

Ю.Н. Исаев

## Синтез вэйвлет-базиса для анализа оптических сигналов. Часть II. Биортогональный и комплексный вэйвлет-базисы

*Институт оптического мониторинга СО РАН, г. Томск*

Поступила в редакцию 3.02.2003 г.

Подробно описывается алгоритм синтеза биортогональных и комплексных вэйвлетов. Приводятся примеры восстановления и сжатия сигналов на основе сконструированных вэйвлетов. Описывается их сходство с базисом Карунена–Лоева. Представлена картина пространственно-временной развертки случайного сигнала по масштабам неоднородности. Приводятся примеры разложения и сжатия двумерных сигналов с фильтрацией по направлениям.

### Введение

В первой части данной статьи рассматривается ортогональный вэйвлет-базис для анализа и синтеза сигналов [1]. При синтезе ортогонального базиса количество симметричных вэйвлетов при фиксированном носителе вэйвлета ограничено. В отличие от синтеза ортогональных вэйвлетов синтез неортогональных вэйвлетов имеет гораздо большую свободу как по выбору формы, гладкости, симметрии, так и по таким важным критериям, как локализация и число нулевых моментов, т.е. класс неортогональных вэйвлетов гораздо шире. В этой части статьи будет подробно описан алгоритм построения неортогональных вэйвлетов, которые имеют сходства со статистически оптимальным базисом Карунена–Лоева [2], и приведен алгоритм построения комплексных вэйвлетов, которые полезны при анализе и синтезе амплитуды и фазы оптических комплексных сигналов. И в заключение приведем обработку двумерных изображений.

### Основная часть

При разложении сигнала  $f(x)$  в неортогональный вэйвлет-базис необходимо иметь два базиса: вэйвлет  $\Psi(x)$ , по которому собственно раскладывается сигнал, и двойственный ему вэйвлет  $\tilde{\Psi}(x)$ , с помощью которого определяются коэффициенты разложения, т.е.

$$f(x) = \sum_{jk}^N c_{jk} \Psi_{jk}(x). \quad (1)$$

Здесь  $\Psi_{jk}(x) = 2^{-j/2} \Psi(2^{-j}x - k)$ ;

$$c_{jk} = \langle f, \tilde{\Psi}_{jk} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \tilde{\Psi}_{jk}(x) dx, \quad (2)$$

причем выполняется соотношение

$$\langle \Psi_{mm}, \tilde{\Psi}_{jk} \rangle = \delta_{m,j}, \delta_{n,k}, \quad (3)$$

где  $\delta_{m,j}$  – символ Кронекера. Вэйвлеты  $\Psi$  и  $\tilde{\Psi}$  называются биортогональными и образуются на основе скейлинговых функций  $\phi$  и  $\tilde{\phi}$ , которые подчиняются двухмасштабным соотношениям

$$\phi(x) = \sum_{k=0}^N p_k \phi(2x - k), \quad \tilde{\phi}(x) = \sum_{k=0}^{\tilde{N}} \tilde{p}_k \tilde{\phi}(2x - k). \quad (4)$$

Верхние индексы суммирования  $N$  и  $\tilde{N}$  являются носителями функций  $\phi$  и  $\tilde{\phi}$  соответственно, т.е.  $N = \text{supp } \phi(x)$ ,  $\tilde{N} = \text{supp } \tilde{\phi}(x)$ . После определения коэффициентов  $p_k$  и  $\tilde{p}_k$  из формул (4) можно определить  $\Psi$  и  $\tilde{\Psi}$  с помощью соотношений

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \sum_{k=0}^{\tilde{N}} (-1)^{k+1} \tilde{p}_{-k+1} \phi(2x - k), \\ \tilde{\Psi}(x) &= \sum_{k=0}^N (-1)^{k+1} p_{-k+1} \tilde{\phi}(2x - k). \end{aligned} \quad (5)$$

Таким образом, чтобы получить вэйвлеты  $\Psi$  и  $\tilde{\Psi}$ , необходимо определить коэффициенты  $p_k$  и  $\tilde{p}_k$  в разложениях (4). Для определения коэффициентов запишем разложения (4) в частотной области

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(\kappa) &= \hat{\phi}(\kappa/2) \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N p_k \exp(-jk\kappa/2), \\ \hat{\tilde{\phi}}(\kappa) &= \hat{\tilde{\phi}}(\kappa/2) \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\tilde{N}} \tilde{p}_k \exp(-jk\kappa/2), \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\hat{\phi}(\kappa) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \exp(-j\kappa x) dx,$$

и введем обозначения для фильтров

$$m(\kappa) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N p_k \exp(-jk\kappa/2),$$

$$\tilde{m}(\kappa) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N \tilde{p}_k \exp(-jk\kappa/2). \quad (7)$$

Выполнение условия ортогональности (3) для  $\Psi$  и  $\tilde{\Psi}$  эквивалентно выполнению следующего условия для фильтров [3, 4]:

$$m(\kappa) \bar{\tilde{m}}(\kappa) + m(\kappa + \pi) \bar{\tilde{m}}(\kappa + \pi) = 1. \quad (8)$$

Здесь черта означает знак комплексного сопряжения.

Если в качестве фильтра выбран  $m(\kappa)$ , то, решая уравнение (8), мы можем найти  $\tilde{m}(\kappa)$ . Прежде чем объяснить, как решается уравнение (8), сделаем некоторое отступление, а затем вернемся к его решению. Во введении говорилось о том, что при сжатии изображения желательно иметь вэйвлеты с большим числом нулевых моментов. Дадим краткое пояснение. Пусть сигнал  $f(x)$  раскладывается в ряд

$$f(x) = \sum_{jk} c_{jk} 2^{-j/2} \Psi(2^{-j} x - k). \quad (9)$$

Если разложить сигнал  $f(x)$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $k$ , то можно получить

$$f(x) = f(k) + f'(k)(x-k) + \frac{1}{2} f''(x-k)^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x-k)^n + \dots \quad (10)$$

Если умножим это выражение на  $\tilde{\Psi}(2^{-j} x - k)$  и проинтегрируем, то, очевидно, в разложении пропадут члены, для которых выполняется соотношение

$$\int \tilde{\Psi}(x) x^n dx = 0. \quad (11)$$

Члены более высокого порядка малости в разложении (10) являются пренебрежимо малыми. При сжатии сигнала производится сортировка (значимых) коэффициентов выше некоторого порогового значения. Очевидно, что чем больше количество нулевых моментов, тем лучше сжатие сигнала, т.е. тем меньше останется коэффициентов для представления сигнала. В этом смысле симметричный вэйвлет-базис близок к оптимальному базису Карунена–Лоева [2]. Сходство проявляется в том, что базис Карунена–Лоева имеет некоррелированные, а вэйвлет-базис – слабо коррелированные коэффициенты разложения, что является критерием для хорошего сжатия сигнала. Слабая коррелированность вэйвлет-базиса объясняется тем, что носители базисных функций (замыкание множеств, на которых функции отличны от нуля) разнесены в пространстве (или во времени). Возвращаясь к уравнению (8), скажем, что оно позволяет синтезировать вэйвлеты с любым числом нулевых моментов. Приведем алгоритм синтеза вэйвлета с требуемым числом нулевых моментов.

Сконструировать вэйвлеты  $\Psi$  и  $\tilde{\Psi}$  – значит найти  $m(\kappa)$  и  $\tilde{m}(\kappa)$ . Выбираем  $m(\kappa)$  в виде

$$m(\kappa) = \cos^n(\kappa/2) P[\sin^2(\kappa/2)], \quad (12)$$

если  $n$  четное, и в виде

$$m(\kappa) = \exp(j\kappa/2) \cos^n(\kappa/2) P[\sin^2(\kappa/2)], \quad (13)$$

если  $n$  нечетное. В этом выражении  $n$  – степень первого сомножителя  $\cos^n(\frac{1}{2}\kappa)$ , определяет число нулевых моментов в конструируемом вэйвлете [3, 4], а  $P(x)$  – некий полином. При выбранном выражении для  $m(\kappa)$  будем искать решение для  $\tilde{m}(\kappa)$  в виде

$$\tilde{m}(\kappa) = \cos^s(\kappa/2) \tilde{P}[\sin^2(\kappa/2)], \quad (14)$$

если  $n$  четное, и в виде

$$\tilde{m}(\kappa) = \exp(j\kappa/2) \cos^s(\kappa/2) \tilde{P}[\sin^2(\kappa/2)], \quad (15)$$

если  $n$  нечетное.

Введем обозначения  $x = \sin^2(\kappa/2)$ ,  $(1-x)^{s/2} \tilde{P}(x) = \tilde{m}(\kappa)$ , подставим (12) или (13) и соответственно (14) или (13) в (8), в результате получим уравнение Безу [5]:

$$(x-1)^N B(x) + x^N B(1-x) = 1,$$

где  $B(x) = \tilde{P}(x) P(x)$ ;  $N = (s+n)/2$ . Общее решение уравнения Безу имеет следующий вид:

$$B(x) = \sum_{k=0}^{N-1} C(N+k-1, k) x^k + x^N f(x-1/2), \quad (16)$$

где  $C(N, k)$  – число сочетаний из  $n$ -элементов по  $k$ ;  $f(x)$  – любая нечетная функция. Первый и второй члены выражения (16) есть частное решение неоднородного уравнения и общее решение однородного уравнения Безу соответственно. Выбирая различные  $N$  и  $f(x)$  при выбранном  $m(\kappa)$ , в соответствии с (16) получаем совершенно определенное выражение для  $\tilde{m}(\kappa)$ . Приведем конкретный пример для четного и нечетного  $N$ . Выбирая  $N = 3$  и  $f(x) = x + x^3$ , имеем

$$B(x) = 1 + 3x + 6x^2 + x^3 [x - 1/2 + (x - 1/2)^3]. \quad (17)$$

Определим корни выражения (17) и запишем его в факторизованном виде

$$B(x) = A \prod_{j=1}^3 (x^2 - 2\text{Re}(z_j) + |z_j|^2), \quad (18)$$

где  $A$  – константа, которую легко определить, разделив (17) на (18), в нашем случае  $A = 1$ ;  $z_j = \text{Re}(z_j) + j\text{Im}(z_j)$  – 3 пары комплексно-сопряженных корней:

$$z_1 = -0,4763090739 - j1,2303119751, \quad \bar{z}_2 = z_1,$$

$$z_3 = -0,2533865279 - j0,30248926121, \quad \bar{z}_4 = z_3,$$

$$z_5 = -1,47969571803 - j1,22491119812, \quad \bar{z}_6 = z_5.$$

Теперь выбираем

$$P(x) = (x^2 - 2\operatorname{Re}(z_2) + |z_2|^2), \quad n = 5, \quad (19)$$

$$m(\kappa) = \exp(j\kappa/2) \cos^5(\kappa/2) P[\sin^2(\kappa/2)], \quad (20)$$

тогда  $\tilde{m}(\kappa)$  может иметь единственный вид

$$\begin{aligned} \tilde{P}(x) &= (x^2 - 2\operatorname{Re}(z_1) + |z_1|^2) \times \\ &\times (x^2 - 2\operatorname{Re}(z_3) + |z_3|^2), \quad s = 1, \quad (21) \end{aligned}$$

$$\tilde{m}(\kappa) = \exp(j\kappa/2) \cos(\kappa/2) \tilde{P}[\sin^2(\kappa/2)]. \quad (22)$$

Раскладываем  $m(\kappa)$  и  $\tilde{m}(\kappa)$  в ряды Фурье (7) и получаем по десять коэффициентов  $p_k$  и  $\tilde{p}_k$  для скейлинговой функции  $\varphi(x)$  (рис. 1,а) и двойственной ей функции  $\tilde{\varphi}(x)$  (рис. 1,б) соответственно. Разложение в ряд Фурье можно осуществить, используя тригонометрические соотношения

$$\cos^n(x) = \left( \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \right)^n, \quad \sin^n(x) = \left( \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \right)^n,$$

но гораздо проще разложение Фурье осуществлять в программно-интегрируемой среде Mathcad. Далее, следуя алгоритму, описанному в первой части статьи [1], можно построить скейлинговые функции и соответствующие им вэйвлеты. Графические зависимости для вэйвлетов  $\Psi$  и  $\tilde{\Psi}$  и их скейлинговых функций приведены на рис. 1,а,б. Для конструкции следующей пары вэйвлетов следует в (19) принять  $n = 3$ , а в (21) –  $s = 3$ , при этом в разложениях  $m(\kappa)$  и  $\tilde{m}(\kappa)$  в ряд Фурье (7) получим двенадцать коэффициентов  $p_k$  и десять коэффициентов  $\tilde{p}_k$ . Соответствующие этим коэффициентам скейлинговые функции и вэйвлеты приведены на рис. 1,в,г. Если примем  $n = 5$ ,  $s = 1$  и переместим корень  $z_1$  из (21) в (19), то получим коэффициенты и соответствующие им вэйвлеты и скейлинговые функции, приведенные на рис. 1,д,е.

Остановимся теперь на примере для четного  $N = 4$ . В этом случае решение уравнения Безу будет выглядеть следующим образом:

$$B(x) = 1 + 4x + 10x^2 + 20x^3 + x^4 f(x - 1/2). \quad (23)$$

Выберем в качестве  $f(x)$  нечетную функцию  $f(x) = x + x^3$ . Найдем корни  $B(x)$  и запишем их в факторизованном виде

$$B(x) = A(x - x_0) \prod_{j=1}^3 (x^2 - 2\operatorname{Re}(z_j) + |z_j|^2). \quad (24)$$

В этом случае получаем один вещественный корень  $x_0 = -0,3378926514$  и три пары комплексно-сопряженных корней  $z_j = \operatorname{Re}(z_j) + j\operatorname{Im}(z_j)$ :

$$\begin{aligned} z_1 &= -0,9055499544 - j1,581306455, \quad \bar{z}_2 = z_1, \\ z_3 &= -8,1141156107 \cdot 10^{-2} - j0,3725006021, \quad \bar{z}_4 = z_3, \\ z_5 &= 1,9056374362 - j1,5814099917, \quad \bar{z}_6 = z_5. \end{aligned}$$

Теперь можно записать выражение для  $m(\kappa)$  и  $\tilde{m}(\kappa)$

в виде (12) и (14) соответственно, где  $P(x)$  и  $\tilde{P}(x)$  есть различные сочетания множителей выражения (24).

Раскладывая в ряды Фурье фильтры  $m(\kappa)$  и  $\tilde{m}(\kappa)$ , получим коэффициенты  $p_k$  и  $\tilde{p}_k$ . Некоторые возможные варианты решений для четных и нечетных  $N$  показаны на рис. 2.

Отметим, что при фиксированном  $N$  класс возможных решений можно расширить, изменив вид функции  $f(x)$ , но при этом увеличиваются носители вэйвлета и его скейлинговой функции.

Далее рассмотрим разложение сигналов по полученным базисам. На рис. 3 приведены модельный сигнал (рис. 3,а) и его вэйвлет-разложение (рис. 3,б–д).

В качестве базиса были выбраны вэйвлеты, приведенные на рис. 1,а (число нулевых моментов  $s = 3$ ) и на рис. 2,д (число нулевых моментов  $s = 6$ ). На рис. 3,б,в приводится восстановление сигнала с компрессией для вэйвлета с  $s = 6$ , на рис. 3,б – 32 коэффициента из 256 и рис. 3,в – 128 коэффициентов из 256.

На рис. 3,г,д все то же, но для вэйвлета с  $s = 3$ . Как и следовало ожидать, лучшие восстановление и сжатие сигнала (а следовательно, и меньшее число коэффициентов в разложении) потребовались для вэйвлета с  $s = 6$  с более высоким числом нулевых моментов.

Для полученных вэйвлетов автором проверялся критерий локализации, который выражается соотношением

$$\Delta x \Delta \kappa \geq \frac{1}{2}, \quad (25)$$

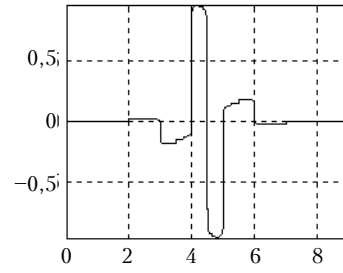
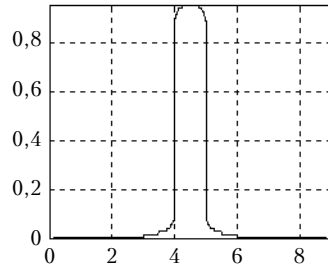
где

$$\begin{aligned} \Delta x &= \frac{\int |\Psi(x)|^2 (x - x_0)^2 dx}{\int |\Psi(x)|^2 dx}, \\ \Delta \kappa &= \frac{\int |\hat{\Psi}(\kappa)|^2 (\kappa - \kappa_0)^2 d\kappa}{\int |\hat{\Psi}(\kappa)|^2 d\kappa}. \quad (26) \end{aligned}$$

При увеличении числа нулевых моментов вэйвлетов неравенство (25) быстро стремилось к равенству. То есть вэйвлеты модулируются гауссовой функцией, значит, они приближаются к собственным функциям оператора Фурье [6] и становятся оптимальными по критерию (25). Это означает, что сигнал ограниченной протяженности при фиксированном числе членов разложения будет иметь наибольшую энергию, если он представлен вэйвлет-базисом, удовлетворяющим равенству (25), это еще одно сходство с базисом Карунена–Лоева. С помощью таких вэйвлетов удобно определять скрытую периодичность исследуемых сигналов и определять их мультифрактальную структуру.

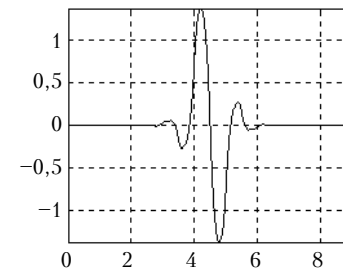
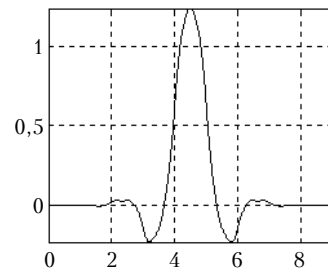
Приведем вэйвлет-разложение случайного сигнала – скорость ветра, изображенного на рис. 3,е, сверху. В качестве базиса выберем вэйвлет, показанный на рис. 2,в.

$$\begin{aligned}
p_0 = p_9 &= 0,0004301 \\
p_1 = p_8 &= 0,0004417 \\
p_2 = p_7 &= 0,009309 \\
p_3 = p_6 &= 0,0101488 \\
p_4 = p_5 &= 0,6867772
\end{aligned}$$



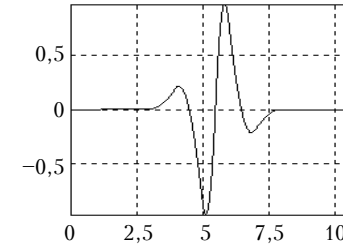
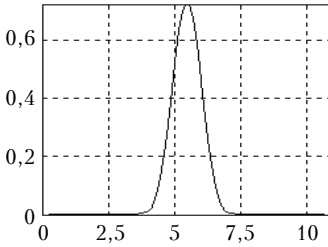
a

$$\begin{aligned}
\tilde{p}_0 = \tilde{p}_9 &= 0,0177396 \\
\tilde{p}_1 = \tilde{p}_8 &= 0,0182202 \\
\tilde{p}_2 = \tilde{p}_7 &= -0,1346437 \\
\tilde{p}_3 = \tilde{p}_6 &= -0,1140526 \\
\tilde{p}_4 = \tilde{p}_5 &= 0,7281784
\end{aligned}$$



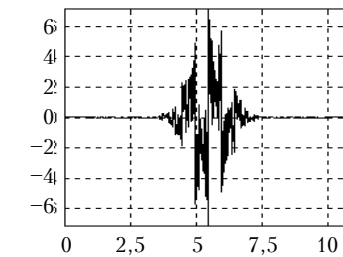
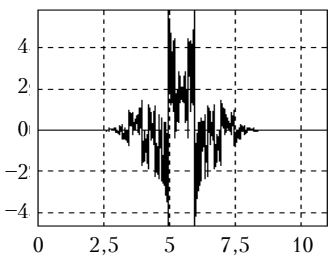
б

$$\begin{aligned}
p_0 = p_{11} &= 0,0004301 \\
p_1 = p_{10} &= 0,0004417 \\
p_2 = p_9 &= 0,009309 \\
p_3 = p_8 &= 0,0101488 \\
p_4 = p_7 &= 0,6867772 \\
p_5 = p_6 &= 0,6867772
\end{aligned}$$



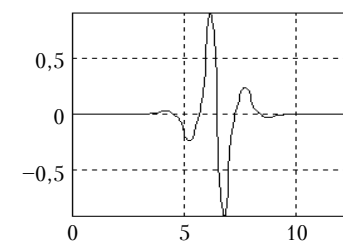
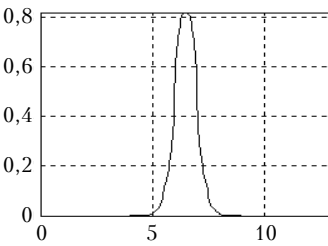
б

$$\begin{aligned}
\tilde{p}_0 = \tilde{p}_9 &= 0,0177396 \\
\tilde{p}_1 = \tilde{p}_8 &= 0,0182202 \\
\tilde{p}_2 = \tilde{p}_7 &= -0,1346437 \\
\tilde{p}_3 = \tilde{p}_6 &= -0,1140526 \\
\tilde{p}_4 = \tilde{p}_5 &= 0,7281784
\end{aligned}$$



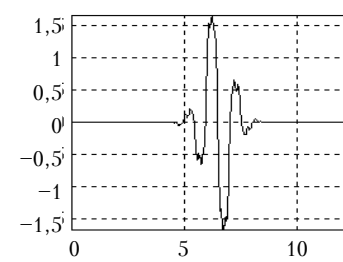
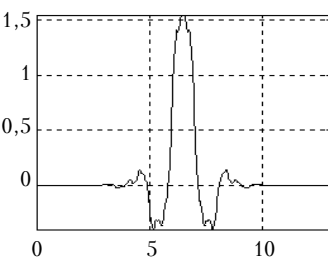
б

$$\begin{aligned}
p_0 = p_5 &= 0,011997 \\
p_1 = p_4 &= 0,1058479 \\
p_2 = p_3 &= 0,5892818
\end{aligned}$$



б

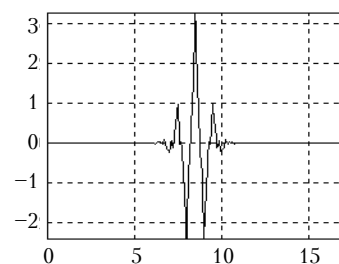
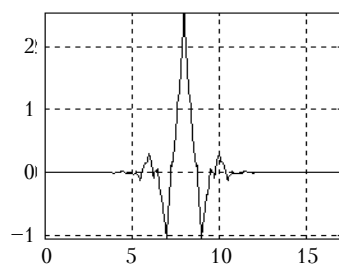
$$\begin{aligned}
\tilde{p}_0 = \tilde{p}_{13} &= 0,000637 \\
\tilde{p}_1 = \tilde{p}_{12} &= -0,0056295 \\
\tilde{p}_2 = \tilde{p}_{11} &= 0,0266914 \\
\tilde{p}_3 = \tilde{p}_{10} &= 0,0097508 \\
\tilde{p}_4 = \tilde{p}_9 &= -0,2005914 \\
\tilde{p}_5 = \tilde{p}_8 &= 0,0288662 \\
\tilde{p}_6 = \tilde{p}_7 &= 0,843824
\end{aligned}$$



б

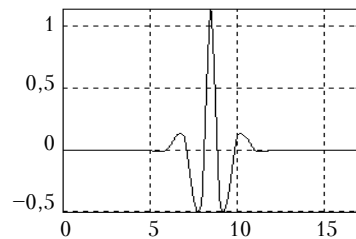
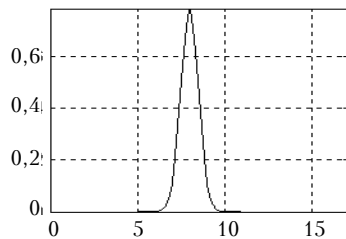
Рис. 1

$$\begin{aligned}
p_0 = p_{16} &= -0,00013233 \\
p_1 = p_{15} &= 0,00175273 \\
p_2 = p_{14} &= -0,01181917 \\
p_3 = p_{13} &= 0,00878867 \\
p_4 = p_{12} &= 0,08313578 \\
p_5 = p_{11} &= -0,11690713 \\
p_6 = p_{10} &= -0,29571447 \\
p_7 = p_9 &= 0,45991912 \\
p_8 &= 1,15616716
\end{aligned}$$



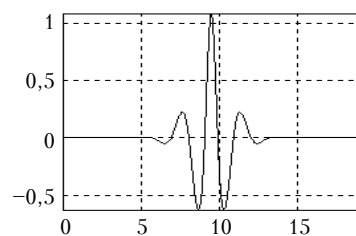
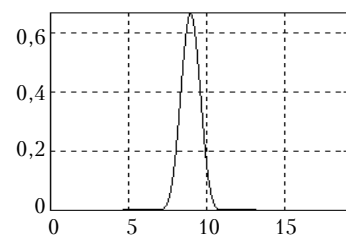
a

$$\begin{aligned}
\tilde{p}_0 = \tilde{p}_6 &= 0,00360339 \\
\tilde{p}_1 = \tilde{p}_5 &= 0,04772721 \\
\tilde{p}_2 = \tilde{p}_4 &= 0,34995 \\
\tilde{p}_3 &= 0,61165236
\end{aligned}$$



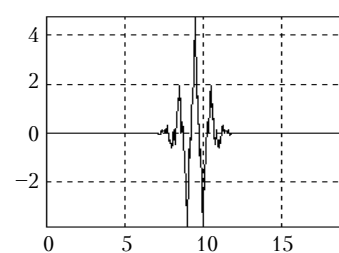
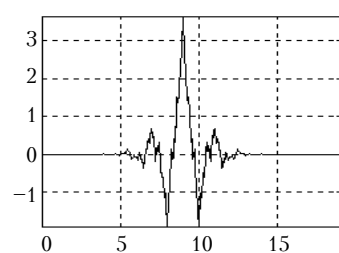
б

$$\begin{aligned}
p_0 = p_{18} &= -0,00136135 \\
p_1 = p_{17} &= 0,0054454 \\
p_2 = p_{16} &= 0,00468923 \\
p_3 = p_{15} &= -0,04598393 \\
p_4 = p_{14} &= 0,01771813 \\
p_5 = p_{13} &= 0,18082888 \\
p_6 = p_{12} &= -0,15619841 \\
p_7 = p_{11} &= -0,48524242 \\
p_8 = p_{10} &= 0,48870579 \\
p_9 &= 1,39701094
\end{aligned}$$



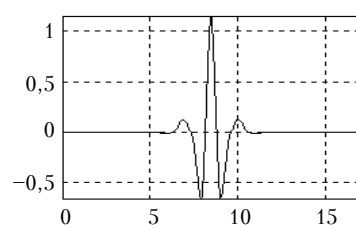
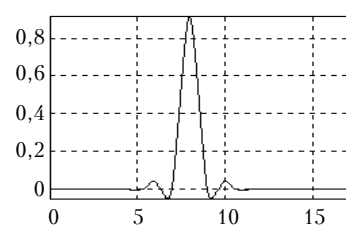
в

$$\begin{aligned}
\tilde{p}_0 = \tilde{p}_{10} &= 0,00000137 \\
\tilde{p}_1 = \tilde{p}_9 &= 0,00000547 \\
\tilde{p}_2 = \tilde{p}_8 &= 0,00003618 \\
\tilde{p}_3 = \tilde{p}_7 &= 0,08849887 \\
\tilde{p}_4 = \tilde{p}_6 &= 0,35343055 \\
\tilde{p}_5 &= 0,53003394
\end{aligned}$$



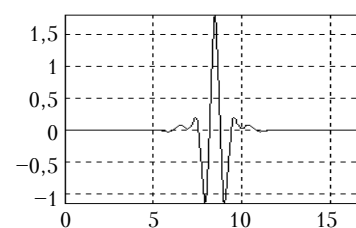
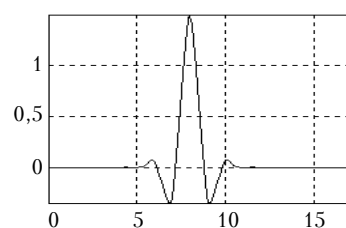
г

$$\begin{aligned}
p_0 = p_{16} &= -0,00002804 \\
p_1 = p_{15} &= -0,00060931 \\
p_2 = p_{14} &= 0,00674686 \\
p_3 = p_{13} &= 0,00592045 \\
p_4 = p_{12} &= 0,03761214 \\
p_5 = p_{11} &= -0,02871934 \\
p_6 = p_{10} &= -0,03011743 \\
p_7 = p_9 &= 0,37696159 \\
p_8 &= 0,70566718
\end{aligned}$$



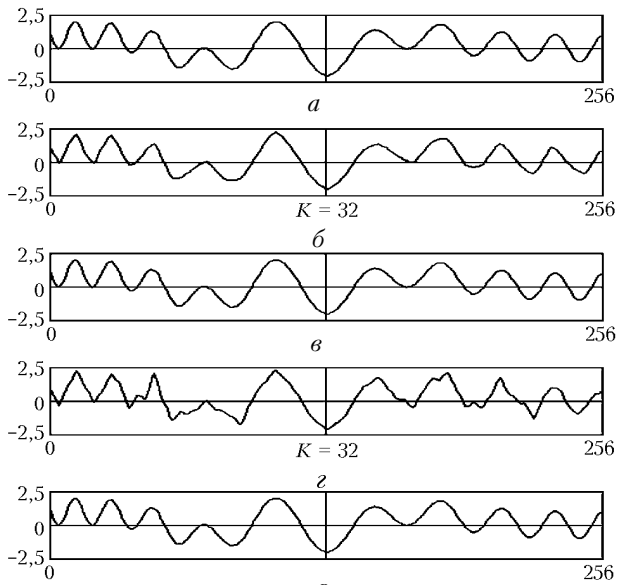
д

$$\begin{aligned}
\tilde{p}_0 = \tilde{p}_{14} &= 0,00006642 \\
\tilde{p}_1 = \tilde{p}_{13} &= -0,00144319 \\
\tilde{p}_2 = \tilde{p}_{12} &= 0,01584165 \\
\tilde{p}_3 = \tilde{p}_{11} &= 0,01703875 \\
\tilde{p}_4 = \tilde{p}_{10} &= -0,121698 \\
\tilde{p}_5 = \tilde{p}_9 &= -0,11432698 \\
\tilde{p}_6 = \tilde{p}_8 &= 0,45934331 \\
\tilde{p}_7 &= 0,90456961
\end{aligned}$$

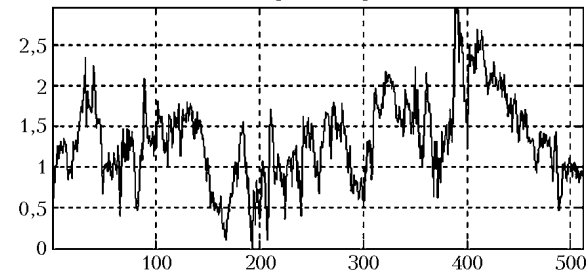


е

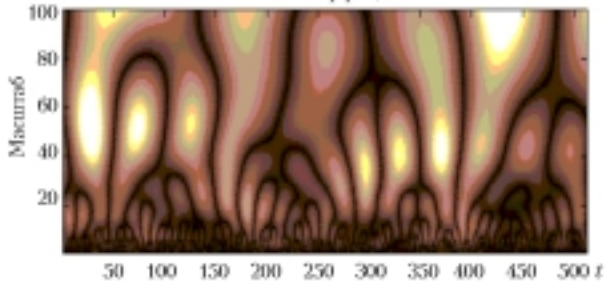
Рис. 2



Скорость ветра



Вэйвлет-коэффициенты



е

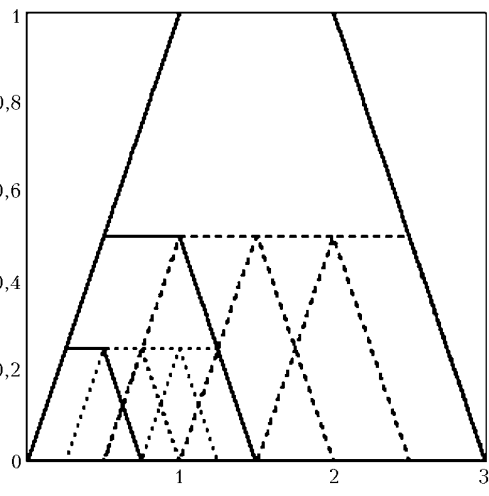


Рис. 3

На рис. 3,е, внизу, приведены абсолютные значения коэффициентов вэйвлет-разложения случайного сигнала – скорости ветра, это картина, показывающая относительный вклад неоднородностей разного масштаба в формирование сигнала.

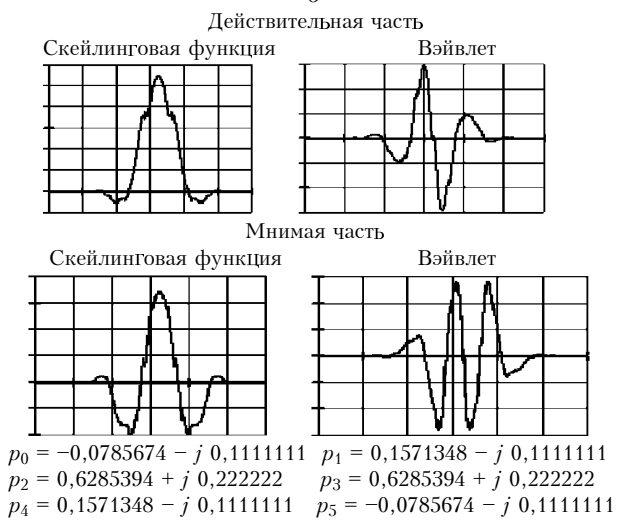
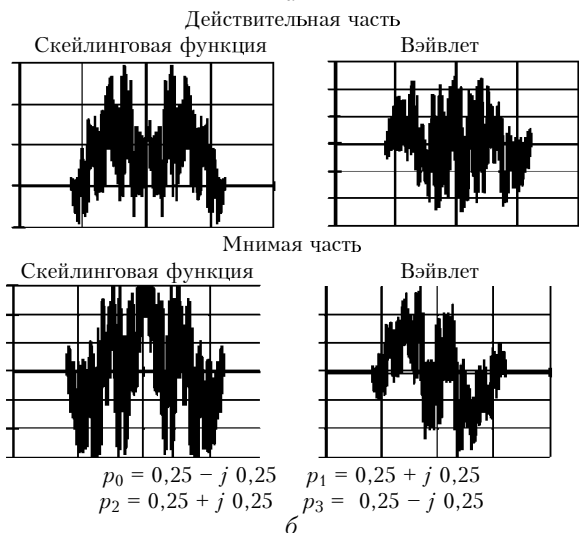
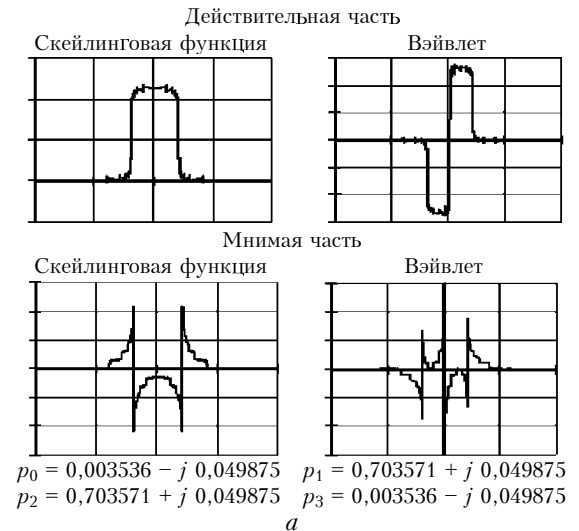


Рис. 4

Из картины видно, что крупномасштабные неоднородности рассыпаются на более мелкие, в свою очередь мелкие неоднородности рассыпаются в еще более мелкие, и этот каскадный процесс продолжается до самой мелкой фракции неоднородности, о чем свидетельствуют характерные разветвления – «вилки». Этот пример демонстрирует сходство случайного сигнала с мультифрактальной структурой неоднородного канторовского ряда, а значит, среду распространения сигнала можно описывать степенным спектром типа  $\kappa^\alpha$ , если только считать, что  $\alpha$  является функцией  $\kappa$ .

Такою физической картину описания неоднородностей удастся получить благодаря фрактальным свойствам скейлинговых функций вэйвлетов, т.е. уравнению (4), смысл которого графически представлен на рис. 3,ж, где для простоты в качестве скейлинговой функции представлена трапецеидальная функция

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \varphi(2x) + \frac{1}{2} \varphi(2x - 1) + \frac{1}{2} \varphi(2x - 2) + \frac{1}{2} \varphi(2x - 3). \quad (27)$$



Исходное изображение



Увеличенный фрагмент горизонтального разложения второго уровня



Восстановленное изображение



Сжатие изображения

Рис. 5

Каждая трапеция состоит из четырех себе подобных трапеций, этот каскадный процесс (напоминающий каскадный процесс взаимодействия вихрей в турбулентном процессе) можно продолжать до бесконечности в обоих направлениях, как в сторону увеличения, так и в сторону уменьшения размеров трапеций. Можно без труда заметить, что подобный базис более точно соответствует структуре турбулентного потока и, следовательно, его адекватному описанию.

В ряде случаев анализ амплитуды и фазы оптического сигнала удобно производить в его комплексном представлении. В этом случае удобно для разложения использовать комплексные вэйвлеты. Скейлинговая функция  $\varphi(x)$  в этом случае имеет комплексные коэффициенты, а двойственная ей функция будет сопряженной ей функцией

$$\tilde{\varphi}(x) = \overline{\varphi(x)}. \quad (28)$$

Приведем алгоритм синтеза комплексных вэйвлетов. Задаем вещественной частью коэффициентов в разложении (4), сумма которых равна единице, например

$$\operatorname{Re}(p_0) = \operatorname{Re}(p_1) = \operatorname{Re}(p_2) = \operatorname{Re}(p_3) = \frac{1}{4}, \quad (29)$$

затем находим мнимую часть коэффициентов  $\operatorname{Im}(p_k)$  из уравнения ортогональности (8) с учетом условия (28)

$$p_0 = p_3 = \frac{1}{4} + j \frac{1}{4}, \quad p_1 = p_2 = \frac{1}{4} - j \frac{1}{4}. \quad (30)$$

После определения коэффициентов находим скейлинговые и вэйвлет-функции с помощью выражений (4) и (5) соответственно. Комплексные вэйвлеты можно получить так же, используя комплексное решение уравнения Безу. Например, при  $N = 3$  решение можно записать в виде

$$B(x) = A \prod_{j=1}^3 (x - z_j) (x - \bar{z}_j), \quad (31)$$

тогда в выражения для фильтров  $t(\kappa)$  и  $\tilde{m}(\kappa)$  будут входить различные сочетания комплексных множителей из (31). На рис. 4 приведены вэйвлеты, полученные по описанному алгоритму.

Приведем пример использования вэйвлет-базиса для обработки двумерных изображений. Записав тензорное произведение одномерных вэйвлетов, приходим к определению трех двумерных вэйвлетов

$$\Psi^{\Gamma}(x,y) = \varphi(x) \Psi(y), \quad \Psi^{\text{B}}(x,y) = \Psi(x) \varphi(y), \\ \Psi^{\Delta}(x,y) = \varphi(x)\varphi(y). \quad (32)$$

Такое представление удобно тем, что осуществляется фильтрация изображения в горизонтальном, вертикальном и диагональном направлениях, соответствующие вэйвлеты снабжены индексами. Путем сдвигов и сжатия образуется базис

*Yu.N. Isaev. Synthesis of wavelet basis for analysis of optical signals. Part II. Biorthogonal and complex wavelet bases.*

A algorithm for synthesis of biorthogonal and complex wavelets is described in detail. Examples of reconstruction and compression of signals based on the constructed wavelets are presented. Similarity of these wavelet bases with the Karhunen–Loeve basis is considered. A pattern of temporal-spatial development of a random signal over inhomogeneity scales is presented. Examples of expansion and compression of two-dimensional signals with filtering by directions are presented.

$$\Psi_{j,n_1,n_2}(x,y) = 2^{-j} \Psi(2^{-j}x - n_1, 2^{-j}y - n_2). \quad (33)$$

Все соотношения (1)–(5), приведенные для одномерного случая, остаются верными для двумерного базиса. Вэйвлеты, приведенные в данной работе и в работе [1], автором установлены в среде GUI пакета Wavelet Toolbox (MATLAB 6.1), что существенно облегчает использование вэйвлетов для синтеза и анализа двумерных изображений. В качестве примера работы пакета приведем пример сжатия 2-D изображения с помощью вэйвлета, изображенного на рис. 2,б (рис. 5, внизу). Исходное количество коэффициентов было  $256 \times 256$  с последующим уменьшением в два раза. Для выделения краевых эффектов изображения с учетом направления выберем вэйвлет, изображенный на рис. 6,б из работы [1]. Результаты восстановления, приведенные на рис. 5 (вверху), отчетливо демонстрируют полезное свойство вэйвлетов фильтровать по направлениям.

## Заключение

В настоящей статье представлены группы новых биортогональных и комплексных вэйвлетов, приведены алгоритм их синтеза, а также примеры синтеза и анализа модельных сигналов. Приведена возможность визуализации фрактальной структуры сигнала, масштабов неоднородности среды распространения сигнала с помощью коэффициентов вэйвлет-разложения. Продемонстрированы полезные свойства полученных вэйвлетов фильтровать по направлениям и выделять тонкую структуру изображения.

Автор весьма признателен Сергею Владимировичу Логинову за помощь при установке вэйвлетов в среде GUI пакета Wavelet Toolbox (MATLAB 6.1), а также благодарит Алексея Леонидовича Афанасьева за предоставленные экспериментальные данные.

1. *Исаев Ю.Н.* Синтез вэйвлет-базиса для анализа оптических сигналов. Часть I. Ортогональный вэйвлет-базис // *Оптика атмосф. и океана.* 2002. Т. 15. № 11. С. 974–981.
2. *Исаев Ю.Н., Захарова Е.В.* Синтез оптимального базиса для восстановления случайных волновых полей // *Оптика атмосф. и океана.* 1998. Т. 11. № 8. С. 451–454.
3. *Добеши И.* Десять лекций по вэйвлетам: Пер. с англ. Е.В. Мищенко / Под ред. А.П. Петухова. М.; Ижевск: НИС «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 464 с.
4. *Чуи К.* Введение в вэйвлеты: Пер. с англ. / Под. ред. Я.М. Жилейкина. М.: Мир, 2001. 412 с.
5. *De Vore R.A., Jawerth B. and Lucier B.J.* Image compression through wavelet transform coding // *IEEE Transactions on Information Theory.* 1992. V. 38. N 2. P. 719–746.
6. *Хургии Я.И., Яковлев В.П.* Финитные функции в физике и технике. М.: Наука, 1971. 406 с.