

Кинетическое уравнение в приближении самосогласованного поля для плотности числа филаментов, формирующихся при распространении фемтосекундного лазерного излучения

А.Д. Булыгин*

*Институт оптики атмосферы им. В.Е. Зуева СО РАН
634021, г. Томск, пл. Академика Зуева, 1*

Поступила в редакцию 15.10.2013 г.

Сформулирован общий вид кинетического уравнения для плотности числа филаментов с учетом эффектов их рождения и распада – нелинейное уравнение диффузии. В данное уравнение входят феноменологические параметры, которые найдены путем прямого численного моделирования распространения мощного фемтосекундного лазерного импульса на основе стационарного нелинейного уравнения Шрёдингера для ряда предельных частных случаев.

Ключевые слова: нелинейное уравнение диффузии, мощное фемтосекундное лазерное излучение, филаментация; nonlinear diffusion equation, high-power femtosecond laser pulse, filamentation.

Введение

Возможность теоретического прогнозирования распространения мощного фемтосекундного лазерного импульса (МФЛИ) в различных режимах множественной филаментации является, несмотря на большую прикладную значимость [1], до сих пор нерешенной задачей. Причина заключается в том, что существующие методы сводятся в большинстве случаев к численному решению нелинейного уравнения Шрёдингера, моделирующего распространение МФЛИ [2]. Такой подход позволяет исследовать пучки, размеры которых существенно меньше размеров световых пучков, актуальных в задачах атмосферной оптики [3]. Вместе с тем для мультитераваттных МФЛИ радиусом 1–10 см уже проявляются законы больших чисел [4], что делает поиск статистических закономерностей в формировании множественной филаментации естественным [5–7]. Настоящая статья является продолжением работ [6, 7], в которых предлагается решение ключевой проблемы: нахождение уравнения для поля плотности числа филаментов $n_f(\mathbf{r}_\perp, z)$, распределенной в пространстве поперечных координат \mathbf{r}_\perp и зависящей от эволюционной координаты z (дистанции распространения МФЛИ). Данное уравнение должно составить замкнутую систему совместно с уравнениями для первых четырех моментов функции Вигнера J светового поля МФЛИ [6]:

$\bar{I} = \int_{\mathbb{R}^2} J ds_\perp$ – среднее значение интенсивности светового поля; $\bar{\mathbf{s}} = \int_{\mathbb{R}^2} J \mathbf{s}_\perp ds_\perp / \bar{I}$ – среднее нормированное значение вектора Умова–Пойнтинга (средний вектор «скорости»); $\bar{\theta}_d^2 = \int_{\mathbb{R}^2} J s_\perp^2 ds_\perp / \bar{I}$ – плотность дифракционной расходимости светового поля [6, 7] и $\bar{\mathbf{s}}_0 = \int_{\mathbb{R}^2} J \mathbf{s}_\perp^3 ds_\perp / \bar{I}$ – нормированный вектор потока θ_d^2 , где

$$J(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{s}_\perp, z) \equiv \left(\frac{cn_0}{8\pi} \right) \frac{1}{2\pi} \times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^2} \langle U(\mathbf{r}_\perp + \Delta\mathbf{r}_\perp/2, z) U^*(\mathbf{r}_\perp - \Delta\mathbf{r}_\perp/2, z) \rangle e^{-i\mathbf{s}_\perp \Delta\mathbf{r}_\perp} d\Delta\mathbf{r}_\perp,$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(\mathbf{r}_\perp) d\mathbf{r}_\perp \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy; n_0 - \text{показатель преломления среды на основной частоте излучения.}$$

Нахождение данного уравнения для n_f основано на приближении самосогласованного поля [8], а также на том замечании, что центры горячих точек (филаментов) подчиняются уравнениям динамики второго порядка, находясь при этом в случайном поле «скоростей» $\bar{\mathbf{s}} = \bar{\mathbf{s}} + \delta\bar{\mathbf{s}}$.

Андрей Дмитриевич Булыгин (b.a.d@iao.ru).

Основные соотношения и уравнения

При выводе уравнений для плотности числа филаментов потребовался ряд численных экспериментов, в которых были установлены эмпирические закономерности развития множественной филаментации как в замкнутой [7], так и в открытой проточной системе [8, 9]. То есть численно исследовалось уравнение для комплексной огибающей светового поля U :

$$\frac{\partial}{\partial z} U(\mathbf{r}_\perp, z) = \left(\frac{i}{2n_0 k_0} \nabla_\perp^2 + i k_0 \Delta n_{eff} I \right) U(\mathbf{r}_\perp, z). \quad (1)$$

Здесь $I \equiv \frac{cn_0}{8\pi} |U|^2$ – интенсивность светового поля; k_0 – волновое число на длине волны 800 нм; $\Delta n_{eff}(I/I_f, \chi) = -n_2 \left((1 + I/I_f) e^{-\chi I/I_f} - I/I_f \right)$ – некоторая эффективная нелинейность, моделирующая остановку коллапса и в случае открытой системы имеющая комплексное значение; $n_2 I$ – нелинейность керровского типа с $n_2 = 3,2 \cdot 10^{-19}$ см²/Вт; χ – коэффициент «остригности», подобранный таким образом, чтобы эффективная нелинейность, входящая в (1), наиболее качественно позволяла воспроизводить свойства решения полной нестационарной задачи [2].

Из проведенных численных экспериментов, заключающихся в решении (1), был установлен ряд закономерностей в развитии множественной филаментации [7], типичных для систем с рождением и распадом [8, 10]. Эти закономерности проявляются в следующих моментах: 1) движение филаментов (в рамках стационарного описания) есть перемещение центров лучевых трубок в поле случайных сил (детерминированный хаос), а значит, в допущении о дельта-коррелированности случайных сил плотность числа этих горячих точек должна описываться уравнениями типа диффузии; 2) филаменты рождаются и распадаются [11], при этом их равновесная плотность зависит нелинейным образом от усредненной плотности филаментов [7]. Эти факты могут служить достаточным основанием, чтобы в рамках феноменологического подхода предложить для плотности числа филаментов нелинейное уравнение диффузии, описывающее открытые системы с рождением и распадом:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \nabla_\perp \bar{\mathbf{s}}_\perp \right) n_f = \nabla_\perp (D \nabla_\perp n_f) - \Gamma n_f + C(\bar{I}) n_f^{3/2} - B n_f^2 + F_{out}(\mathbf{r}_\perp, z), \quad (2)$$

где Γ – «скорость» распада филаментов [9], т.е. величина, обратная длине филаментов, составляющей для воздуха примерно 4–6 м; $C(\bar{I}) = C^0 + C^{(1)} \bar{I}$ – коэффициент, отвечающий за размножение филаментов [12] за счет интерференции колец от филаментов, в том числе и за счет интерференции с фоновым полем [11] (коэффициент $C^{(1)} \bar{I}$); B –

коэффициент, обеспечивающий существование конечных решений (1) для любых \bar{I} и соответствующий эффектам насыщения [11]; $F_{out}(z)$ – неоднородное слагаемое, отвечающее за внешние механизмы возбуждения системы, такие как начальные условия и турбулентность среды. (Заметим, что это уравнение можно переписать в форме уравнения Фокера–Планка, добавив к правой и левой частям величину $\nabla_\perp (n_f \nabla_\perp D)$ и введя величину $\mathbf{s}_\perp^D \equiv \mathbf{s}_\perp + \nabla_\perp D$.)

В (2) коэффициент диффузии D имеет простую связь с плотностью дифракционной расходимости, а именно: $D \approx L_m \bar{\theta}_d^2(z, \mathbf{r}_\perp) / k_0^2$, что есть следствие стандартного определения коэффициента диффузии

$$D(\mathbf{r}_\perp, z) \delta_{L_m}(z - z') = \bar{\theta}_d^2(\mathbf{r}_\perp, z) / k_0^2.$$

Механизм диффузии в нашем случае обусловлен прежде всего случайной составляющей поля «скоростей»

$$\bar{\theta}_d^2(\mathbf{r}_\perp, z) = \langle \delta \bar{\mathbf{s}}(z) \delta \bar{\mathbf{s}}(z') \rangle,$$

где L_m – длина памяти, т.е. длина продольной корреляции амплитудно-фазовых возмущений (колец), индуцируемых филаментами, которая была найдена на основе численного эксперимента в рамках стационарной модели [7] и составляет примерно 10 см, а δ_{L_m} есть соответственно регуляризованная дельта-функция с параметром регуляризации L_m . Обратим внимание, что данное обстоятельство связи между случайным полем скоростей и полем плотности дифракционной расходимости обусловлено тем фактом, что конвертация амплитудных возмущений в фазовые реализуется быстро, т.е. на дистанциях, существенно меньших не только масштабов изменения макроскопических характеристик системы, но и на масштабах длины филамента.

Конкретизация вида самовоздействия на основе результатов численного эксперимента

Коротко изложим ход суждений, на основании которых была выписана правая часть уравнения для n_f . Из численных экспериментов для случая $\nabla_\perp n_f = 0$ в условиях установления равновесия плотности числа филаментов n^{eq} для замкнутой системы найдено, что после достижения порогового уровня средней интенсивности $\bar{I}_{cr} \approx (2 - 2,5) \cdot 10^{13}$ Вт/см² [6, 7] амплитуда плотности числа филаментов $A_n^{eq} \equiv \sqrt{n_f^{eq}}$ растет по линейному закону (рис. 1) от средней интенсивности \bar{I} :

$$A_n^{eq}(\bar{I}) \approx \alpha_0 + \alpha_1 \bar{I}. \quad (3)$$

Далее, заметим, что указанное свойство возникновения критического параметра является типичным

для нелинейных систем [10], фазовый портрет представлен на рис. 2.

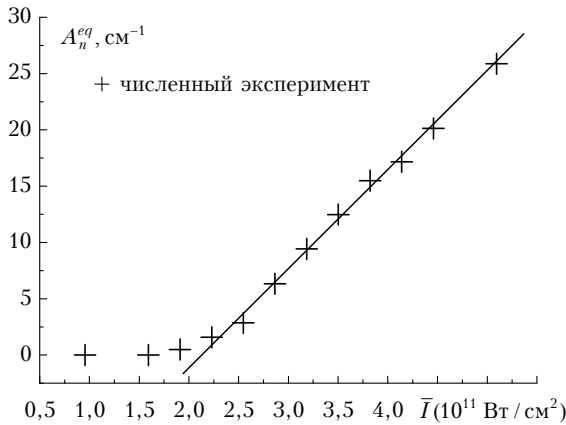


Рис. 1. Зависимость плотности числа филаментов $A_n^{eq} \equiv \sqrt{n_f^{eq}}$ в равновесном состоянии от средней интенсивности светового поля \bar{I} , найденная в численном эксперименте (крестики), и линия экстраполяции этой зависимости при превышении критической интенсивности ($\bar{I} > \bar{I}_{cr}$)

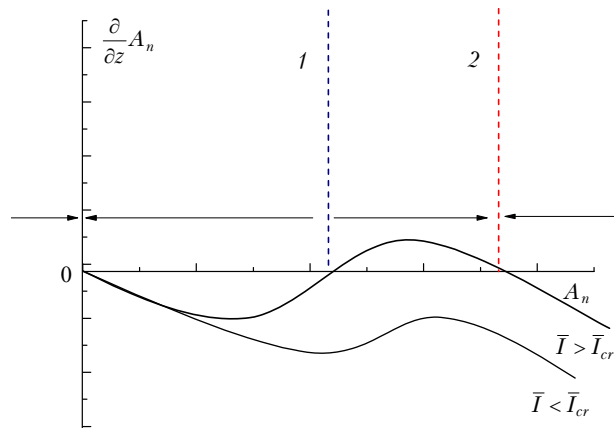


Рис. 2. Схематическая фазовая картина уравнения для амплитуды плотности числа филаментов. Кривые соответствуют двум значениям параметра средней интенсивности. При превышении среднего значения интенсивности критического уровня ($\bar{I} > \bar{I}_{cr}$) формируются две дополнительные точки равновесия (кроме тривиальной при нулевом значении A_n): неустойчивая (прямая 1) и устойчивая (2). Горизонтальные стрелки отражают направления фазового движения системы

Данной фазовой картине соответствует следующее уравнение динамики для A_n :

$$2 \frac{d}{dz} A_n = -A_n + C_\Gamma(\bar{I}) A_n^2 - B_\Gamma A_n^3, \quad (4)$$

где $C_\Gamma \equiv C/\Gamma$; $B_\Gamma = B/\Gamma$. Физический смысл коэффициентов при A_n пояснен выше, однако его значения и значения $C_\Gamma(\bar{I})$ и B_Γ пока еще не найдены. Для их доопределения выберем максимально простой

тип зависимости этих коэффициентов от средней интенсивности, согласуя этот выбор с тем известным фактом, что величина, ответственная за генерацию филаментов, связана с эффектом интерференции колец, формирующихся в процессе филаментации, с фоновым полем: $C_\Gamma(\bar{I}) = C_\Gamma^{(0)} + C_\Gamma^{(1)}\bar{I}$ [11]. Далее, заметим, что у правой части уравнения (4) кроме тривиального корня есть два нетривиальных, причем наибольший из них соответствует устойчивой точке равновесия, но это и есть не что иное, как $A_n^{eq}(\bar{I})$ (см. рис. 2). Теперь потребуем, чтобы зависимость этого максимального корня (4) от \bar{I} удовлетворяла зависимости (3), установленной в результате численного моделирования [7], тогда получим $B_\Gamma = 1/4\alpha_0^2$; $C_\Gamma^{(0)} = 1/4\alpha_0$, $C_\Gamma^{(1)} = B_\Gamma\alpha_1$.

Заключение

В статье предложен новый подход к описанию множественной филаментации как макроскопической системы, которая может быть описана известными методами нелинейной физики и, в частности, оптики [8, 10]. На основе обобщения численных экспериментов [7, 11] сформулирован общий вид уравнения для плотности числа филаментов, а именно уравнений нелинейной диффузии, также найден явный вид члена самовоздействия, отвечающего за распад и генерацию филаментов, и предложена процедура их конкретизации из численного эксперимента.

Предложенный метод исследования множественной филаментации может являться важным шагом в расширении возможностей теоретического анализа и прогнозирования макроскопических характеристик МФЛИ, формирующихся при его распространении в различных средах.

1. Kasparian J., Wolf J.-P. Physics and applications of atmospheric nonlinear optics and filamentation // Opt. Express. 2008. V. 16, N 1. P. 466–493.
2. Boyd R.W., Lukishova S.G., Shen Y.R. Self-Focusing: Past and Present // Springer Science, Business Media: LLC, 2009. 605 p.
3. Mauger S., Guillaume Colin de Verdier, Berge L., Skupin S. GPU accelerated fully space and time resolved numerical simulations of self-focusing laser beams in SBS-active media // J. Comput. Phys. 2013. V. 235. P. 606–625.
4. Henin S., Petit Y., Kasparian J., Wolf J.-P., Jochmann A., Kraft S.D., Bock S., Schramm U., Sauerbrey R., Nakaema W.M., Stelmaszczyk K., Rohwetter P., Woste L., Soulez C.-L., Mauger S., Berge L., Skupin S. Saturation of the filament density of ultrashort intense laser impulse in air // Appl. Phys. B. 2010. DOI: 10.1007/s00340-010-3941-x.
5. Lushnikov P.M., Vladimirova N. Non-Gaussian statistics of multiple filamentation // Opt. Lett. 2010. V. 35, iss. 12. P. 1965–1967.
6. Землянов А.А., Булыгин А.Д. Эволюция эффективных характеристик мощного фемтосекундного лазерного излучения в режиме оптической турбулентности. Приближение гауссовой формы пучка // Оптика атмосф. и океана. 2010. Т. 23, № 5. С. 378–382.

7. *Bulygin A.D.* The density number of filaments in the state of the weak and optical turbulence // arXiv: 1208.3916.
8. *Михайлов А.С., Упоров И.В.* Критические явления в средах с размножением, распадом и диффузией // Успехи физ. наук. 1984. Т. 144, вып. 1. С. 79–112.
9. *Зельдович Я.Б., Михайлов А.С.* Флуктуационная кинетика реакций // Успехи физ. наук. 1987. Т. 153, вып. 11. С. 469–496.
10. *Розанов Н.Н.* Диссипативные оптические солитоны. От микро- к нано- и атто-. М.: Физматлит, 2011. 536 с.
11. *Землянов А.А., Бulyгин А.Д.* Особенности развития возмущений светового поля в керровской среде с нелинейным поглощением // Оптика атмосф. и океана. 2012. Т. 25, № 10. С. 852–856.
12. *Боголюбов Н.Н.* О принципе компенсации и методе самосогласованного поля // Успехи физ. наук. 1959. Т. 67, вып. 4. С. 549–580.

A.D. Bulygin. The kinetic equation for filament density, formed during propagation of femtosecond laser radiation, in the approximation of self-consistent field.

A general form of the kinetic equation (nonlinear diffusion equation) for filament number density considering the effects of their generation and decay is stated. It consists of the phenomenological parameters, which have been determined from the direct numerical simulation of propagation of a high-power femtosecond laser pulse (HPFLP) based on the stationary nonlinear Schrödinger equation (NSE) for a series of the threshold particular cases.