«Оптика атмосферы и океана», **19**, № 4 (2006)

УДК 621.396.965.8

С.М. Чернявский

Итерационный метод восстановления волнового фронта по интенсивностям в расфокусированных изображениях и пятнах датчика Шэка–Гартмана

Казанский государственный технический университет им. А.Н. Туполева

Поступила в редакцию 29.06.2005 г.

Предлагается метод, позволяющий вычислять функцию поля в плоскости выходного зрачка оптической системы, по адаптивно формируемым изображениям точечного источника в нескольких параллельных плоскостях и по распределениям интенсивности в пятнах Шэка–Гартмана.

Введение

Одним из методов восстановления искажений волнового фронта (ВФ) является метод восстановления по изображениям, создаваемым оптической системой (ОС). Изображение содержит информацию об искажениях волнового фронта ОС, и надо научиться извлекать ее из изображения.

Обозначим через Ω-область выходного зрачка и

$$G = A(\xi,\eta)\exp\left[k\Phi(\xi,\eta)\right],\ \ (\xi,\eta)\in\Omega,$$

функцию зрачка ОС [1]; A определяет распределение амплитуды; Φ – распределение волновых аберраций на зрачке и $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число. В фокальной плоскости oxy волновое поле, создаваемое точечным источником, описывается с точностью до несущественного множителя функцией $g(x, y)$, определяемой преобразованием Фурье:

$$g(x,y) = F\left(G;x/\lambda R,y/\lambda R\right)/R =$$

$$= 1/R\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int G(\xi,\eta)\exp\left[-i2\pi(x\xi+y\eta)/\lambda R\right]d\xi d\eta, \qquad (1)$$

где R – фокусное расстояние.

Герхберг и Закстон [2] предложили хорошо зарекомендовавший себя итерационный метод восстановления волнового фронта по амплитуде поля A на зрачке и амплитуде поля $|g(x, y)|$ в заданной области ω фокальной плоскости. Формально задача восстановления ВФ сводится к нахождению функции G по двум ограничениям на нее: по заданной амплитуде в пространственной и частотной областях.

Измерения в фокальной плоскости всегда выполняются, так как они дают информацию об объекте наблюдения с помощью ОС. Измерение распределения амплитуды на зрачке связано в большинстве случаев с требованием метода. Если таких измерений нет, то требование, что амплитуда на зрачке известна, естественно заменить требованием, что задана априорная информация об этой амплитуде. Так, всегда известен носитель Ω функции G. Ограничение такого вида предложил Файнап [3].

Уменьшение информации о функции G на зрачке можно компенсировать дополнительными измерениями амплитуды в пространстве изображения. В работе [4] предложено учитывать распределение амплитуды в нескольких плоскостях, параллельных фокальной плоскости. Если измерение осуществляется в нефокальной плоскости $z \neq 0$, то формально в рамках дифракционной теории изображения [1] это эквивалентно измерению в фокальной плоскости при условии, что функция зрачка изменилась на фазовый множитель и стала равной $GG_0(z)$, где $G_0(z) = \exp[-ikz(\xi^2 + \eta^2)/2R^2]$. Это еще можно интерпретировать как измерение в фокальной плоскости при различных преобразованиях светового пучка в области зрачка с помощью фазовых транспарантов $G_0(z)$, $s = \overline{1,S}$, где S – число вводимых расфокусировок.

Для измерения локальных наклонов ВФ в ОС широко используется датчик Шэка–Гартмана. В ОС с таким датчиком входной пучок света делится на два. Один создает изображение точечного источника в фокальной плоскости ОС, а другой с помощью матрицы линз датчика разделяется, и каждая часть строит изображение того же источника в фокальной плоскости соответствующей линзы. Количество линз определяется пространственным спектром искажений ВФ. При больших размерах матрицы линз возникает проблема их юстировки и снижается световой поток, проходящий через линзы. Размер матрицы линз можно увеличить и уменьшить их число, если в качестве информации о ВФ использовать не только одну характеристику пятна в линзах датчика в виде величины его смещения, а все распределение интенсивности в пятнах. Метод восстановления ВФ по распределению интенсивности в фокальной плоскости ОС и линз датчика при известном носителе функции G был предложен в [5].

Линзы датчика так же, как и ОС, осуществляют преобразование Фурье. ОС осуществляет преобразование Фурье волновой функции G, а линзы датчика – $\chi_s G$, где χ_s – характеристическая функция апертуры Ω_s s-й линзы датчика. Поэтому волновое поле в фокальной плоскости s-й линзы с центром (ξ_s, η_s) и фокусным расстоянием r определяется с точностью до несущественного множителя функцией

$$g_s(x,y) = c/r \times$$

$$\times \int\int_{-\infty}^{+\infty} \chi_s(\xi',\eta') G(\xi',\eta') \exp\left[-i2\pi(x\xi' + y\eta')/\lambda r\right] d\xi' d\eta', \quad (2)$$

где $\xi' = \xi - \xi_s$; $\eta' = \eta - \eta_s$; c – коэффициент, характеризующий долю отводимой амплитуды света в датчик.

Измеренные распределения интенсивности в световых пятнах датчика позволяют находить амплитуду преобразования Фурье волнового поля в плоскости выходного зрачка при различных преобразованиях этого поля с помощью амплитудных транспарантов, определяемых функциями χ_s. Поэтому метод работы [5] восстановления ВФ можно интерпретировать как задачу нахождения функции G по ее носителю и амплитуде преобразований Фурье от ее различных преобразований (сужений) $\chi_s G$ амплитудными транспарантами.

Проведенный анализ позволяет заключить, что методы восстановления ВФ работ [4, 5] являются частным случаем общего подхода, который сводится к нахождению функции зрачка G по ее носителю и амплитудам преобразований Фурье от ее различных преобразований в общем случае амплитудно-фазовыми транспарантами.

1. Математическая формулировка задачи

В равенстве (1) перейдем к относительным координатам

$$(\xi,\eta) = a(\tilde{\xi},\tilde{\eta}), \quad (x,y) = (\lambda R/a)(\tilde{x},\tilde{y}), \quad z = R^2\tilde{z}/(ka^2),$$

a – радиус выходного зрачка, на Ω $\tilde{\xi}^2 + \tilde{\eta}^2 \le 1$ и введем функции

$$g(x,y) = (a^2/R)\tilde{g}(\tilde{x},\tilde{y}),$$

$$G_0(\xi,\eta,z_s)\, G(\xi,\eta) = \tilde{G}_0(\tilde{\xi},\tilde{\eta},\tilde{z}_s)\, \tilde{G}(\tilde{\xi},\tilde{\eta}) = \tilde{G}_s(\tilde{\xi},\tilde{\eta}).$$

Тогда равенство (1) с учетом расфокусировки примет вид

$$\tilde{g}_s(\tilde{x},\tilde{y}) = \int\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{G}_s(\tilde{\xi},\tilde{\eta}) \exp\left[-i2\pi(\tilde{x}\tilde{\xi} + \tilde{y}\tilde{\eta})\right] d\tilde{\xi} d\tilde{\eta},$$

$$s = \overline{1,S}\,. \quad (3)$$

В равенстве (2) также перейдем к относительным координатам

$$(\xi_s,\eta_s) = a(\tilde{\xi}_s,\tilde{\eta}_s), \quad (\xi',\eta') = b(\tilde{\xi}',\tilde{\eta}'), \quad \tilde{\xi}'^2 + \tilde{\eta}'^2 \le 1;$$

$(x,y) = (\lambda r/b)(\tilde{x},\tilde{y})$, b – радиус линз датчика, и введем функции

$$g_s(x,y) = (b^2/r)\, \tilde{g}_s(\tilde{x},\tilde{y});$$

$$\chi_s(\xi_s + \xi',\eta_s + \eta') = \tilde{\chi}_s\left[\tilde{\xi}_s + (b/a)\tilde{\xi}', \tilde{\eta}_s + (b/a)\tilde{\eta}'\right];$$

$$G_s(\xi_s + \xi',\eta_s + \eta') = \tilde{G}_s\left[\tilde{\xi}_s + (b/a)\tilde{\xi}', \tilde{\eta}_s + (b/a)\tilde{\eta}'\right];$$

$$\tilde{\chi}_s\left[\tilde{\xi}_s + (b/a)\tilde{\xi}', \tilde{\eta}_s + (b/a)\tilde{\eta}'\right] \times$$

$$\times \tilde{G}\left[\tilde{\xi}_s + (b/a)\tilde{\xi}', \tilde{\eta}_s + (b/a)\tilde{\eta}'\right] = \tilde{G}_s(\tilde{\xi}',\tilde{\eta}'),$$

$$s = \overline{S+1, S+S_1}.$$

Тогда равенство (2) примет вид

$$\tilde{g}_s(\tilde{x},\tilde{y}) = \int\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{G}_s(\tilde{\xi}',\tilde{\eta}') \exp\left[-i2\pi(\tilde{x}\tilde{\xi}' + \tilde{y}\tilde{\eta}')\right] d\tilde{\xi}' d\tilde{\eta}',$$

$$s = \overline{S+1, S+S_1}. \quad (4)$$

В относительных координатах равенства (1), (2) переходят в равенства (3), (4), которые имеют одинаковый вид. Поэтому их запишем в виде одного равенства и для упрощения дальнейших записей символ «~» опустим:

$$g_s(x,y) = \int\int_{-\infty}^{+\infty} G_s(\xi,\eta) \exp\left[-i2\pi(x\xi + y\eta)\right] d\xi d\eta = F(G_s;x,y),$$

$$s = \overline{1, S+S_1}, \quad (5)$$

где

$$G_s(\xi,\eta) = G_0(\xi,\eta,z_s)\, G(\xi,\eta), \quad s = \overline{1,S}, \quad (6)$$

$$G_s(\xi,\eta) = \chi_s\left[\xi_s + (b/a)\xi, \eta_s + (b/a)\eta\right] \times$$

$$\times G\left[\xi_s + (b/a)\xi, \eta_s + (b/a)\eta\right], \quad (7)$$

$$s = \overline{S+1, S+S_1}.$$

Все функции $G_s(\xi, \eta)$ имеют одинаковый носитель в виде круга единичного радиуса и определяются через одну функцию $G(\xi, \eta)$ с помощью равенств (6) и (7). Фурье-образы функций $G_s(\xi, \eta)$ образуют множество, которое обозначим через V_1, т.е.

$$\left[g_1 = F(G_1), \ g_2 = F(G_2), \ldots, g_{S+S_1} = F(G_{S+S_1})\right] \in V_1.$$

Таким образом, правые части равенств (5) задают точки из множества V_1.

Относительно левых частей равенств (5) известно, что они имеют заданный модуль $a_s(x, y)$ на множествах ω_s соответствующих плоскостей регистрации интенсивности, т.е.

$$\left|g_s(x,y)\right| = a_s(x,y), \quad (x,y) \in \omega_s, \quad s = \overline{1, S+S_1}. \quad (8)$$

При записи равенств (1), (2) оговаривалось, что они заданы с точностью до несущественных множителей. Фактически это фазовые множители, которые не изменяют равенств (8). Наборы функций $\left[g_1(\xi,\eta),\ldots,g_{S+S_1}(\xi,\eta)\right]$, удовлетворяющие равенствам (8), образуют множество V_2.

Задача восстановления ВФ по интенсивностям в расфокусированных изображениях ОС и в пятнах датчика сведена к нахождению фазы такой функции G, которая порождает точку из V_1, принадлежащую также множеству V_2. Геометрическая формулировка задачи восстановления ВФ как задачи нахождения общей точки заданных множеств общеизвестна и она может быть решена итерационным методом в подходящем гильбертовом пространстве, если найдены проекции на эти множества.

2. Проекции на множества V_1 и V_2

Введем в рассмотрение L — пространство комплекснозначных функций с суммируемым квадратом на плоскости oxy и $H = L^{S+S_1}$ — прямое произведение. Тогда векторная функция $g(x, y) = \left[g_1(x,y),\ldots,g_{S+S_1}(x,y)\right] \in H$, если при всех s ее координаты $g_s(x, y) \in L$. На H зададим скалярное произведение и норму

$$(g,\varphi) = \sum_{s=1}^{S+S_1}(g_s,\varphi_s)_L, \quad \|g\| = (g,g)^{1/2}.$$

Проекцией точки $g \in H$ на множество $V \subset H$ называется точка $g_0 \in V$, определяемая условием

$$\|g - g_0\| = \inf_{g' \in V}\|g - g'\|.$$

Если множество V выпукло и замкнуто, то проекция существует и единственна. Для проекции введем обозначение $g_0 = P_V g$.

Функция зрачка G по условиям задачи ограничена по модулю $|G| \le C$ и имеет ограниченный носитель Ω, поэтому множество V_1 выпукло, замкнуто и ограничено по норме. Множество V_2 замкнуто.

Пусть множества Ω_0, Ω_1, ..., Ω_{S_1} образуют разбиение Ω, $\{\chi_s\}$ — множество характеристических функций этих множеств и $g' \in V_1$. Используя равенство Парсеваля для преобразования Фурье, найдем, что

$$\|g - g'\|^2 = \left\|F^{-1}g - F^{-1}g'\right\|^2 = \sum_{s=1}^{S}\left\|F^{-1}g_s - G_0(z_s)G\right\|^2 +$$

$$+\sum_{s_1=1}^{S_1}\left\|F^{-1}g_{S+s_1} - \chi_{s_1}G\right\|^2 = \sum_{s=1}^{S}\left\|G_0^*(z_s)F^{-1}g_s - G\right\|^2 +$$

$$+\sum_{s_1=1}^{S_1}\left\|\chi_{s_1}\left(F^{-1}g_{S+s_1} - G\right)\right\|^2 + \text{const},$$

где const объединяет слагаемые, не зависящие от G; символ «*» обозначает комплексное сопряжение. Далее, с учетом того, что множества Ω_0, Ω_1, ..., Ω_{S_1} не пересекаются:

$$\|g - g'\|^2 = \sum_{s=1}^{S}\left\|\chi_0\left(G_0^*(z_s)F^{-1}g_s - G\right)\right\|^2 +$$

$$+\sum_{s_1=1}^{S_1}\left[\left\|\chi_{s_1}\left(F^{-1}g_{S+s_1} - G\right)\right\|^2 +\right.$$

$$\left.+\sum_{s=1}^{S}\left\|\chi_{s_1}\left(G_0^*(z_s)F^{-1}g_s - G\right)\right\|^2\right] + \text{const}.$$

Введением дополнительных слагаемых, не зависящих от G, можно операцию суммы ввести под знак нормы:

$$\|g - g'\|^2 = S^2\left\|\chi_0\left(\frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S}G_0^*(z_s)F^{-1}g_s - G\right)\right\|^2 +$$

$$+(S+1)^2\sum_{s_1=1}^{S_1}\left\|\chi_{s_1}\left[\frac{\left(F^{-1}g_{S+s_1} + \sum_{s=1}^{S}F^{-1}g_s\right)}{(S+1) - G}\right]\right\|^2 + \text{const}.$$

Введем функции

$$\varphi_0 = \sum_{s=1}^{S}G_0^*(z_s)F^{-1}g_s \quad \text{и} \quad \varphi_{s_1} = F^{-1}g_{S+s_1} + \varphi_0,$$

тогда

$$\|g - g'\|^2 = S^2\left\|\chi_0\left(\frac{\varphi_0}{S} - G\right)\right\|^2 + (S+1)^2\sum_{s_1=1}^{S_1}\left\|\chi_{s_1}\left(\frac{\varphi_{s_1}}{(S+1) - G}\right)\right\|^2.$$

Из этого равенства следует, что проекция $g_0 \in V_1$ определяется функцией

$$G_0 = \begin{cases}\varphi_0(\xi,\eta)/S, & (\xi,\eta) \in \operatorname{int}\Omega_0;\\ \varphi_{s_1}(\xi,\eta)/(S+1), & (\xi,\eta) \in \Omega_{s_1}, \quad s_1 \in \overline{1,S_1}.\end{cases}$$

Проекция на множество V_2 описана в различных работах, например в [6]:

$$P_{V_2}g = (g_{01},\ldots,g_{0S+S_1}) =$$

$$= \begin{cases} g_{0s} = \dfrac{a_s(x,y)g_s(x,y)}{|g_s(x,y)|}, & (x,y) \in \omega_s, \quad g(x,y) \ne 0,\\ g_{0s}(x,y) = g_s(x,y). & \end{cases}$$

Вторая строка в последнем равенстве соответствует остальным точкам (x, y).

3. Итерационный метод восстановления ВФ

В геометрической трактовке задача восстановления ВФ сведена к задаче нахождения общей точки для множеств V_1 и V_2. Существует несколько алгоритмов нахождения этой точки. К ним относятся алгоритм Гершберга–Закстона [2], Юлы [6] и метод увеличения размерности [7]. Применим алгоритм работы [7]. Введем функционал сближения, заданный на $H \times H \times H$:

$$J(g, g_1, g_2) = \alpha_1 \|g - g_1\|^2 + \alpha_2 \|g - g_2\|^2,$$

$$\alpha_1, \alpha_2 > 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1.$$

Функционал достигает минимума на множестве $H \times V_1 \times V_2$ в точке (g, g_1, g_2), удовлетворяющей условию

$$g = g_1 = g_2 \in V_1 V_2, \quad J(g, g_1, g_2) = 0.$$

Любая сходящаяся минимизирующая последовательность имеет предел, определяющий точку из $V_1 V_2$. Так как функционал выпуклый, а множества V_1 и V_2 ограниченные, то любая минимизирующая последовательность слабо сходится к точке минимума.

Простейший алгоритм построения минимизирующей последовательности основан на покоординатном спуске. Пусть g_0 — нулевое приближение к точке минимума и $g_{10} = P_{V_1} g_0$, $g_{20} = P_{V_2} g_0$. Последующие приближения строятся по схеме

$$g_{1n} = P_{V_1} g_n, \quad g_{2n} = P_{V_2} g_n;$$

$$g_{n+1} = \alpha_1 g_{1n} + \alpha_2 g_{2n}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Условие прерывания итераций определяется близостью значения функционала к минимальному значению.

Заключение

Предложенный метод восстановления ВФ допускает обобщение, в котором учитываются распределения интенсивности в расфокусированных изображениях ОС и в расфокусированных пятнах датчика Шэка–Гартмана.

1. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики: Пер. с англ. М.: Наука, 1973. 719 с.
2. *Gerchberg R.W., Sakton W.O.* // Optik. 1971. V. 34. P. 275.
3. *Fienup J.R.* Phase Retrivel algoritms: A comparison // Appl. Opt. 1982. V. 21. P. 2758–2769.
4. *Дегтярев Г.Л., Маханько А.В., Чернявский С.М., Чернявский А.С.* Итерационный метод восстановления волнового фронта по адаптивно формируемым изображениям // Оптика атмосф. и океана. 2004. Т. 17. № 8. С. 671–675.
5. *Takahashi, Tohru, Takajo, Hiroaki, Maeyama, Takahiro, Fujisaki, Toshiro.* Global wavefront reconstruction algorithm from its image in the focal plane and Shack–Hartmann sensor images // Proc. SPIE. 2002. V. 4926. P. 235–242.
6. *Реконструкция* изображений: Пер. с англ. / Под ред. Г. Старка. М.: Мир, 1992. 635 с.
7. *Chernyavskii S.M.* Dimensional method for solving inverse optical problems // Proc. SPIE. 1998. V. 3583. P. 282–287.

S.M. Chernyavskii. **Iterative method of wavefront reconstruction using both intensities in defocused images and spots of Shack–Hartmann sensor.**

A method of calculation of the function of a field in a plane of an exit pupil of an optical system based on (1) point source images, formed by adaptive optical systems under in several parallel planes, and (2) distributions of intensity in Shack–Hartmann spots is offered.