. Неполяризованное излучение. В СР-представлении [5,13]  $\mathbf{I}_i^c = (0, \dot{I}/2, \dot{I}/2, 0)^T$ . После интегрирования (21) по  $\varphi'$  отличными от 0 остаются члены ряда с  $q = 0$ , а (21) сводится к простому выражению

$$\hat{I}_m^{sc}(\nu, \varphi; \nu_0) = \frac{1}{2(1 - \cos \nu_0')} \sum_{s=|m|}^{\infty} (g_{m0}^s + g_{m-0}^s) P_{m0}^s(\cos \nu) \langle P_s(\cos \nu_0') \rangle, \quad (22)$$

$$m = 2, 0, -0, -2,$$

$$\langle P_s(\cos \nu_0') \rangle = \int_{\cos \nu_0'}^1 P_s(x) dx = \begin{cases} 1 - \cos \nu_0', & s = 0, \\ -\sin \nu_0' P_s^{-1}(\cos \nu_0'), & s > 0, \end{cases} \quad (23)$$

где  $P_s, P_s^m$  – соответственно полиномы и присоединенные функции Лежандра [11].

Индикатриса рассеяния с учетом (2), (12) имеет вид

$$\hat{I}^{sc}(\nu, \varphi; \nu_0) = \hat{I}_0^{sc} + \hat{I}_{-0}^{sc} = \frac{1}{1 - \cos \nu_0'} \sum_{s=0}^{\infty} a_1^s P_s(\cos \nu) \langle P_s(\cos \nu_0') \rangle, \quad (24)$$

где  $a_1^s = g_{00}^s + g_{-00}^s$ , – коэффициенты разложения индикатрисы рассеяния ( $F_{11} = a_1$ ) (13) по полиномам Лежандра [5,9,10].

б. Для лево- и правоциркулярно поляризованного падающего излучения вектор-параметры Стокса в СР-представлении соответственно равны  $(0, I, 0, 0)^T, (0, 0, I, 0)^T$ , а соответствующие (21)

$$\hat{I}_m^{sc}(\nu, \varphi; \nu'_0) = \frac{1}{1 - \cos \nu'_0} \sum_{s=|m|}^{\infty} g_{m0}^s P_{m0}^s(\cos \nu) \langle P_s(\cos \nu'_0) \rangle,$$

$$\hat{I}_m^{sc}(\nu, \varphi; \nu'_0) = \frac{1}{1 - \cos \nu'_0} \sum_{s=|m|}^{\infty} g_{m-0}^s P_{m0}^s(\cos \nu) \langle P_s(\cos \nu'_0) \rangle, \quad (25)$$

$m = 2, 0, -0, -2$ .

2. Неоднородное по интенсивности неполяризованное падающее излучение ( $I^i(\nu', \varphi') = I^i(\nu')$ ).

Разложим функцию  $I^i(\nu')$  в ряд по полиномам Лежандра

$$I^i(\nu') = \sum_{s=0}^{\infty} a_s P_s(\cos \nu'). \quad (26)$$

С учетом формулы [11,14]

$$P_{mn}^s(\cos \theta) P_{m'n'}^{s'}(\cos \theta) = \sum_{s''=|s-s'|}^{s+s'} C_{sm s'm'}^{s''m+m'} C_{sn s'n'}^{s''n+n'} P_{m+m' n+n'}^{s''}(\cos \theta), \quad (27)$$

где  $C_{jm_1 j_1 m_1}^{JM}$  – коэффициенты Клебша-Гордона [14], получим

$$\hat{I}_m^{sc}(\nu, \varphi; \nu'_0) = \left\{ \sum_{s=|m|}^{\infty} \frac{1}{2} (g_{m0}^s + g_{m-0}^s) P_{m0}^s(\cos \nu) \sum_{s'=0}^{\infty} a_{s'} \sum_{s''=|s-s'|}^{s+s'} [C_{s0 s'0}^{s''0}]^2 \langle P_{s''}(\cos \nu'_0) \rangle \right\} \times$$

$$\times \left\{ \sum_{s'=0}^{\infty} a_{s'} \langle P_{s'}(\cos \nu'_0) \rangle \right\}^{-1}, \quad (28)$$

$m = 2, 0, -0, -2$ .

В формулах (22), (24), (25), (28) параметры Стокса рассеянного излучения неявно зависят от  $\varphi$ , зависимость определяется меридиональной плоскостью, содержащей направление  $(\nu, \varphi)$ , относительно которой взяты эти параметры.

В таблице приведены результаты расчетов по формуле (24) для сферических частиц показателем преломления  $m = 1,33$  и дифракционным параметром  $\rho = 10$  и  $50$  для различной геометрии падающего излучения.

В предыдущих работах [3,4] с помощью обобщенных сферических функций получены аналитические выражения для величины рассеянного элементарным рассеивающим объемом потока в различных телесных углах при сфокусированном или расходящемся падающем излучении.

Отметим, что аналогичная задача для одиночной частицы требует привлечения амплитудной матрицы (матрицы Джонса), т.к. в этом случае рассеянные частицей локальные пучки когерентны и необходимо суммировать не параметры Стокса (матрицы рассеяния света), а комплексные амплитуды (матрицы Джонса) [13]. Исключение составляет случай, когда падающее излучение - параллельный пучок или плоская электромагнитная волна произвольной поляризации [3].

$\theta^\circ$	$\nu'_0$ – град			
	0°	1°	5°	10°
$\rho = 10$				
0	64,7883	64,3951	55,6810	35,8752
10	15,5898	15,6271	16,3738	17,2778
20	4,6803	4,6763	4,6398	5,0595
30	4,0137	4,0184	4,0966	4,0485
40	1,9159	1,9118	1,8364	1,8106
50	8,8641(-1)*	8,9101(-1)	9,8473(-1)	1,1254
60	6,7680(-1)	6,7403(-1)	6,1828(-1)	5,4410(-1)
70	2,3923(-1)	2,4108(-1)	2,7974(-1)	3,4629(-1)
80	2,3121(-1)	2,3068(-1)	2,1972(-1)	2,0321(-1)
90	1,5195(-1)	1,5172(-1)	1,4743(-1)	1,4316(-1)
100	6,8309(-2)	6,9105(-2)	8,5518(-2)	1,1246(-1)
110	1,4989(-1)	1,4909(-1)	1,3314(-1)	1,1055(-1)
120	1,2976(-1)	1,3025(-1)	1,4005(-1)	1,5202(-1)
130	1,4838(-1)	1,4857(-1)	1,5342(-1)	1,6951(-1)
140	3,4732(-1)	3,4634(-1)	3,2479(-1)	2,7858(-1)
150	1,8110(-1)	1,8265(-1)	2,1547(-1)	2,7596(-1)
160	4,4452(-1)	4,4252(-1)	4,0075(-1)	3,2824(-1)
170	2,5417(-1)	2,5613(-1)	2,9592(-1)	3,5381(-1)
180	2,5432(-1)	2,5207(-1)	2,1134(-1)	1,9817(-1)
$\rho = 50$				
0	1244,47	1115,16	194,655	63,5497
10	11,4185	10,6874	11,0932	32,9131
20	7,4857	6,9109	5,2298	4,7707
30	2,7400	2,6691	2,4212	2,5053
40	1,3182	1,3262	1,3913	1,3932
50	5,3715(-1)	5,6772(-1)	6,2692(-1)	6,7099(-1)
60	3,1315(-1)	2,9715(-1)	2,7959(-1)	2,9123(-1)
70	7,9111(-2)	9,1894(-2)	1,2395(-1)	1,3326(-1)
80	9,5849(-2)	8,6848(-2)	6,9054(-2)	6,8797(-2)
90	2,4738(-2)	2,6777(-2)	3,1191(-2)	3,3794(-2)
100	1,5444(-2)	1,7164(-2)	1,9866(-2)	2,1066(-2)
по	5,4005(-3)	9,7217(-3)	2,0476(-2)	2,6723(-2)
120	2,9429(-2)	3,8332(-2)	5,0239(-2)	4,4060(-2)
130	3,6375(-2)	4,2932(-2)	7,6169(-2)	8,9188(-2)
140	2,4655(-1)	2,2934(-1)	2,1549(-1)	1,8985(-1)
150	1,2251(-1)	1,2867(-1)	1,6019(-1)	1,7927(-1)
160	7,0563(-2)	8,1232(-2)	1,1139(-1)	1,3792(-1)
170	1,3890(-1)	1,4444(-1)	1,6606(-1)	1,7916(-1)
180	2,0613(-1)	1,8439(-1)	3,3481(-1)	2,0715(-1)

\*8.8641(-1) = 8,8641 · 10<sup>-1</sup>

Полученные аналитические выражения позволяют исследовать влияние геометрии и структуры падающего излучения, к тому же знание коэффициентов разложения (15) [9,10, 15,16] значительно упрощает последующий анализ, вычислительные затраты минимальны.

1. Latimer P. J. // Opt. Soc. Amer. 1972. V. 62. N 2. P. 208-211.
2. Latimer P. J. // IEEE J. Quantum Electr. 1984. V. 20. N. 12. P. 1529-1532.
3. Пармонов Л. Е. // Оптика и спектроскопия. 1992. Т. 72. Вып. 6. С. 1417-1424.
4. Пармонов Л. Е., Осколкова Г. В. // Оптика и спектроскопия. 1993. Т. 74. Вып. 1. С. 176-182
5. Kuscer I., Ribaric M. // Optica Acta. 1959. V. 6. N 1. P. 42-51.
6. Борем К., Хафмен Д. Поглощение и рассеяние света малыми частицами. М.: Мир, 1986. 662 с.
7. Van de Hulst H. C. Light scattering by small particles. N.-Y., 1957.

8. Domke H. // *Astrophys. Space Sci.* 1974. V. 29. P. 379.
9. Mishchenko M. I. // *J. Opt. Soc. Am. A.* 1991. V. 8. N 6. P. 871-882.
10. Novenier J. W., van der Mee C. V. M. // *Astron. Astrophys.* 1983. V. 128. P. 1-16.
11. Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я. Представления группы вращений и группы Лоренца. М., 1958. 368 с.
12. Гуревич М. М. Фотометрия. Л.: Энергоатомиздат, 1983. 268 с.
13. Шерклиф У. Поляризованный свет. М.: Мир, 1968. 264 с.
14. Паршалович Д. А., Москалев А. П., Херсонский П. К. Квантовая теория углового момента. Л.: Паука, 1975. 440 с.
15. Бугаенко О. И. // *Изв. АН СССР. Сер. ФАО.* 1976. Т. 12. N6. С. 603-611.
16. Domke H. // *Z. Meteorologic.* 1975. Bd. 25. N 6. S. 357-361.

Институт биофизики СО РАН,  
г. Красноярск

Поступила в редакцию  
29 декабря 1992 г.

**Paramonov L. E. Light scattering by an element scattering volume for the case of a focused incident beam.**

Expansion of the scattering phase matrix into a series over generalized spherical functions is used to solve the problem on light scattering by an element scattering volume for the case of a focused incident beam. Influence of the incident beam geometry on the scattering phase function is illustrated by numerical results.