

Точный аналитический расчет структурной функции волнового фронта для случая колмогоровской атмосферной турбулентности

Д.А. Ягнятинский✉, В.Н. Федосеев, А.В. Шепелев*

АО «НИИ НПО «ЛУЧ»

142103, Московская обл., г. Подольск, ул. Железнодорожная, 24

Поступила в редакцию 31.08.2023;

после доработки 02.10.2023;

принята к печати 26.01.2024

В связи важностью структурной функции для расчета (или описания) распространения оптического излучения в турбулентной атмосфере, была поставлена задача определения этой функции по известным модовым коэффициентам разложения волнового фронта. Получены новые формулы для точного аналитического расчета структурной функции фронта на круглой апертуре. В отличие от описанного в литературе аналитического метода предлагаемый способ корректно учитывает всю область определения, включая приграничные зоны апертуры. Проведено сравнение результатов предлагаемого аналитического расчета с существующим методом, а также с численным расчетом при выбранной дискретизации на примерах полиномов Цернике, функций Карунена–Лоэва, соответствующих колмогоровской модели турбулентности, и колмогоровских волновых фронтов. Приводятся величины уклонения структурных функций, рассчитанных по существующему аналитическому методу и численно, от результатов, полученных новым способом. Указаны и объяснены универсальность и другие преимущества предложенного нами аналитического расчета структурной функции. Результат позволит точно определять структурную функцию волнового фронта по модовым коэффициентам в задачах распространения оптического излучения в случайно-неоднородных средах.

Ключевые слова: адаптивная оптика, волновой фронт, структурная функция, колмогоровская турбулентность, аналитический расчет, полиномы Цернике, функции Карунена–Лоэва; *adaptive optics, wavefront, structure function, Kolmogorov turbulence, analytical calculation, Zernike polynomials, Karhunen–Loève functions.*

Введение

Во многих задачах, связанных с расчетами распространения оптического излучения через случайно-неоднородные среды, удобным инструментом анализа статистических характеристик рассматриваемых световых волн и свойств среды является так называемая структурная функция. При распространении света через турбулентную атмосферу рассматривают, в частности, структурные функции таких параметров среды, как показатель преломления, плотность, температура, скорость ветра, а также различных характеристик излучения [1]. С помощью структурной функции можно рассчитывать эффекты коррекции волнового фронта в задачах адаптивной оптики [2], анализировать принадлежность выборки (ансамбля) фазовых экранов к типу случайных искажений и тем самым проводить валидацию статистики этих волновых фронтов [3].

Структурную функцию также используют в моделировании задач распространения световых волн [4] для более детального определения структуры турбулентности [5] и при анализе профиля поверхности оптических изделий [6, 7].

В задачах адаптивной оптики наибольший интерес представляет расчет фазовой структурной функции

$$D_\phi(r) = \left\langle [\phi(\mathbf{r} + \mathbf{r}') - \phi(\mathbf{r}')]^2 \right\rangle_r, \quad (1)$$

где ϕ – функция профиля искажения фазы; \mathbf{r}' – радиус-вектор точки интегрирования при усреднении; \mathbf{r} – радиус-вектор между двумя точками апертуры; r – модуль этого вектора.

Для монохроматического излучения в общем случае следует рассматривать волновую структурную функцию, которая одновременно учитывает амплитудную и фазовую неоднородности светового пучка и определяется как сумма структурной функции логарифма амплитуды и фазовой структурной функции [8]. Однако для важного в адаптивной оптике случая коротких трасс [9], когда рассматривают искаженный волновой фронт «в ближней зоне»

* Дмитрий Александрович Ягнятинский (yagnyatinskiyda@sialuch.ru); Виктор Николаевич Федосеев (fedoseevvn@sialuch.ru); Антон Валерьевич Шепелев (anton.txt@gmail.com).

(протяженность трассы $L \ll D^2/\lambda$, где D – диаметр апертуры, λ – длина волны излучения), амплитудными искажениями можно пренебречь. В этом случае волновая структурная функция равна фазовой структурной функции [10]. А «в дальней зоне», когда $L \gg D^2/\lambda$, волновая структурная функция равна удвоенной фазовой [10]. Таким образом, фазовая структурная функция позволяет вычислить волновую как в «ближней», так и в «дальней» зоне, а значит и описать распространение излучения.

Цель работы – получение точных формул для расчета структурной функции искажений фазы по известным коэффициентам разложения волнового фронта в некотором базисе полиномов. Рассмотрен случай круглой апертуры излучения, а в качестве модового базиса – полиномы Цернике и функции Карунена–Лоэва. В довольно известной работе Guang-ming Dai [11] данная задача технически решена с ошибкой, которая в некоторых случаях может приводить к достаточно большим отклонениям в значениях структурной функции.

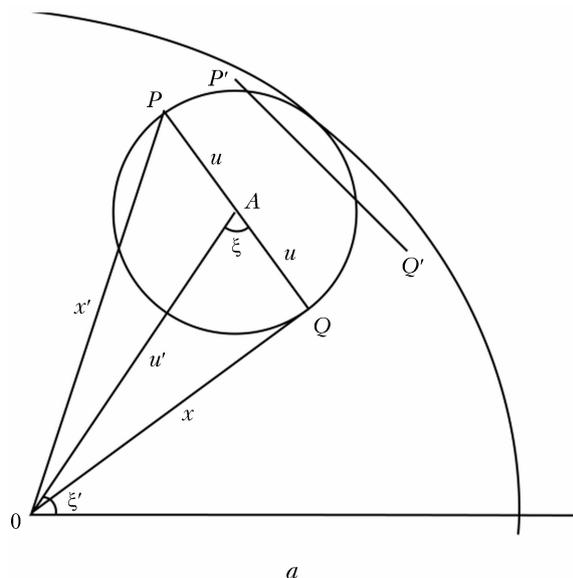
Методика аналитического расчета структурной функции

Пусть у нас есть волновой фронт, который имеет разложение по некоторой системе абберационных мод – базисных функций:

$$\phi(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j F_j(x), \quad (2)$$

где $F_j(x)$ – j -й полином (базисная функция); a_j – j -й коэффициент в разложении. В работе [11] показано, что, зная структурную функцию (которая имеет смысл «функции формы») для каждой отдельной базисной моды

$$d_j(u) = \langle [F_j(x') - F_j(x)]^2 \rangle \quad (3)$$



и кросс-структурную функцию для пары различных базисных мод

$$c_{j,j'}(u) = \langle [F_j(x') - F_j(x)][F_{j'}(x') - F_{j'}(x)] \rangle, \quad (4)$$

можно вычислить структурную функцию для всего волнового фронта по формуле

$$D_\phi(u) = \sum_{j=2}^{\infty} a_j^2 d_j(u) + 2 \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{j'=j+1}^{\infty} a_j a_{j'} c_{j,j'}(u). \quad (5)$$

Заметим, что в работе [12] авторы предлагают рассчитывать структурную функцию, используя в формуле (5) только первую сумму справа, не учитывая слагаемые из кросс-структурных функций, что, естественно, в общем случае приводит к ошибочным результатам. Так как мы рассматриваем круглую апертуру и волновые фронты, соответствующие колмогоровской модели турбулентности, то будем использовать в качестве базисных мод полиномы Цернике и альтернативно функции Карунена–Лоэва. Для самих этих полиномов и функций предварительно вычислим соответствующие структурную и кросс-структурную функции.

Как уже было сказано во введении, в работе [11] для полиномов Цернике и функций Карунена–Лоэва был произведен аналитический расчет структурной функции с ошибкой (формулы верны только для наклонов tip/tilt), которая технически заключается в том, что при интегрировании некорректно учитывается приграничная зона апертуры. Суть метода из [11] заключалась в использовании окружности радиуса u (рис. 1, а) и учета всех диаметрально противоположных на ней точек. При интегрировании эта окружность «проносилась» по всему кругу, не выходя за его границы. Некорректность данного подхода заключается в том, что существуют пары точек вблизи границы круга, например

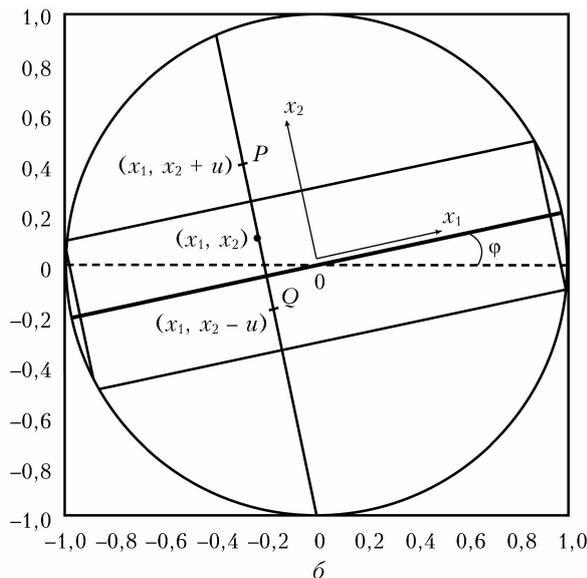


Рис. 1. Схемы интегрирования для расчета структурной функции волнового фронта на круглой апертуре методом из [11] (а) и предлагаемым точным методом (б); u – половина дистанции между двумя точками, $u \leq 1$; апертура единичного радиуса

концы отрезка $P'Q'$ на рис. 1, a , которые находятся также на дистанции $2u$, но не могут быть охвачены окружностью, так как при интегрировании она не выходит за пределы круга (а может только касаться его изнутри). Следовательно, для фазовых поверхностей, которые имеют большие вариации прогиба на границе круговой апертуры, метод расчета из [11] может давать достаточно большую ошибку (это будет продемонстрировано далее).

Для полного учета всех пар точек при расчете структурной функции мы предлагаем следующий способ интегрирования: 1) проведем в исходном круге «опорный» диаметр под произвольным углом φ от 0 до π ; 2) рассмотрим все перпендикулярные данному диаметру хорды, длина которых может лежать в диапазоне от $2u$ до 2; 3) будем при интегрировании передвигать на каждой из хорд отрезок длиной $2u$, центр которого находится на хорде, так, что его концы будут находиться внутри круга или касаться его границ — мы рассматриваем при этом пару точек, являющихся концами данного отрезка; 4) при интегрировании для данного опорного диаметра будут учтены все хорды и все пары точек на них, отстоящие друг от друга на $2u$, после чего необходимо будет проинтегрировать полученное выражение по углу φ с учетом возможной ориентации опорного диаметра при φ от 0 до π . Этот способ по одному разу охватывает все пары точек круга, разнесенные на $2u$.

Чтобы получить аналитический результат для структурной функции полиномов Цернике и функций Карунена–Лозва, рассмотрим в качестве базисных элементов функции в виде степенных одночленов (monomials): $M(\mathbf{x}) = x^m y^n$, где m и n — неотрицательные целые числа, \mathbf{x} — вектор-точка на апертуре. Зная для них структурную функцию, можно, в принципе, вычислить структурную функцию для любых полиномов и дифференцируемых функций (по разложению в ряд Тейлора).

Структурная функция для $F_j(\mathbf{x})$ и кросс-структурная функция для $F_j(\mathbf{x})$ и $F_j(\mathbf{x})$ вычисляются через тройной интеграл (координаты указаны на рис. 1, b):

$$d_j(u) = w(u) \int [F_j(\mathbf{x}') - F_j(\mathbf{x})]^2 d^3x, \quad (6a)$$

$$c_{j,j}(u) = w(u) \int [F_j(\mathbf{x}') - F_j(\mathbf{x})][F_j(\mathbf{x}') - F_j(\mathbf{x})] d^3x, \quad (6b)$$

$$\frac{1}{w(u)} = \int d^3x = \int dx_1 dx_2 d\varphi, \quad (6b)$$

$$\mathbf{x}' = (x_1, x_2 + u, \varphi), \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2 - u, \varphi),$$

$$x_1 \in [-\sqrt{1-u^2}; \sqrt{1-u^2}],$$

$$x_2 \in [-\sqrt{1-x_1^2} + u; \sqrt{1-x_1^2} - u], \quad \varphi \in [0; \pi].$$

Весовая функция при $u \neq 1$ равна

$$w(u) = w_1(u)w_2 = \frac{1}{2[\arcsin\sqrt{1-u^2} - u\sqrt{1-u^2}]} \frac{1}{\pi}.$$

В дальнейшем для пограничного случая $u = 1$ аналитические выражения для структурной и кросс-структурной функций нужно рассчитать особо, так как в общей записи итогового результата нулевой знаменатель не сократится, но выражение для структурной функции будет корректным при предельном переходе $u \rightarrow 1$.

Структурная функция степенных одночленов

Вычислим аналитически кросс-структурную функцию $c_{j,j}^M(u)$ для двух различных одночленов $M_j(\mathbf{x}) = x^m y^n$ и $M_j(\mathbf{x}) = x^{m_2} y^{n_2}$ (при одинаковых индексах получится просто структурная функция). Под знаком интеграла в (6б) будет стоять выражение

$$[M_j(\mathbf{x}') - M_j(\mathbf{x})][M_j(\mathbf{x}') - M_j(\mathbf{x})] = [x_2^{m_1} y_2^{n_1} - x_1^{m_1} y_1^{n_1}][x_2^{m_2} y_2^{n_2} - x_1^{m_2} y_1^{n_2}], \quad (7)$$

где исходные координаты записаны через новые координаты для интегрирования: $\mathbf{x} = \mathbf{x}(x_1, y_1)$, $\mathbf{x}' = \mathbf{x}'(x_2, y_2)$. В новой системе координат при заданном угле φ (см. рис. 1, b) две рассматриваемые точки имеют одинаковую первую координату x_1 и вторые координаты $x_2 + u$ и $x_2 - u$ соответственно, а (x_1, x_2) — координаты середины подвижного отрезка. Степенные одночлены в двух точках при исходных декартовых координатах выражаются через координаты для интегрирования следующим образом:

$$\begin{aligned} x^m y^n &= [x_1 \cos \varphi - (x_2 + u) \sin \varphi]^m \times \\ &\times [x_1 \sin \varphi + (x_2 + u) \cos \varphi]^n, \\ x^m y^n &= [x_1 \cos \varphi - (x_2 - u) \sin \varphi]^m \times \\ &\times [x_1 \sin \varphi + (x_2 - u) \cos \varphi]^n. \end{aligned} \quad (8)$$

Используя бином Ньютона, получим

$$\begin{aligned} x^m y^n - x^m y^n &= \\ &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} x_1^{m-k} (\cos \varphi)^{m-k} (-1)^k (x_2 + u)^k (\sin \varphi)^k \times \\ &\times \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} x_1^{n-l} (\sin \varphi)^{n-l} (x_2 + u)^l (\cos \varphi)^l - \\ &- \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} x_1^{m-k} (\cos \varphi)^{m-k} (-1)^k (x_2 - u)^k (\sin \varphi)^k \times \\ &\times \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} x_1^{n-l} (\sin \varphi)^{n-l} (x_2 - u)^l (\cos \varphi)^l. \end{aligned} \quad (9)$$

К скобкам в (9), содержащим x_2 и u , также можно применить бином Ньютона. В итоге в общем случае для выражения в (7) можно записать

$$\begin{aligned} [M_j(\mathbf{x}') - M_j(\mathbf{x})][M_j(\mathbf{x}') - M_j(\mathbf{x})] &= \\ &= \sum_{k=0}^{m_1} \sum_{k'=0}^{m_2} \sum_{l=0}^{n_1} \sum_{l'=0}^{n_2} \sum_{i=0}^{k+l} \sum_{i'=0}^{k'+l'} \binom{m_1}{k} \binom{m_2}{k'} \binom{n_1}{l} \binom{n_2}{l'} \binom{k+l}{i} \binom{k'+l'}{i'} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times (-1)^{k+k'} [1 - (-1)^i] [1 - (-1)^{i'}] u^{i+i'} \times \\ & \times x_1^{m_1+m_2+n_1+n_2-k-k'-l-l'} \cdot x_2^{k+k'+l+l'-i-i'} \times \\ & \times (\cos\varphi)^{m_1+m_2-k-k'+l+l'} (\sin\varphi)^{n_1+n_2+k+k'-l-l'}, \quad (10) \end{aligned}$$

где индексы суммирования без штриха относятся к первой степенной функции (m_1, n_1) , а со штрихом – ко второй (m_2, n_2) . При интегрировании выражения (10) по кругу введем обозначения

$$\begin{aligned} I_1(p, q, u) &= \int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} dx_1 \int_{-\sqrt{1-x_1^2+u}}^{\sqrt{1-x_1^2}-u} dx_2 \times \\ & \times x_1^{m_1+m_2+n_1+n_2-k-k'-l-l'} \cdot x_2^{k+k'+l+l'-i-i'} = \\ & = \int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} dx_1 \frac{x_1^p}{q} \left(\left[\sqrt{1-x_1^2}-u \right]^q - \left[-\sqrt{1-x_1^2}+u \right]^q \right), \quad (11) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} p &= m_1 + m_2 + n_1 + n_2 - k - k' - l - l'; \\ q &= k + k' + l + l' - i - i' + 1; \\ I_2(m_0, n_0) &= \int_0^\pi (\cos\varphi)^{m_0} (\sin\varphi)^{n_0} d\varphi, \quad (12) \\ m_0 &= m_1 + m_2 - k - k' + l + l', \\ n_0 &= n_1 + n_2 + k + k' - l - l'. \end{aligned}$$

Для интегралов с весовыми множителями $\bar{I}_1 = I_1 \omega_1$ и $\bar{I}_2 = I_2 \omega_2$ получаем

$$\begin{aligned} \bar{I}_1(p, q, u) &= \frac{(-1)^{\frac{p}{2}}}{2^{p+q+1} q} \sum_{r=0}^q \sum_{s=0}^p \sum_{t=0}^{q-r+1} \binom{q}{r} \binom{p}{s} \binom{q-r+1}{t} \times \\ & \times (-1)^s [(-1)^r - (-1)^{q-r}] (2u)^r \times \\ & \times \frac{\text{sinc} \left[\frac{p+q+1-r-2s-2t}{\pi} \arcsin \sqrt{1-u^2} \right]}{1 - \frac{u\sqrt{1-u^2}}{\arcsin \sqrt{1-u^2}}}, \\ & \left(\text{sinc}(t) = \begin{cases} \frac{\sin \pi t}{\pi t} & \text{при } t \neq 0, \\ 1 & \text{при } t = 0, \end{cases} \right) \quad (13) \end{aligned}$$

$$\bar{I}_2(m_0, n_0) = \frac{(-1)^{\frac{n_0}{2}}}{2^{m_0+n_0}} \sum_{k_0=0}^{m_0} \sum_{l_0=0}^{n_0} \binom{m_0}{k_0} \binom{n_0}{l_0} (-1)^{l_0} \bar{i}_2,$$

где

$$\bar{i}_2 = \begin{cases} 1 & \text{при } m_0 + n_0 - \\ & -2k_0 - 2l_0 = 0, \\ \frac{(-1)^{\frac{1}{2}} [1 - (-1)^{m_0+n_0-2k_0-2l_0}]}{m_0 + n_0 - 2k_0 - 2l_0} & \text{при } m_0 + n_0 - \\ & -2k_0 - 2l_0 \neq 0. \end{cases} \quad (14)$$

В итоге при $u \in [0, 1]$ выражение для кросс-структурной функции двух степенных одночленов $M_j(\mathbf{x}) = x^{m_1} y^{n_1}$ и $M_{j'}(\mathbf{x}) = x^{m_2} y^{n_2}$ имеет вид

$$\begin{aligned} c_{j,j'}^M(u) &= \\ & = \sum_{k=0}^{m_1} \sum_{k'=0}^{m_2} \sum_{l=0}^{n_1} \sum_{l'=0}^{n_2} \sum_{i=0}^{k+l} \sum_{i'=0}^{k'+l'} \binom{m_1}{k} \binom{m_2}{k'} \binom{n_1}{l} \binom{n_2}{l'} \binom{k+l}{i} \binom{k'+l'}{i'} \times \\ & \times (-1)^{k+k'} [1 - (-1)^i] [1 - (-1)^{i'}] u^{i+i'} \cdot \bar{I}_1(p, q, u) \bar{I}_2(m_0, n_0), \quad (15) \end{aligned}$$

где p, q, m_0, n_0 определены в (11) и (12). При $u = 1$ надо переходить к пределу либо интегрировать по границе круга. В результате после преобразований получится выражение

$$\begin{aligned} c_{j,j'}^M(1) &= [(-1)^{m_1} - (-1)^{n_1}] [(-1)^{m_2} - (-1)^{n_2}] \times \\ & \times \bar{I}_2(m_1 + m_2, n_1 + n_2). \quad (16) \end{aligned}$$

При обозначении кросс-структурной функции рассмотренных одночленов будем также использовать запись $c_{j,j'}^M(u) = c_{m_1 n_1, m_2 n_2}^M(u)$.

Структурная функция для полиномов Цернике

Перейдем непосредственно к полиномам Цернике, выразив их в декартовой системе координат [13]. Запишем данные полиномы в упрощенном виде:

$$\begin{aligned} Z_j(\mathbf{x}) &= \beta_1 x^{m_1} y^{n_1} + \beta_2 x^{m_2} y^{n_2} + \dots + \beta_K x^{m_K} y^{n_K}, \quad (17) \\ Z_{j'}(\mathbf{x}) &= \gamma_1 x^{p_1} y^{q_1} + \gamma_2 x^{p_2} y^{q_2} + \dots + \gamma_L x^{p_L} y^{q_L}. \end{aligned}$$

Таким образом, в кросс-структурной функции для полиномов Цернике под интегралом в (66) будет стоять следующая математическая конструкция:

$$\begin{aligned} & (Z_j(\mathbf{x}') - Z_j(\mathbf{x}))(Z_{j'}(\mathbf{x}') - Z_{j'}(\mathbf{x})) = \\ & \left(\begin{aligned} & \beta_1 \gamma_1 [x'^{m_1} y'^{n_1} - x^{m_1} y^{n_1}] [x'^{p_1} y'^{q_1} - x^{p_1} y^{q_1}] + \\ & + \beta_1 \gamma_2 [x'^{m_1} y'^{n_1} - x^{m_1} y^{n_1}] [x'^{p_2} y'^{q_2} - x^{p_2} y^{q_2}] + \dots + \\ & + \beta_1 \gamma_L [x'^{m_1} y'^{n_1} - x^{m_1} y^{n_1}] [x'^{p_L} y'^{q_L} - x^{p_L} y^{q_L}] + \\ & \vdots \\ & + \beta_K \gamma_1 [x'^{m_K} y'^{n_K} - x^{m_K} y^{n_K}] [x'^{p_1} y'^{q_1} - x^{p_1} y^{q_1}] + \\ & + \beta_K \gamma_2 [x'^{m_K} y'^{n_K} - x^{m_K} y^{n_K}] [x'^{p_2} y'^{q_2} - x^{p_2} y^{q_2}] + \dots + \\ & + \beta_K \gamma_L [x'^{m_K} y'^{n_K} - x^{m_K} y^{n_K}] [x'^{p_L} y'^{q_L} - x^{p_L} y^{q_L}] \end{aligned} \right) \quad (18) \end{aligned}$$

Применяя к выражению из последней формулы операцию интегрирования, получаем

$$c_{j,j'}^Z(u) = \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^L \beta_k \gamma_l c_{m_k n_k, p_l q_l}^M. \quad (19)$$

Таким образом мы выразили кросс-структурную функцию $c_{j,i}^Z(u)$ полиномов Цернике $Z_j(\mathbf{x})$ и $Z_i(\mathbf{x})$ через ранее вычисленные кросс-структурные функции $c_{m_k, n_k, p, q}^M$ степенных одночленов. В итоге для разложенного по полиномам Цернике волнового фронта

$$\phi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i Z_i(\mathbf{x}) \quad (20)$$

структурную функцию фазы можно будет вычислить по выведенной в [11] формуле

$$D_\phi(u) = \sum_{i=2}^{\infty} a_i^2 d_i^Z(u) + 2 \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{i'=i+1}^{\infty} a_i a_{i'} c_{i,i'}^Z(u). \quad (21)$$

Структурная функция для мод Карунена–Лоэва

В данном разделе мы рассмотрим функции Карунена–Лоэва, соответствующие колмогоровской атмосферной турбулентности. В этом случае структурная функция фазы равна

$$D_\phi(u) = 6,88u^{5/3}, \quad (22)$$

где u – нормированная на радиус круглой апертуры половина дистанции между двумя точками (структурную функцию с таким аргументом называют нормированной [11]).

Один из эффективных и часто применяемых методов вычисления функций Карунена–Лоэва основан на диагонализации матрицы Нолла и вычислении коэффициентов в разложении этих функций по полиномам Цернике [14, 15]. При этом каждая функция Карунена–Лоэва записывается в виде

$$K_l(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{\infty} U_{li} Z_i(\mathbf{x}), \quad (23)$$

где U – матрица, с помощью которой осуществляется переход от коэффициентов Цернике $\mathbf{A} = \{a_j\}$ к коэффициентам $\mathbf{B} = \{b_j\}$ в базисе функций Карунена–Лоэва ($\mathbf{B} = \mathbf{U}\mathbf{A}$). Сделаем замечание, что в работах [11, 15] формула (23) написана с неточностью, суммирование там производится по другому индексу матрицы U .

Из написанного выше представления функций Карунена–Лоэва следует, что их структурная и кросс-структурная функции $d_j^K(u)$ и $c_{j,i}^K(u)$ могут быть выражены через структурные и кросс-структурные функции полиномов Цернике по формулам, аналогичным (21) и (19):

$$\begin{aligned} d_j^K(u) &= \sum_{i=2}^{\infty} U_{ji}^2 d_i^Z(u) + 2 \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{i'=i+1}^{\infty} U_{ji} U_{ji'} c_{i,i'}^Z(u), \\ c_{j,i}^K(u) &= \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{i'=2}^{\infty} U_{ji} U_{ji'} c_{i,i'}^Z(u). \end{aligned} \quad (24)$$

Таким образом, вычисление структурной функции для мод Карунена–Лоэва в представлении через полиномы Цернике является теперь элементар-

ной задачей, и, в отличие от [11], мы можем сразу произвести расчет для каждой функции Карунена–Лоэва, не прибегая к специальным дополнительным выкладкам.

Преимущество аналитического расчета структурной функции перед численным и сравнение нового и существующего аналитических методов

Проиллюстрируем преимущества аналитического расчета структурной функции по предлагаемой нами методике. При теоретическом моделировании или в практических задачах волновой фронт обычно рассматривается определенным на некоторой системе точек дискретизации, расположенных внутри заданной апертуры. При этом существует альтернатива – вычислить структурную функцию численно по имеющейся регулярной дискретной системе точек. Отметим, что при численном расчете структурной функции можно также использовать и нерегулярную дискретизацию, что может дать более точный результат: случайный выбор пар точек на апертуре [7, 16]; вариант «ромашка», когда вокруг первой выбранной точки для пары берут вторые точки, лежащие на окружности с центром в первой точке [12], и др.

Численные расчеты структурной функции с целью верификации и сравнения были выполнены нами на примере регулярной дискретизации волнового фронта 121×121 точек (попадающих в единичный круг). Вычисления показали, что для различных абберационных мод точность результата может заметно варьироваться. Если, например, для чистого дефокуса среднеквадратическое отклонение структурной функции от истинного графика оказалось примерно 0,5%, то для чистого астигматизма и сферической абберации отличие составило 3,5 и 1,6% соответственно (такие значения получаются для наиболее оптимальных рассмотренных параметров численного расчета, о чем будет сказано в дальнейшем). Ясно также, что регулярная дискретизация волнового фронта неодинаково учитывает разные направления при вычислении структурной функции (вносит числовую анизотропию). Поэтому принципиальным недостатком численного расчета является небольшое расхождение между структурными функциями одной и той же абберации, но под разными углами. Сказанное выше, а также возможные значительные ошибки при расчете по формулам из [11] иллюстрирует рис. 2.

При численном расчете на выбираемой дискретизации некоторое влияние (неодинаковое для разных аббераций в общем случае) на точность результата оказывает задаваемая величина толерантности на значение дистанции при отборе пар точек, соответствующих одному аргументу структурной функции. Таким образом, численный расчет имеет определенные недостатки и требует немалых вычислительных затрат при мелкой дискретизации. Добавим, что сходимость к истинному значению при измельчении сетки дискретизации иногда не очень быстрая.

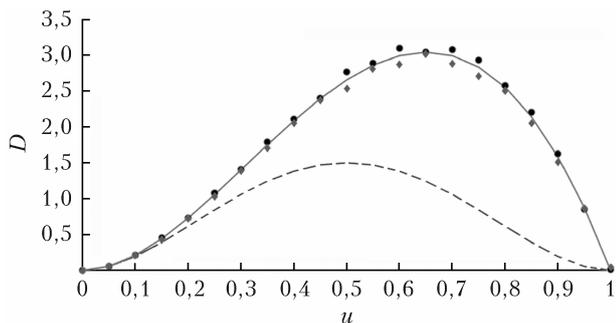


Рис. 2. Структурная функция астигматизма (полиномов Цернике Z_5 и Z_6): расчет Guang-ming Dai (штриховая кривая), наш аналитический расчет (сплошная кривая), численный расчет Z_5 (точки) и Z_6 (ромбы)

Сравним систематически результаты неточного аналитического расчета из [11], результаты численного расчета и полученные в настоящей статье точные формулы для структурных функций. Будем производить сравнения на примере полиномов Цернике, функций Карунена–Лоэва и колмогоровских волновых фронтов. Функции Карунена–Лоэва генерировались через базис полиномов Цернике, взятый до 23-го номера включительно, колмогоровские волновые фронты — по методу из [14]. Для численного расчета брались два из семи рассмотренных (0,01; 0,05; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5) значений толерантности: 0,2 и 0,3 от минимального расстояния между точками (для таких толерантностей точность результатов в среднем оказалась наилучшей). Нормированная структурная функция строилась на отрезках $u \in [0; 1]$ или $u \in [0; 0,95]$ с равномерным интервалом 0,05 между точками.

На рис. 3 представлены результаты сравнения структурной функции на отрезке $u \in [0; 1]$ для

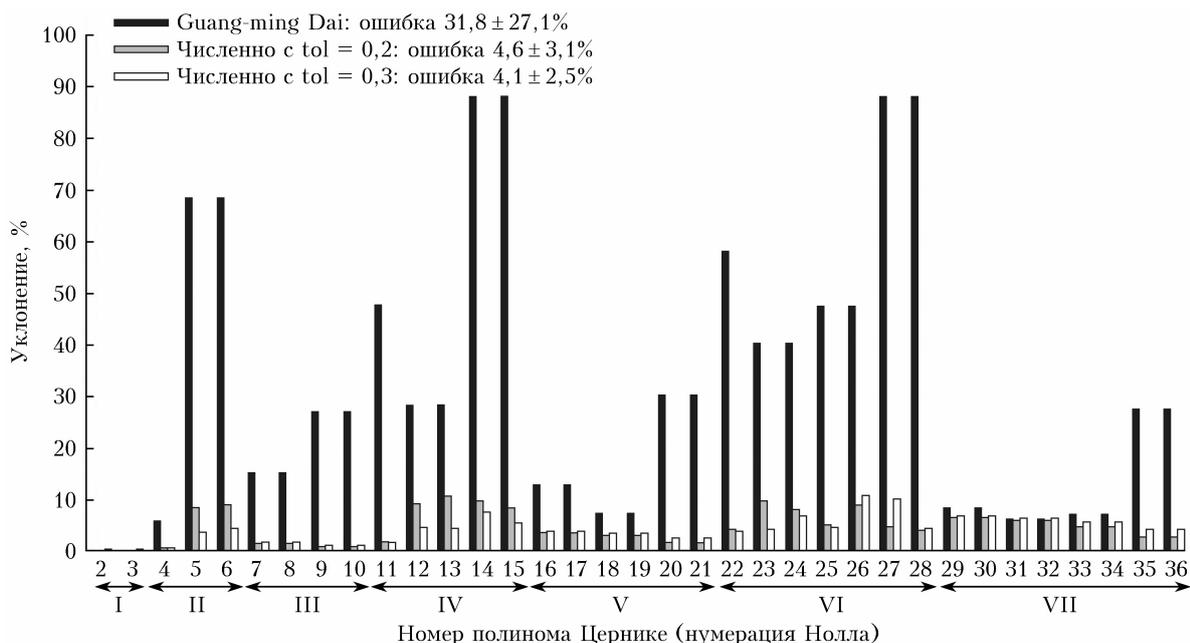


Рис. 3. Сравнение точности расчета структурной функции полиномов Цернике до 7-го порядка включительно (уклонение рассчитанной функции от результатов нашего расчета)

полиномов Цернике до 7-го порядка включительно (36 полиномов, не считая «подставки»), рассчитанных по формулам из [11] (метод Guang-ming Dai), по нашим формулам и численно. Видно, что метод Guang-ming Dai дает весьма большие ошибки для многих полиномов Цернике. Численный же расчет намного ближе к нашим аналитическим результатам.

На рис. 4 представлены аналогичные результаты сравнения структурной функции на отрезке $u \in [0; 1]$ для функций Карунена–Лоэва (первые 36 функций без «подставки»). Также приведены номера полиномов Цернике, которые «вносят наибольший вклад» в форму функции Карунена–Лоэва с данным номером (максимальный номер полиномов Цернике в разложении функций Карунена–Лоэва — 30-й, всего 496 мод). Видно, что в сравнении с результатами для полиномов Цернике ошибка по формулам Guang-ming Dai стала немного большей, а численный расчет, наоборот, немного точнее.

На рис. 5 приведены результаты сравнения структурной функции для 1000 колмогоровских волновых фронтов. Для диапазона $u \in [0; 0,95]$ (рис. 5, б) ошибка численного расчета оказалась меньше, а для диапазона $u \in [0; 1]$ (рис. 5, а) — больше, чем по неточным формулам из [11]. Парадоксальный на первый взгляд результат объясняется тем, что формулы из [11] оказываются справедливыми именно в точке $u = 1$ (а в других, не считая нуля, — нет). При численном расчете структурной функции дискретизация на круглой апертуре не позволяет хорошо учесть максимальную дистанцию при $u = 1$ между точками, и для нее результат часто получается с большой ошибкой. Для отдельных же полиномов Цернике и функций Карунена–Лоэва в силу определенной симметрии результат численного расчета не дает большой ошибки при $u = 1$.

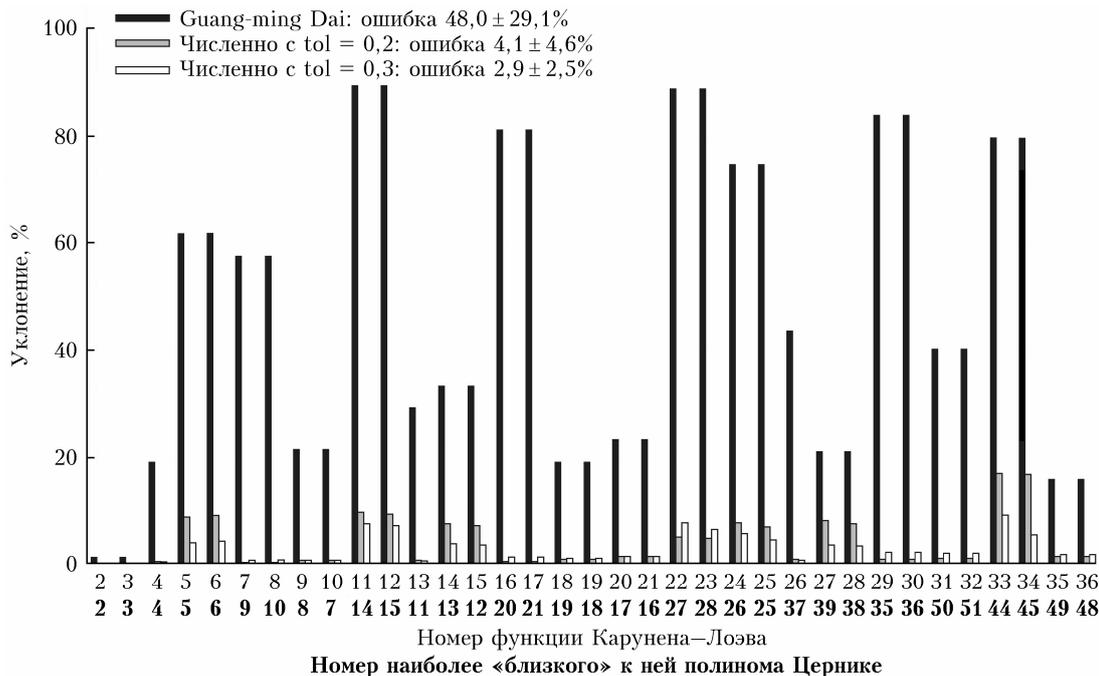


Рис. 4. Сравнение точности расчета структурной функции для функции Карунена–Лоэва до 36-го номера включительно (уклонение рассчитанной функции от результатов нашего расчета)

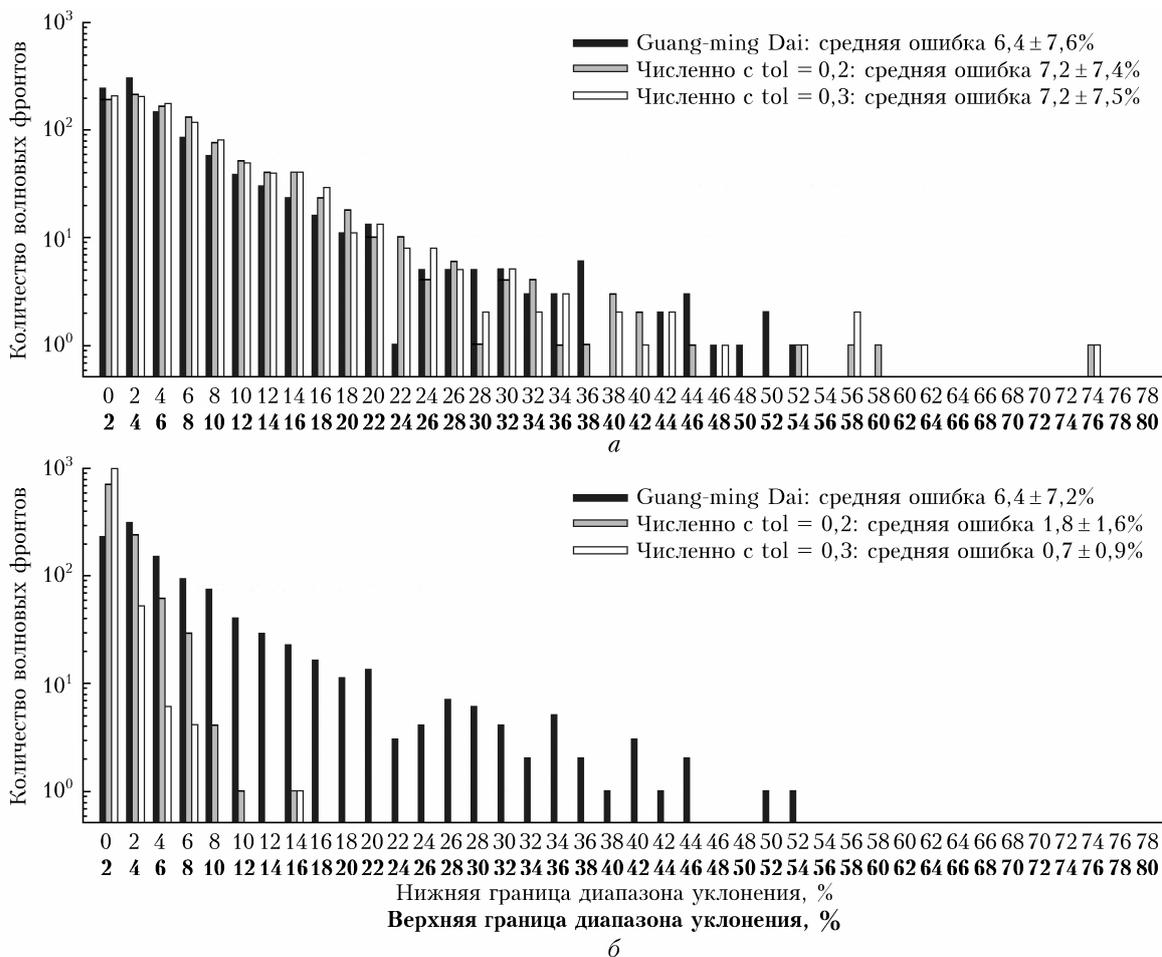


Рис. 5. Сравнение точности расчета структурной функции для 1000 колмогоровских волновых фронтов для диапазонов $u \in [0; 1]$ (а) и $u \in [0; 0,95]$ (б) (распределение ошибки структурной функции колмогоровских волновых фронтов по величине в процентах для интервалов между нижней и верхней границами)

Заключение

Полученные формулы для расчета фазовой структурной функции волнового фронта в сравнении с работой [11] являются точными, так как корректно учитывают всю апертуру, включая приграничные области. Выполнено сравнение структурных функций, вычисленных по формулам из [11] с помощью численного расчета при регулярной дискретизации волнового фронта и по выведенным в настоящей работе точным формулам. Для полиномов Цернике или функций Карунена–Лоэва средняя ошибка по формулам из [11] составляет более 30%, а средняя ошибка численного расчета оказывается чуть менее 5%. Для колмогоровских волновых фронтов расчет по [11] дает сравнительно небольшую ошибку, примерно 6%, а численный расчет, если не рассматривать значения вблизи $u = 1$, — в районе 1–2%. При дистанции между точками апертуры, равной диаметру, аналитическое решение позволяет получить корректное значение, в то время как численный расчет может давать большую ошибку из-за малого числа точек. Также преимущество аналитического расчета заключается в независимости результата от ориентации профиля волнового фронта.

Аналитическое выражение часто удобнее в использовании, чем численный расчет по точкам дискретизации фронта. В реальности при имеющихся коэффициентах базисных функций данный метод вычисления является наиболее предпочтительным. Точность выведенных формул косвенно подтверждается также тем, что численный расчет для одинаковых форм аберраций, но при их различной ориентации дает результат, который очень близок и стремится к аналитическому графику «с обеих сторон» (см. рис. 2). Отдельным интересным математическим вопросом является сравнение точности вычисления структурной функции волнового фронта, изначально заданного на дискретной системе точек, двумя способами: прямым численным расчетом и аппроксимацией по базисным аберрациям (для которых аналитически известны структурные функции) с последующим расчетом по приведенным здесь формулам. Выражение для структурной функции через модовые коэффициенты можно использовать

в моделировании распространения излучения через случайно-неоднородные среды, а также для более точного контроля формы поверхностей оптических изделий.

Список литературы

1. *Татарский В.И.* Распространение волн в турбулентной атмосфере. М.: Наука, 1967. 548 с.
2. *Шишаков К.В., Шмальгаузен В.И.* Аппроксимация структурной функции фазы волнового фронта // Оптика атмосф. 1989. Т. 2, № 2. С. 160–162.
3. URL: <https://arxiv.org/abs/2402.04826>.
4. *Schmidt J.D.* Numerical simulation of optical wave propagation with examples in MATLAB. Bellingham: SPIE, 2010. 199 p.
5. *Herweijer J.A.* The small-scale structure of turbulence. [Phd Thesis 1 (Research TU/e / Graduation TU/e), Chemical Engineering and Chemistry]. Technische Universiteit Eindhoven, 1995.
6. *He L.* Optical surface characterization with the structure function. PhD dissertation. The University of North Carolina at Charlotte, 2013. 166 p.
7. *Kreis T., Burke J., Bergmann R.B.* Surface characterization by structure function analysis // J. Europ. Opt. Soc. Rap. Public. 2014. V. 9, N 14032. 8 p.
8. *Fried D.L.* Optical resolution through a randomly inhomogeneous medium for very long and very short exposures // J. Opt. Soc. Am. 1966. V. 56, N 10. P. 1372–1379.
9. *Воронцов М.А., Шмальгаузен В.И.* Принципы адаптивной оптики. М.: Наука, 1985. 336 с.
10. *Handbook of Optics.* New York: McGraw-Hill, 2010. Vol. V. 1280 p.
11. *Guang-ming Dai.* Modal compensation of atmospheric turbulence with the use of Zernike polynomials and Karhunen–Loève functions // J. Opt. Soc. Am. A. 1995. V. 12. P. 2182–2193.
12. *Hvisc A.M., Burge J.H.* Structure function analysis of mirror fabrication and support errors // Proc. SPIE. 2007. V. 6671. P. 1–10.
13. URL: <https://wp.optics.arizona.edu/visualopticslab/wp-content/uploads/sites/52/2016/08/Zernike-Notes-15Jan2016.pdf> (last access: 31.08.2023).
14. *Roddi N.* Atmospheric wavefront simulation using Zernike polynomials // Opt. Eng. 1990. V. 29, N 10. P. 1174–1180.
15. *Guang-ming Dai.* Wavefront simulation for atmospheric turbulence // SPIE. 1994. V. 12. P. 62–72.
16. *Kellerer A.* A Cook Book of Structure Functions // arXiv:1504.00320v1. 2015. 11 p.

D.A. Yagnyatinskiy, V.N. Fedoseyev, A.V. Shepelev. Exact analytical calculation of the wavefront structure function for the case of Kolmogorov atmospheric turbulence.

Due to the importance of using the structure function for problems of optical radiation propagation in a turbulent atmosphere, the task of determining this function from the known mode coefficients of wavefront expansion was set. New formulas have been derived for the exact analytical calculation of the wavefront phase structure function on a circular aperture. Unlike the previously published analytical method, the proposed approach correctly accounts the entire domain, including the area near the edge of the aperture. The new method is compared to the published one and a numerical calculation with the discretization chosen sufficiently fine. The test samples comprised Kolmogorov wavefronts and Zernike polynomials and Karhunen–Loève functions corresponding to the Kolmogorov turbulence model. The deviations of the results of the published before method from the new one and from the numerical calculation are provided. The advantages and generality of the new method are stated and explained. The result will make it possible to accurately determine the structure function of the wavefront by its mode coefficients in problems of optical radiation propagation in randomly inhomogeneous media.