«Оптика атмосферы и океана», **23**, № 4 (2010)

УДК 535.8:621.37

Генерация второй гармоники лазерного излучения в одноосных кристаллах. Варианты решения задачи в приближении заданного поля

В.О. Троицкий*

Институт оптики атмосферы им. В.Е. Зуева СО РАН
634021, г. Томск, пл. Академика Зуева, 1

Поступила в редакцию 19.11.2009 г.

Обсуждаются общие вопросы теории генерации второй гармоники лазерного излучения в одноосных кристаллах. Предложен вывод интегральных уравнений, определяющих вид взаимодействующих полей в плоскости наблюдения, расположенной на произвольном расстоянии позади кристалла. Указанные уравнения предлагается решать с граничными условиями, заданными на той же самой плоскости наблюдения. Показано, что в приближении заданного поля такой нестандартный выбор плоскости определения граничных условий позволяет существенно упростить искомое представление для поля второй гармоники.

Ключевые слова: генерация второй гармоники, одноосный кристалл, нелинейное волновое уравнение; second harmonic generation, uniaxial crystal, nonlinear wave equation.

Введение

В настоящей статье обсуждается генерация второй гармоники (ГВГ) лазерного монохроматического излучения, осуществляемая в однородном одноосном квадратично нелинейном кристалле при скалярном «*ooe*»-взаимодействии. В параксиальном приближении указанная задача сводится к решению системы нелинейных уравнений [1, 2] для комплексных медленно меняющихся амплитуд основного излучения A_1 и второй гармоники (ВГ) A_2:

$$\frac{dA_1}{dz} + (1/2ik_1)\left(\frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial y^2}\right) = i\sigma_1 A_1^* A_2 e^{i\Delta_k z}, \quad (1)$$

$$\frac{dA_2}{dz} + \rho\frac{dA_2}{dx} + (1/2ik_2)\left(\frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial y^2}\right) = i\sigma_2 A_1^2 e^{-i\Delta_k z}, \quad (2)$$

где $k_1 = kn_o(\omega)$; $k_2 = 2kn^e(2\omega,\Theta)$; $k = \omega/c$; $n^e = n_o n_e/a$; $a = \sqrt{n_o^2 \sin^2\Theta + n_e^2\cos^2\Theta}$; λ и $\omega = 2\pi c/\lambda$ — длина волны и частота основного излучения; c — скорость света; $\Delta_k = k_2 - 2k_1$; $\rho = \sin\Theta\cos\Theta(n_e^2 - n_o^2)/a^2$ — угол двулучепреломления; n_o, n_e — главные показатели преломления; Θ — угол между направлением распространения пучка (ось Z) и оптической осью кристалла, расположенной в плоскости XZ системы координат; $\sigma_1 \approx \sigma_2 \equiv \sigma$ — коэффициенты нелинейной связи.

* Владимир Олегович Троицкий (qel@asd.iao.ru).

Когда речь идет о низкой эффективности нелинейного преобразования ($\eta < 1\%$), считается [1, 2], что поле $A_1(x, y, z)$ мало отличается от решения однородного уравнения (1), которое будем называть «линейным» полем на основной частоте и обозначать символом $A_{1л}(x, y, z)$. При этом оставшееся уравнение (2) будет определять решение задачи о ГВГ в приближении заданного поля (ПЗП), рассмотрение которого и составляет основное содержание данной статьи. На сегодняшний день теория ГВГ в ПЗП представлена, по сути дела, единственным приближенным вариантом решения (2) — методом Бойда–Клейнмана [3]. В основе метода лежит предположение о том, что лазерное (основное) излучение является гауссовым пучком, т.е. функция $A_{1л}(x, y, z)$ имеет известное [2] представление в любой точке пространства. Именно это обстоятельство и позволяет привести решение (2) к достаточно простому виду, удобному для дальнейших численных расчетов. Именно этим определятся и очень широкая популярность указанного подхода. В любом другом случае (пучок не гауссов) линейное дифрагирующее поле можно определить только численно, что существенно усложняет и удлиняет процедуру расчетов, особенно в тех случаях, когда речь идет об оптимизации процесса ГВГ.

Понятно, что ГВГ гауссовых пучков является хотя и очень важным частным случаем, но, к сожалению, не исчерпывающим. В связи с этим разработка новых, более общих, методов решения (2), приводящих к конечным результатам, удобным для дальнейших исследований, представляется задачей достаточно актуальной, а демонстрация одного из возможных вариантов ее решения является основной целью настоящей работы.

Система уравнений (1), (2) должна быть дополнена граничными условиями, которые обычно [2] считаются заданными на входе в нелинейную среду и записываются в виде

$$A_{1,2}(x,y,z=0) = (A_{1,2})_{\text{л}}(x,y,z=0) \equiv V_{1,2}(x,y). \quad (3)$$

Когда речь идет о ГВГ в сфокусированном гауссовом пучке, то граничные условия можно определить в плоскости перетяжки, которую обычно располагают внутри нелинейного кристалла [1–3]. В настоящей статье показано, что конечный результат – вид функции $A_2(x,y,z)$, оказывается существенно проще, если граничные условия задавать не на входе в кристалл [как в (3)], а на той же самой плоскости, где рассматривается искомое решение. Предполагается, что эта плоскость наблюдения может располагаться как внутри кристалла ($z = \text{const} \le L$), так и на произвольном расстоянии $z_0 \ge 0$ позади кристалла. В последнем случае

$$z = L_0 = L + z_0, \quad (4)$$

где L – длина кристалла – бесконечного слоя нелинейной среды, заключенного между плоскостями $z = 0$ и $z = L$.

Указанный оригинальный прием был предложен в [4] и апробирован в [5]. К сожалению, в [4] была показана только общая схема реализации данного подхода. В настоящей статье достаточно подробно обсуждаются как физические, так и математические детали вывода рабочих формул, предлагаемых в качестве альтернативы уже упоминавшейся формуле Бойда–Клейнмана.

Согласно известным свойствам неоднородных уравнений (см., например, [2]) искомое решение (1), (2) всегда может быть представлено в виде суммы

$$A_{1,2}(x,y,z) = A_{(1,2)\text{л}}(x,y,z) + A_{(1,2)\text{нл}}(x,y,z), \quad (5)$$

где $A_{(1,2)\text{л}}$ – общие решения однородных уравнений (1) и (2), удовлетворяющие граничным условиям (3); $A_{(1,2)\text{нл}}$ – частные решения соответствующих неоднородных уравнений, определяющие возмущения линейных полей, обусловленные нелинейным взаимодействием.

Задача общей теории ГВГ сводится, таким образом, к отысканию вида функций, входящих в (5), на плоскости наблюдения, которая может быть расположена как внутри нелинейного кристалла, так и позади него.

1. Линейное приближение

Поскольку функции Грина для уравнений (1) и (2) известны (см., например, [6]), то записать решение линейной задачи не составляет труда. В частности, на произвольной плоскости наблюдения $z \le L$ внутри кристалла необыкновенная волна ВГ имеет вид

$$A_{2\text{л}}(x_0,y_0,z) = -\frac{ik_2}{2\pi z} \times$$
$$\times \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} V_2(x,y)\exp\left[ik_2\frac{(x-x_0+\rho z)^2+(y-y_0)^2}{2z}\right]dxdy, \quad (6)$$

где (x_0, y_0) – точка наблюдения на плоскости $z = \text{const}$. Если решение (6) известно на плоскости $z_1 < z$, то его, очевидно, можно использовать в качестве нового граничного условия. Тогда

$$A_{2\text{л}}(x_0,y_0,z_1;z) = -\frac{ik_2}{2\pi(z-z_1)}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} A_{2\text{л}}(x,y,z_1) \times$$
$$\times\exp\left[ik_2\frac{(x-x_0+\rho z-\rho z_1)^2+(y-y_0)^2}{2(z-z_1)}\right]dxdy, \quad (7)$$

где аргумент z_1 показывает плоскость, на которой определено граничное условие, а аргумент z – плоскость, на которой заканчивается процесс линейного распространения. Совершенно понятно, что (6) и (7) – разные представления (по-разному обозначенные) одного и того же поля. Выражения для обыкновенной волны на основной частоте получаются из (6) и (7), если в них положить $\rho = 0$, а нижний индекс «2» заменить на «1».

Пусть нелинейный кристалл считается помещенным в вакуум и плоскость наблюдения совпадает с (4). Чтобы найти линейные поля в этой плоскости, необходимо учесть два момента. Во-первых, пересекая плоскость $z = L$ (выходная грань кристалла), обе волны будут испытывать преломление. Во-вторых, для всех $z > L$ среда распространения становится изотропной. Воспользовавшись результатами [7], где рассмотрена задача о преломлении параксиальных пучков, искомое решение можно записать абсолютно строго. Тем не менее здесь предлагается приближение, которое не только не отражается на точности расчетов, но и является методологически необходимым.

Введем обозначения:

$$n_o(\omega) \equiv n, \quad n^e(2\omega,\Theta) \equiv n + \Delta_n(\Theta). \quad (8)$$

В этом случае для волновой расстройки (Δ_k) из (1) получается

$$\Delta_k = k_2 - 2k_1 = (4\pi/\lambda)(n^e - n_o) = (4\pi/\lambda)\Delta_n. \quad (9)$$

Если бы по условиям задачи ГВГ исследовалась при точном выполнении условия синхронизма ($\Delta_k = 0$), то тогда, согласно (8) и (9), можно было бы строго утверждать, что

$$n_o = n^e = n, \quad k_1 = nk, \quad k_2 = 2nk. \quad (10)$$

Однако достаточно часто выполнение условия $\Delta_k \ne 0$ является принципиальным, и тогда использование (10) необходимо как-то прокомментировать.

Все слагаемые в левых частях (1) и (2) являются малыми величинами $\sim\alpha^2$, где α – полурасходимость основного излучения. Именно отбрасывание слагаемых, имеющих третий и более высокий порядок малости, составляет суть приближения квазиоптики, в рамках которого получены эти укороченные уравнения [1, 2, 6]. Используя (8) для коэффициентов $1/k_1$ и $1/k_2$ в (1) и (2), можно записать

$$1/k_1 = 1/(nk),\ 1/k_2 \approx 1/(2nk) - \Delta_n/(2nk) + O(\Delta_n^2, \Delta_n^3, \dots), \tag{11}$$

где через $O(x)$ обозначены малые величины порядка x. Подставляя (11) в (1), (2), легко увидеть следующее. Если величина Δ_n окажется меньше или порядка α, то в разложении (11) необходимо ограничиться только первым членом. В противном случае в левой части (2) появятся слагаемые третьего, четвертого и т.д. порядков малости, что следует считать серьезной методологической ошибкой, которую необходимо исключать.

Ограничимся рассмотрением ситуации, когда λ составляет ~0,5 мкм, α варьируется в диапазоне от 10^{-2} до 10^{-4}, а $|\Delta_k|$ не превышает значений 10 см$^{-1}$. Это означает, что в данном случае Δ_n, согласно (9), оказывается меньше 10^{-4} и, следовательно, для проведения расчетов необходимо использовать (10), которое теперь выполняется только приближенно.

Учитывая сказанное выше и используя [7], для линейного поля в плоскости наблюдения L_0 получаем два варианта записи [по аналогии с (6) и (7)]:

$$A_{2л}(x_0, y_0, L_0) = -\frac{ikT_к}{\pi t_0} \times$$
$$\times \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} V_2(x,y) \exp\left[ik\frac{(x - x_0 + \rho L)^2 + (y - y_0)^2}{t_0}\right] dxdy, \tag{12}$$

(19)

$$A_{2л}(x_0, y_0, z; L_0) = -\frac{ikT_к}{\pi t_L}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} A_{2л}(x,y,z) \times$$
$$\times \exp\left[ik\frac{(x - x_0 + \rho L - \rho z)^2 + (y - y_0)^2}{t_L}\right] dxdy, \tag{13}$$

где $T_к = 2n/(n+1)$ – коэффициент Френеля для преломления на выходной грани кристалла (падение пучка на грани считается близким к нормальному); $t_0 = z_0 + L/n$, а $t_L = z_0 + (L - z)/n$; k и n определены в (10). Зависимость (12) позволяет выразить $A_{2л}(x_0, y_0, L_0)$ через граничное условие (3), а (13) – через поле (6) [или (7)], определенное на произвольной плоскости $z = \text{const}$ внутри кристалла. В обоих случаях учитывается, что для всех $z > L$ среда становится изотропной – смещение фаз подынтегральных функций зависит только от той части дистанции распространения, которая приходится на одноосную среду (L в первом равенстве и ($L - z$) во втором). От этих дистанций зависит и результат преломления – оптические длины путей t_0 и t_L оказываются разными [7]. Коэффициент Френеля ($T_к$) показывает, как изменяется амплитуда волны при пересечении границы раздела «среда–вакуум». Для поля на основной частоте решения получаются из (12) и (13), если в них, как и раньше, положить $\rho = 0$, нижний индекс «2» заменить на «1» и, кроме того, волновое число k заменить на $k/2$. Последнее является следствием использования (10).

Если нет необходимости строго учитывать преломление, то следует предположить, что кристалл помещен в некую изотропную среду с показателем преломления n из (10). Для этого случая решения получаются из (12) и (13), если в них

$$\text{положить } T_к = 1, \text{ а } z_0 \text{ заменить на } z_0/n. \tag{14}$$

Параксиальное приближение, которое используется в данной статье, позволяет легко установить зависимости, обратные (12), (13), т.е. выразить поля внутри среды через их значения, определенные позади кристалла. Эти зависимости имеют вид

$$A_{2л}(x_0, y_0, z) = \left(\frac{ik}{T_к \pi t_L}\right)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} A_{2л}(x,y,L_0) \times$$
$$\times \exp\left[-ik\frac{(x - x_0 - \rho L + \rho z)^2 + (y - y_0)^2}{t_L}\right] dxdy, \tag{15}$$

$$A_{1л}(x_0, y_0, z) = \left(\frac{ik}{T_к 2\pi t_L}\right)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} A_{1л}(x,y,L_0) \times$$
$$\times \exp\left[-ik\frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{2t_L}\right] dxdy, \tag{16}$$

$$A^*_{1л}(x_0, y_0, z) = \left(-\frac{ik}{T_к 2\pi t_L}\right)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} A^*_{1л}(x,y,L_0) \times$$
$$\times \exp\left[ik\frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{2t_L}\right] dxdy. \tag{17}$$

В справедливости (15)–(17) легко убедиться с помощью прямых подстановок.

2. Учет нелинейного взаимодействия полей

В самом общем случае нелинейные добавки к линейному решению (см. [5]) для плоскости наблюдения $z \le L$ согласно [8] записываются в виде

$$A_{1н}(x_0, y_0, z) = i\sigma\int\limits_0^z e^{i\Delta_k t}\left(-\frac{ikn}{2\pi(z - t)}\right)\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int A^*_1(x,y,t) \times\right.$$
$$\left.\times A_2(x,y,t) \exp\left[ikn\frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{2(z - t)}\right] dxdy\right] dt, \tag{18}$$

$$A_{2н}(x_0, y_0, z) = i\sigma\int\limits_0^z e^{-i\Delta_k t}\left(-\frac{ikn}{\pi(z - t)}\right)\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int A^2_1(x,y,t) \times\right.$$
$$\left.\times \exp\left[ikn\frac{(x - x_0 + \rho z - \rho t)^2 + (y - y_0)^2}{(z - t)}\right] dxdy\right] dt. \tag{19}$$

Выражения (18) и (19) являются точными решениями уравнений (1), (2) соответственно, в чем легко убедиться с помощью прямой подстановки. Понятно, что в общем случае функции (5), явный вид которых получается с помощью (13), (18) и (19), являются не решением системы (1), (2), а ее эквивалентным представлением в виде системы интегральных уравнений. Цель данной статьи и состоит в том, чтобы модифицировать эти интегральные уравнения к виду, более удобному для дальнейшего использования.

Для лучшего понимания физического содержания выражений (18) и (19) представим, например, (19) в следующей эквивалентной форме:

$$A_{2\text{н}}(x_0, y_0, z) = \int_0^z dA_2(x_0, y_0, t; z), \qquad (20)$$

где

$$dA_2(x_0,y_0,t;z)=\left(-\frac{ikn}{\pi(z-t)}\right)\times\iint_{-\infty}^{+\infty}dW_2(x,y,t)\times$$

$$\times\exp\left[ikn\frac{(x-x_0+\rho z-\rho t)^2+(y-y_0)^2}{(z-t)}\right]dxdy, \qquad (21)$$

$$dW_2(x,y,t) = i\sigma A_1^2(x,y,t)\exp[-i\Delta_k t]dt. \qquad (22)$$

Выражение (22) определяет приращение волны ВГ на элементарной дистанции dt, примыкающей к плоскости t = const. Для того чтобы это увидеть, необходимо обратиться к (2) и пренебречь в нем всеми производными по поперечным координатам. Последнее совершенно логично, поскольку на бесконечно малой длине dt ни дифракция, ни влияние анизотропии проявиться не могут. Сравнивая (13) и (21), замечаем, что эти выражения совпадают с точностью до обозначений. Из этого следует, что элементарная волна ВГ – $dW_2(x,y,t)$, возникнув в бесконечно малой окрестности плоскости t = const, распространяется затем до плоскости наблюдения z как необыкновенная линейная волна, рассмотренная в разд. 1. Результатом этого линейного процесса оказывается функция (21) – $dA_2(x_0,y_0,t;z)$, смысл аргументов которой прокомментирован в (7). Из (20) следует, что результирующее поле ВГ определяется суперпозицией бесконечного числа элементарных вкладов $dA_2(x_0,y_0,t;z)$, связанных с каждой плоскостью $0 \le t < z$.

Совершенно аналогичные рассуждения можно привести и для волны на основной частоте. Разница будет состоять в том, что теперь вместо (22) необходимо рассматривать функцию

$$dW_1(x,y,t) = i\sigma A_1^*(x,y,t)A_2(x,y,t)\exp[i\Delta_k t]dt$$

[это следует из (1)], которая теперь должна быть обыкновенной волной.

Процесс линейного распространения элементарных волн $dW_{1,2}(x,y,t)$ можно, разумеется, продолжить и до произвольной плоскости (4), расположенной позади кристалла, и уже на ней просуммировать элементарные вклады $dA_{1,2}(x,y,t;L_0)$. При реализации этой схемы необходимо учесть преломление элементарных волн на выходной грани кристалла и влияние анизотропии, когда речь идет о необыкновенной волне ВГ. Все необходимые для этих расчетов выражения представлены в разд. 1. В результате после чисто формальных процедур для тех же нелинейных добавок (18) и (19), но наблюдаемых уже на плоскости L_0, получаем

$$A_{1\text{н}}(x_0,y_0,z;L_0) = i\sigma\int_0^z\exp[i\Delta_k t]\left(-\frac{ikT_k}{2\pi t_L}\right)\left[\iint_{-\infty}^{+\infty}A_1^*(x,y,t)\times\right.$$

$$\left.\times A_2(x,y,t)\exp\left[ik\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{2t_L}\right]dxdy\right]dt, \qquad (23)$$

$$A_{2\text{н}}(x_0,y_0,z;L_0) = i\sigma\int_0^z e^{-i\Delta_k t}\left(-\frac{ikT_k}{\pi t_L}\right)\left[\iint_{-\infty}^{+\infty}A_1^2(x,y,t)\times\right.$$

$$\left.\times\exp\left[ik\frac{(x-x_0+\rho L-\rho t)^2+(y-y_0)^2}{t_L}\right]dxdy\right]dt, \qquad (24)$$

где теперь $t_L = z_0 + (L-t)/n$.

3. ГВГ в приближении заданного поля

В рамках приближения заданного поля необходимо пренебречь нелинейным возмущением на основной частоте, т.е. считать, что функция (23) обращается в нуль, и предположить, что ВГ на входе в среду отсутствует (в (3) $V_2(x, y) = 0$). Тогда вместо (24) получим

$$A_2(x_0,y_0,z;L_0) = i\sigma\int_0^z e^{-i\Delta_k t}\left(-\frac{ikT_k}{\pi t_L}\right)\left[\iint_{-\infty}^{+\infty}A_{1\text{л}}^2(x,y,t)\times\right.$$

$$\left.\times\exp\left[ik\frac{(x-x_0+\rho L-\rho t)^2+(y-y_0)^2}{t_L}\right]dxdy\right]dt. \qquad (25)$$

При записи (25) было учтено, что это выражение определяет уже не возмущение линейного решения, как (24), а полное поле ВГ.

Выражение (25) и функция $A_{1\text{л}}(x,y,L_0)$, которая находится из (12), полностью определяют решение нелинейной задачи в плоскости L_0. Если теперь потребовать, чтобы $z_0 \to \infty$, а основное излучение было гауссовым, то из (25) после интегрирования по $dxdy$ можно получить известную формулу Бойда–Клейнмана, о которой говорилось выше. Единственное отличие будет состоять в том, что в (25) преломление учитывается достаточно строго, а в [3] этот процесс игнорируется полностью с помощью формализма (14).

Основной недостаток (25) состоит в том, что в общем случае (пучок не обязательно гауссов) это выражение для численных расчетов оказывается достаточно сложным, поскольку вид функции $A_{1л}(x, y, t)$ необходимо знать, вообще говоря, для каждой плоскости внутри кристалла. На сегодняшний день простых аналитических представлений для сфокусированного лазерного излучения не существует (за исключением гауссовых пучков), поэтому функцию $A_{1л}(x, y, t)$ придется определять численно, используя решение (7). При этом подстановка (7) в (25) будет приводить к появлению пятикратных интегралов, работа с которыми потребует очень больших затрат компьютерного времени. Ниже продемонстрирован прием, позволяющий этот недостаток существенно исправить.

Дважды подставим в (25) выражение (16), заменив в нем переменные интегрирования один раз, например на $d\xi d\eta$, а второй раз — на $d\alpha d\varphi$. В результате вместо (25) получается

$$A_2(x_0, y_0, z; L_0) = \frac{i\sigma(ik)^3}{4T_k}\times$$
$$\times\int_0^z \frac{e^{-i\Delta_k t}}{(\pi t_L)^3}\left[\iint_{-\infty}^{+\infty} d\xi d\eta \iint_{-\infty}^{+\infty} A_{1л}(\xi, \eta, L_0) A_{1л}(\alpha, \varphi, L_0) I_x I_y d\alpha d\varphi\right] dt, \tag{26}$$

где

$$I_x \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[ik\frac{2(x - x_t)^2 - (\xi - x)^2 - (\alpha - x)^2}{2t_L}\right]dx =$$
$$= \exp\left[ik\frac{2x_t^2 - \xi^2 - \alpha^2}{2t_L}\right]\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[ik\frac{(\xi - \xi_0)x}{t_L}\right]dx =$$
$$= \frac{2\pi t_L}{k}\exp\left[ik\frac{2x_t^2 - \xi^2 - \alpha^2}{2t_L}\right]\delta(\xi - \xi_0);$$

$\delta(x)$ — дельта-функция Дирака; $x_t \equiv x_0 - \rho(L - t)$; $\xi_0 \equiv 2x_t - \alpha$;

$$I_y \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[ik\frac{2(y - y_0)^2 - (\eta - y)^2 - (\varphi - y)^2}{2t_L}\right]dy =$$
$$= \exp\left[ik\frac{2y_0^2 - \eta^2 - \varphi^2}{2t_L}\right]\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[ik\frac{(\eta - \eta_0)y}{t_L}\right]dy =$$
$$= \frac{2\pi t_L}{k}\exp\left[ik\frac{2y_0^2 - \eta^2 - \varphi^2}{2t_L}\right]\delta(\eta - \eta_0);$$

$\eta_0 \equiv 2y_0 - \varphi$. Наличие двух дельта-функций позволяет в (26) снять интегрирование по $d\xi d\eta$, в результате чего находим

$$A_2(x_0, y_0, z; L_0) = \frac{i\sigma}{T_к}\int_0^z \frac{ik e^{-i\Delta_k t}}{\pi t_L}\left[\iint_{-\infty}^{+\infty} A_{1л}(x_t - x, y_0 - y, L_0)\times\right.$$
$$\left.\times A_{1л}(x_t + x, y_0 + y, L_0)\exp\left[-ik\frac{x^2 + y^2}{t_L}\right]dxdy\right]dt. \tag{27}$$

Вся прагматическая ценность проделанной работы состоит в том, что теперь поле ВГ, как следует из (27), удается связать с полем на основной частоте, вид которого необходимо определить только в одной плоскости — плоскости наблюдения L_0. Более того, на L_0 это поле вообще должно быть априорно известным, поскольку в данной постановке задачи функцию $A_{1л}(x, y, L_0)$ следует рассматривать в качестве нового [вместо (3)] граничного условия.

Отметим, что совершенно аналогично, используя представления (15) и (17), можно модифицировать выражение (23) для нелинейной добавки на основной частоте. Результаты этих расчетов здесь не используются, поэтому и не приводятся.

Конечный результат можно сделать еще проще, если интересоваться не видом функции $A_2(x_0, y_0, z; L_0)$, а только эффективностью нелинейного преобразования, величина которой, очевидно, не зависит от положения плоскости наблюдения. Для реализации этой возможности поля на основной частоте и ВГ в плоскости L_0 представляем в следующем виде:

$$A_{1л}(x, y, L_0) = U_{1л}(x, y, L_0)\exp\left[ik\frac{x^2 + y^2}{2R}\right];$$
$$A_2(x, y, z; L_0) =$$
$$= U_2(x, y, z; L_0)\exp\left[i2k\frac{(x - \rho L)^2 + y^2}{2R}\right], \tag{28}$$

где $R = [z_0 + (\Delta_f + L/2)/n]$, Δ_f — расстояние от перетяжки пучка до плоскости $z = L/2$ (такие представления полей детально обсуждаются в [4]). Подставляем (28) в (21) и устремляем z_0 к бесконечности. Отбрасываем малые величины $\sim 1/z_0$ и проводим интегрирование по dz. В результате приходим к асимптотически точному (при $z_0 \to \infty$) выражению для амплитуды ВГ из (28):

$$U_2(x_0, y_0, z; L_0) = \sigma z(k/\pi z_0 T_k)e^{-i(\pi + Q_0 z/2)}\times$$
$$\times\iint_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-ikV_z(x^2 + y^2)\right]U_{1л}(x_0 - x, y_0 - y, L_0)\times$$
$$\times U_{1л}(x_0 + x, y_0 + y, L_0)\,\mathrm{sinc}(Qz/2)dxdy, \tag{29}$$

где

$$Q_0 = \Delta_k - 2kx_0\rho/z_0;\quad V_z = (\Delta_f - L/2 + z/2)/nz_0^2;$$
$$\mathrm{sinc}(x) = \sin(x)/x;$$
$$\frac{L}{2}Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = \frac{L}{2}\left(\Delta_k - 2k\frac{x_0\rho}{z_0} + k\frac{x^2 + y^2}{nz_0^2}\right) =$$
$$= \Delta_k\frac{L}{2} - 2k\rho\alpha_x\left(\frac{x_0}{a_x}\right)\frac{L}{2} + 2\left[\xi_x\left(\frac{x}{a_x}\right)^2 + \xi_y\left(\frac{y}{a_y}\right)^2\right],$$

ξ_x и ξ_y — параметры фокусировки (см. [4]). Легко увидеть, что выражение (29), справедливость которого проверялась в [5], содержит на один интеграл меньше, чем (25), что существенно уменьшает время численных расчетов.

Понятно, что самый простой вид конечного результата получается в том случае, когда основное излучение является гауссовым пучком, т.е. в (28)

$$U_{1л}(x,y,L_0) = A_0 \exp(-x^2/a_x^2 - y^2/a_y^2), \qquad (30)$$

где A_0 легко выразить через мощность P основного излучения [4]. В этом случае, подставляя (28) и (30) в (25), после элементарных расчетов для эффективности ГВГ получаем

$$\eta(z) = P_2(z)/P =$$

$$= \frac{ca_y}{16\sqrt{\pi}P}(\sigma z A_0^2/T_к)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-4x_0^2/a_x^2} |h(x_0,z)|^2 dx_0, \qquad (31)$$

где введена апертурная функция

$$h(x_0,z) =$$

$$= \frac{1}{z}\int_0^z \frac{\exp\left\{i\left[-Q_0 t + 0{,}5\left(\operatorname{arctg}\frac{D_x}{S} + \operatorname{arctg}\frac{D_y}{S}\right) + \varphi\right]\right\}}{\sqrt[4]{S^2 + D_x^2}\sqrt[4]{S^2 + D_y^2}} dt;$$

$$S = (\Delta_f - L/2 + t)/nz_0;\ D_x = 2z_0/ka_x^2,\ D_y = 2z_0/ka_y^2;$$

$$\varphi = \begin{cases} 0, \text{если } t = L/2 - \Delta_f, \\ \left\{\left[\dfrac{\Delta_f - L/2}{|\Delta_f - L/2|}\right] - \left[\dfrac{\Delta_f - L/2 + t}{|\Delta_f - L/2 + t|}\right]\right\}\pi/2, \text{если } t \ne L/2 - \Delta_f. \end{cases}$$

Выражение (31) следует рассматривать в качестве полного аналога упоминавшейся выше формулы Бойда–Клейнмана.

Заключение

Основные результаты проделанной работы можно сформулировать следующим образом.

1. Систему дифференциальных параболических нелинейных уравнений, описывающих процесс генерации второй гармоники в одноосном кристалле, можно заменить эквивалентной системой интегральных уравнений. При этом обе системы должны решаться с одинаковыми граничными условиями, заданными на входе в кристалл.

2. Структура указанных интегральных уравнений допускает простую физическую интерпретацию. Нелинейные возмущения линейных полей на основной частоте и частоте второй гармоники являются суперпозицией бесконечного числа «элементарных добавок», каждая из которых ведет себя подобно линейной (обыкновенной или необыкновенной) волне на основной или удвоенной частоте. Благодаря такой физической интерпретации, интегральные уравнения для взаимодействующих полей можно записать на плоскости наблюдения, произвольно удаленной от кристалла.

3. Задание граничных условий на плоскости наблюдения позволяет существенно упростить искомое выражение для поля второй гармоники, по меньшей мере, в приближении заданного поля.

1. *Дмитриев В.Г., Тарасов Л.В.* Прикладная нелинейная оптика. М.: Физматлит, 2004. 512 с.
2. *Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П.* Теория волн. М.: Наука, 1990. 432 с.
3. *Boyd G.D., Kleinman D.A.* Parametric Interaction of Focused Gaussian Light Beams // J. Appl. Phys. 1968. V. 39. N 8. P. 3597–3639.
4. *Троицкий В.О.* Генерация второй гармоники при фокусировке пучка в одноосный кристалл скрещенными цилиндрическими линзами. Приближение заданного поля // Оптика атмосф. и океана. 2006. Т. 19. № 8. С. 741–747.
5. *Колосов В.В., Троицкий В.О.* Оптимальная фокусировка пучка при генерации второй гармоники в одноосном кристалле. Приближение заданного поля // Оптика атмосф. и океана. 2007. Т. 20. № 2. С. 106–113.
6. *Творогов С.Д., Троицкий В.О.* Точные и приближенные представления для лазерного пучка в одноосной, однородной среде // Оптика атмосф. и океана. 2005. Т. 18. № 9. С. 744–753.
7. *Колосов В.В., Троицкий В.О.* Параксиальное приближение для задачи распространения пучков в плоскослоистой среде // Оптика атмосф. и океана. 2005. Т. 18. № 9. С. 754–759.
8. *Троицкий В.О.* Скалярное приближение для генерации второй гармоники в одноосном кристалле // Оптика атмосф. и океана. 2007. Т. 20. № 9. С. 810–821.

V.O. Troitskii. **Second harmonic generation of laser radiation in uniaxial crystals. Variants of the problem solution at an assumed field approximation.**

General questions of the theory of second harmonic generation of laser radiation in uniaxial crystals are discussed. Derivation of integral equations is suggested, which determine the type of interacting fields in an observation plane situated behind a crystal at an arbitrary distance. It is suggested to solve these equations with boundary conditions specified on the same observation plane. It is shown that such unusual choice of the plane of boundary conditions definition at an assumed field approximation allows an essential simplification of a required representation for the second harmonic field.