

Д.Н. Ромашов, В.А. Ячменев, Р.Ф. Рахимов

## РАСЧЕТНЫЕ ФОРМУЛЫ МЕТОДА ВОЗМУЩЕНИЯ ФОРМЫ РАССЕИВАТЕЛЯ МИ В БАЗИСЕ ВЕКТОРНЫХ СФЕРИЧЕСКИХ ГАРМОНИК КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ УГЛОВОГО МОМЕНТА

Представлена численная реализация метода возмущения формы рассеивателя Ми при произвольно ориентированном возмущении сферы. Осуществляется переход от общепринятого в теории светорассеяния базиса векторных сферических гармоник с вещественной зависимостью от азимутального угла  $\varphi$  к базису с комплексной зависимостью от угла  $\varphi$ . Исследуется сходимость метода в зависимости от числа учитываемых поправок. Приведены рассчитанные значения элементов матрицы рассеяния для вытянутого и инвертированного сфероидов.

### 1. Введение

Возможности практического использования современных достижений теории светорассеяния несферическими частицами заметно отстают от потребностей прикладных областей, в том числе оптики атмосферного аэрозоля. В попытке обобщения теории Ми для частиц произвольной формы, предпринятой в [1], рассмотрено лишь приближение первого порядка по параметру возмущения. В последовавшей за [1] серии работ Эрма [2 – 4] найдены рекуррентные формулы для получения поправок к коэффициентам Ми любого порядка, а конечные расчетные формулы приведены лишь для фиксированной ориентации рассеивателя.

К сожалению, во всех вышеперечисленных работах отсутствует единый метод реализации численных расчетов при произвольно заданных возмущениях сферического рассеивателя, зависящих не только от полярного  $\theta$ , но и от азимутального  $\varphi$  углов. Представленные в настоящей статье расчетные формулы устраняют этот недостаток, благодаря переходу от базиса двух линейно поляризованных состояний (LP-представление) к базису из лево- и правоциркулярно поляризованных состояний (CP-представление). Вследствие этого разложение всех электромагнитных полей здесь осуществляется по векторным сферическим гармоникам квантовой теории углового момента [5]. Проведенные расчеты для возмущения сферы  $r = a$  в сферу  $r = a(1 + \epsilon)$  показывают, что для достижения приемлемой точности оценки параметров светорассеяния необходимо привлечение поправок довольно высокого порядка.

В то же время развитие метода возмущения формы рассеивателя Ми (ВФМР) перспективно ввиду целого ряда его преимуществ по сравнению с другими непертурбативными методами. Так, в частности, в известном методе Барбера-Йеха [6], исходящем из эквивалентной формулировки проблемы светорассеяния на частице произвольной формы в виде векторного интегрального уравнения, задача сводится к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений с бесконечным числом неизвестных, коэффициентами которой являются трудно-вычисляемые интегралы от сферических функций с весами по сложной поверхности рассеивателя. Все требуемые интегрирования в методе ВФМР производятся аналитически по полному телесному углу, т. е. по единичной сфере, причем интегралов на каждую следующую поправку всего четыре. Единственной слабостью метода ВФМР является его применимость лишь к умеренно несферическим частицам, но в отличие от метода Асано – Ямомото [7] не только к сфероидам.

Однако решающим для необходимости продолжения разработки метода ВФМР является то обстоятельство, что светорассеивающие частицы в природе в большинстве своем достаточно компактные образования с небольшой степенью несферичности, а также то, что современные возможности оптических измерений таковы, что попытка их интерпретации в рамках теории Ми явно не достаточна. И здесь представляется нецелесообразным применять для уме-

ренно несферических частиц метод более громоздкий, чем ВФРМ, который по своей сути и представляет последовательное движение от теории Ми в направлении усложнения.

## 2. Метод расчета

В данной статье рассматриваются рассеиватели, поверхность которых может быть получена из сферы путем возмущения по малому параметру  $\varepsilon$  в виде соотношения:

$$r = a(1 + \varepsilon f(\theta, \varphi, \theta_0, \varphi_0, \psi_0)), \quad (1)$$

где  $a$  – радиус невозмущенной сферы;  $f(\theta, \varphi, \theta_0, \varphi_0, \psi_0)$  – функция, задающая форму и ориентацию возмущений;  $\theta_0, \varphi_0, \psi_0$  – углы Эйлера;  $r, \theta, \varphi$  – сферические координаты. Отметим, что (1) выгодно отличается от Эрмита-представления формы рассеивателя [4] тем, что позволяет рассматривать всевозможные ориентации частиц относительно падающего излучения.

Аналитическая реализация метода ВФРМ предполагает, как и теория Ми, решение краевой задачи, в которой необходимо найти комплексное векторное поле  $\mathbf{E}^s$  во внешней области по отношению к замкнутой поверхности  $S$ , удовлетворяющее векторному уравнению Гельмгольца

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = k_1^2 \mathbf{E}, \quad (2)$$

и векторное поле  $\mathbf{E}^2$  во внутренней области, удовлетворяющее уравнению

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = k_2^2 \mathbf{E}, \quad (3)$$

такие, что для заданного во внешней области комплексного векторного поля  $\mathbf{E}^i$  выполняются граничные условия

$$(\mathbf{E}^i + \mathbf{E}^s - \mathbf{E}^2) \times \mathbf{N} = 0; \quad (4)$$

$$(\mathbf{H}^i + \mathbf{H}^s - \mathbf{H}^2) \times \mathbf{N} = 0 \quad (5)$$

на поверхности  $S$ , где  $\mathbf{N}$  – нормаль к  $S$ .

$$\mathbf{N} = r_s / a \mathbf{C}(r - r_s) \Big|_{r=r_s} = (1 + f\varepsilon) \mathbf{e}_r - \boldsymbol{\alpha}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \nabla_{\Omega} f. \quad (6)$$

Магнитные векторные поля выражаются через электрические следующим образом:

$$\mathbf{H}^i = k_1 \nabla \times \mathbf{E}^i / i \omega \mu_1; \quad (7)$$

$$\mathbf{H}^s = k_1 \nabla \times \mathbf{E}^s / i \omega \mu_1; \quad (8)$$

$$\mathbf{H}^2 = k_2 \nabla \times \mathbf{E}^2 / i \omega \mu_2. \quad (9)$$

Кроме комплексных амплитуд падающего поля  $\mathbf{E}^i, \mathbf{H}^i$  с круговой частотой  $\omega$ , комплексных волновых чисел  $k_1, k_2$  соответственно с магнитной проницаемостью  $\mu_1$  в окружающей среде и  $\mu_2$  внутри рассеивателя в данной задаче также используются следующие величины:

$$\chi_1 = k_1 / i \omega \mu_1; \quad \chi_2 = k_2 / i \omega \mu_2; \quad k = k_1 / k_2; \quad \chi = \chi_1 / \chi_2;$$

$$\rho_{10} = k_1 a, \quad \rho_{20} = k_2 a, \quad \rho_1 = k_1 r, \quad \rho_2 = k_2 r.$$

Для решения (2) – (9) и нахождения рассеянного поля  $\mathbf{E}^s, \mathbf{H}^s$  в методе ВФРМ используются, как и в теории Ми, разложение всех полей по векторным сферическим гармоникам и нахождение амплитуд парциальных волн.

$$\mathbf{E}^s = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (a_{nm} \mathbf{M}_{nm}^1 + b_{nm} \mathbf{N}_{nm}^1); \quad (10)$$

$$\mathbf{H}^s = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \chi_1 (a_{nm} \mathbf{N}_{nm}^1 - b_{nm} \mathbf{M}_{nm}^1); \quad (11)$$

$$\mathbf{E}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (c_{nm} \mathbf{M}_{nm}^2 + d_{nm} \mathbf{N}_{nm}^2); \quad (12)$$

$$\mathbf{H}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \chi_2 (c_{nm} \mathbf{N}_{nm}^2 - d_{nm} \mathbf{M}_{nm}^2). \quad (13)$$

Разложение полей производится здесь по векторным сферическим гармоникам вида

$$\mathbf{M}_{nm}^1 = h_n^{(1)}(\rho_1) \mathbf{Y}_{nm}^{(0)}; \quad (14)$$

$$\mathbf{N}_{nm}^1 = \frac{1}{\rho_1} \frac{d}{d\rho_1} [\rho_1 h_n^{(1)}(\rho_1)] \mathbf{Y}_{nm}^{(1)} + \sqrt{n(n+1)} \frac{h_n^{(1)}(\rho_1)}{\rho_1} \mathbf{Y}_{nm}^{(-1)}; \quad (15)$$

$$\mathbf{M}_{nm}^2 = j_n(\rho_2) \mathbf{Y}_{nm}^{(0)}; \quad (16)$$

$$\mathbf{N}_{nm}^2 = \frac{1}{\rho_2} \frac{d}{d\rho_2} [\rho_2 j_n(\rho_2)] \mathbf{Y}_{nm}^{(1)} + \sqrt{n(n+1)} \frac{j_n(\rho_2)}{\rho_2} \mathbf{Y}_{nm}^{(-1)}. \quad (17)$$

Выражения для векторных сферических функций определяются известными соотношениями [5]:

$$\mathbf{Y}_{nm}^{(0)} = \frac{i}{\sqrt{n(n+1)}} \left( i \frac{m}{\sin \theta} Y_{nm} \mathbf{e}_\theta - \frac{dY_{nm}}{d\theta} \mathbf{e}_\varphi \right); \quad (18)$$

$$\mathbf{Y}_{nm}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \left( \frac{dY_{nm}}{d\theta} \mathbf{e}_\theta + i \frac{m}{\sin \theta} Y_{nm} \mathbf{e}_\varphi \right); \quad (19)$$

$$\mathbf{Y}_{nm}^{(-1)} = Y_{nm} \mathbf{e}_r, \quad (20)$$

где

$$Y_{nm} = e^{im\varphi} P_n^m(\cos \theta) \sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{4\pi(n+m)!}}; \quad (21)$$

$j_n(\rho)$ ,  $h_n^{(1)}(\rho)$  – соответственно функции Бесселя и Ханкеля (первого рода);  $P_n^m(\cos \theta)$  – присоединенные полиномы Лежандра.

Собственно метод ВФРМ предполагает прежде всего представление поверхности  $S$ , определяемое уравнением (1) в сферических координатах и разложением всех физических величин, определяющих граничные условия, в степенные ряды по параметру возмущений  $\varepsilon$ .

$$a_{nm} = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_{nm}^p \varepsilon^p, \quad b_{nm} = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n b_{nm}^p \varepsilon^p; \quad (22)$$

$$c_{nm} = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n c_{nm}^p \varepsilon^p, \quad d_{nm} = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n d_{nm}^p \varepsilon^p. \quad (23)$$

Решение краевой задачи, таким образом, сводится к нахождению коэффициентов разложения четырех парциальных амплитуд  $a_{nm}^p$ ,  $b_{nm}^p$ ,  $c_{nm}^p$ ,  $d_{nm}^p$ .

Поскольку коэффициенты при нулевой степени  $\varepsilon$  суть коэффициенты из решения Ми, то остальные члены разложения в ряд являются поправками к коэффициентам Ми соответствующего порядка. Знание их позволяет найти характеристики рассеянного поля. Они могут быть найдены при подстановке разложений в граничные условия. Сами дифференциальные уравнения при данном выводе не фигурируют благодаря тому, что им удовлетворяют сферические функции.

Отделяя в каждой из бесконечной последовательности пар итоговых граничных условий (после приравнивания нулю выражений при степенях  $\varepsilon$ ) члены с коэффициентами возмущения старшего порядка и интегрируя с использованием ортогональности сферических функций эти равенства, получаем две линейные алгебраические системы, решение которых дает рекуррентные соотношения для поправок к коэффициентам Ми:

$$a_{nm}^p = \frac{1}{\Delta_1} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi (\alpha_n^0 \mathbf{T}_p \mathbf{Y}_{nm}^{(1)*} - \alpha_n^1 \mathbf{S}_p \mathbf{Y}_{nm}^{(0)*}) \sin \theta d\theta; \quad (24)$$

$$b_{nm}^p = \frac{1}{\Delta_2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi (\alpha_n^1 \mathbf{T}_p \mathbf{Y}_{nm}^{(0)*} + \alpha_n^0 \mathbf{S}_p \mathbf{Y}_{nm}^{(1)*}) \sin \theta d\theta; \quad (25)$$

$$c_{nm}^p = \frac{1}{k \Delta_1} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi (\beta_n^0 \mathbf{T}_p \mathbf{Y}_{nm}^{(1)*} - \chi \beta_n^1 \mathbf{S}_p \mathbf{Y}_{nm}^{(0)*}) \sin \theta d\theta; \quad (26)$$

$$d_{nm}^p = \frac{1}{k \Delta_2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi (\beta_n^1 \mathbf{T}_p \mathbf{Y}_{nm}^{(0)*} + \chi \beta_n^0 \mathbf{S}_p \mathbf{Y}_{nm}^{(1)*}) \sin \theta d\theta. \quad (27)$$

На рассеиватель падает плоское циркулярно поляризованное излучение с правой или левой круговой поляризацией. Тогда электрическое и магнитное поля падающего света можно разложить в ряд по векторным сферическим гармоникам [8] (множитель  $\exp(-i\omega t)$  опускается на протяжении всей статьи):

$$\mathbf{E}_\pm^i = E_0 \sum_{n=0}^{\infty} i^n \sqrt{4\pi(2n+1)} (\mathbf{M}_{n\pm 1} \pm \mathbf{N}_{n\pm 1}); \quad (28)$$

$$\mathbf{H}_\pm^i = \chi_1 E_0 \sum_{n=0}^{\infty} i^n \sqrt{4\pi(2n+1)} (\mathbf{N}_{n\pm 1} \mp \mathbf{M}_{n\pm 1}), \quad (29)$$

где (+) соответствует правой круговой поляризации; (–) – левой.

Выражения для операторов  $\mathbf{T}_p$  и  $\mathbf{S}_p$  в этом случае имеют вид

$$\mathbf{S}_p = \sum_n^m \sum_{q=1}^p [F_q (Q_{0nm}^q \mathbf{Y}_{nm}^{(0)} + Q_{1nm}^q \mathbf{Y}_{nm}^{(1)}) + \alpha_q Q_{nm}^q Y_{nm}]; \quad (30)$$

$$\mathbf{T}_p = \sum_n^m \sum_{q=1}^p [F_q (R_{0nm}^q \mathbf{Y}_{nm}^{(0)} + R_{1nm}^q \mathbf{Y}_{nm}^{(1)}) + \alpha_q R_{nm}^q Y_{nm}], \quad (31)$$

где

$$F_q = f^q / q!; \quad \alpha_q = \nabla_\Omega F^q = \alpha f^{q-1} / (q-1)!; \quad \alpha = \nabla_\Omega f;$$

$$Q_{0nm}^q = k c_{nm}^{p-q} \alpha_n^q \rho_{20}^q - a_{nm}^{p-q} \beta_n^q \rho_{10}^q;$$

$$Q_{1nm}^q = k d_{nm}^{p-q} \alpha_n^{q+1} \rho_{20}^q - b_{nm}^{p-q} \beta_n^{q+1} \rho_{10}^q;$$

$$Q_{nm}^q = \rho_{10} (d_{nm}^{p-q} \sigma_n^{q-1} \rho_{20}^{q-1} - b_{nm}^{p-q} \eta_n^{q-1} \rho_{10}^{q-1}) \sqrt{n(n+1)};$$

$$R_{0nm}^q = -k d_{nm}^{p-q} \alpha_n^q \rho_{20}^q + \chi b_{nm}^{p-q} \beta_n^q \rho_{10}^q;$$

$$\begin{aligned}
R_{1nm}^q &= k c_{nm}^{p-q} \alpha_n^{q+1} \rho_{20}^q - \chi a_{nm}^{p-q} \beta_n^{q+1} \rho_{10}^q; \\
R_{nm}^q &= \rho_{10} (c_{nm}^{p-q} \sigma_n^{q-1} \rho_{20}^{q-1} - \chi a_{nm}^{p-q} \eta_n^{q-1} \rho_{10}^{q-1}) \sqrt{n(n+1)} \quad \text{при } q = 1, 2, \dots, p-1; \\
Q_{0n\pm 1}^p &= k c_{n\pm 1}^0 \alpha_n^p \rho_{20}^p - a_{n\pm 1}^0 \beta_n^p \rho_{10}^p - G_n \gamma_n^p \rho_{10}^p; \\
Q_{1n\pm 1}^p &= k a_{n\pm 1}^0 \alpha_n^{p+1} \rho_{20}^p - b_{n\pm 1}^0 \beta_n^{p+1} \rho_{10}^p \mp G_n \gamma_n^{p+1} \rho_{10}^p; \\
Q_{n\pm 1}^p &= \rho_{10} (a_{n\pm 1}^0 \sigma_n^{p-1} \rho_{20}^{p-1} - b_{n\pm 1}^0 \eta_n^{p-1} \rho_{10}^{p-1}) \mp G_n \lambda_n^{p+1} \rho_{10}^p \sqrt{n(n+1)}; \\
R_{0n\pm 1}^p &= -k a_{n\pm 1}^0 \alpha_n^p \rho_{20}^p + \chi b_{n\pm 1}^0 \beta_n^p \rho_{10}^p \pm \chi G_n \gamma_n^p \rho_{10}^p; \\
R_{1n\pm 1}^p &= k c_{n\pm 1}^0 \alpha_n^{p+1} \rho_{20}^p - \chi a_{n\pm 1}^0 \beta_n^{p+1} \rho_{10}^p - \chi G_n \gamma_n^{p+1} \rho_{10}^p; \\
R_{n\pm 1}^p &= \rho_{10} (c_{n\pm 1}^0 \sigma_n^{p-1} \rho_{20}^{p-1} - \chi a_{n\pm 1}^0 \eta_n^{p-1} \rho_{10}^{p-1} - \chi G_n \lambda_n^{p+1} \rho_{10}^p) \sqrt{n(n+1)}; \\
G_n &= \sqrt{4\pi(2n+1)} i^n,
\end{aligned}$$

где

$$\alpha_n^p = \frac{d^p}{d\rho_2^p} [\rho_2 j_n(\rho_2)]_{\rho_2=\rho_{20}}; \quad \beta_n^p = \frac{d^p}{d\rho_1^p} [\rho_1 h_n^{(1)}(\rho_1)]_{\rho_1=\rho_{10}}; \quad (32)$$

$$\sigma_n^p = \frac{d^p}{d\rho_2^p} \left[ \frac{j_n(\rho_2)}{\rho_2} \right]_{\rho_2=\rho_{20}}; \quad \eta_n^p = \frac{d^p}{d\rho_1^p} \left[ \frac{h_n^{(1)}(\rho_1)}{\rho_1} \right]_{\rho_1=\rho_{10}}; \quad (33)$$

$$\gamma_n^p = \frac{d^p}{d\rho_1^p} [\rho_1 j_n(\rho_1)]_{\rho_1=\rho_{10}}; \quad \lambda_n^p = \frac{d^p}{d\rho_1^p} \left[ \frac{j_n(\rho_1)}{\rho_1} \right]_{\rho_1=\rho_{10}}; \quad (34)$$

$$\Delta_1 = (\chi \alpha_n^0 \beta_n^1 - \alpha_n^1 \beta_n^0); \quad \Delta_2 = (\alpha_n^0 \beta_n^1 - \chi \alpha_n^1 \beta_n^0); \quad (35)$$

Таким образом, из выражений (24) – (31) следует, что вычисление поправок к коэффициентам Ми сводится к вычислению интегралов вида

$$I_1 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \Phi(\theta, \varphi) \mathbf{Y}_{nm}^{(0)} \mathbf{Y}_{n'm'}^{(0)*} \sin \theta d\theta; \quad (36)$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \Phi(\theta, \varphi) \mathbf{Y}_{nm}^{(1)} \mathbf{Y}_{n'm'}^{(0)*} \sin \theta d\theta. \quad (37)$$

Действительно, другие типы интегралов теряют свою самостоятельность, поскольку имеют место тождества

$$\mathbf{Y}_{nm}^{(0)} \mathbf{Y}_{n'm'}^{(0)*} = \mathbf{Y}_{nm}^{(1)} \mathbf{Y}_{n'm'}^{(1)*}, \quad \mathbf{Y}_{nm}^{(1)} \mathbf{Y}_{n'm'}^{(0)*} = \mathbf{Y}_{nm}^{(0)} \mathbf{Y}_{n'm'}^{(1)*}. \quad (38)$$

Для вычисления  $I_1$  и  $I_2$  необходимо провести еще одно разложение

$$\Phi(\theta, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k \Phi_{kl}(\theta, \varphi) Y_{kl}(\theta, \varphi). \quad (39)$$

В самом деле, интегральные соотношения ортогональности и другие соотношения из [5] дают в таком случае

$$I_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k \Phi_{kl} \frac{(2n+1)(2n'+1)}{\sqrt{4\pi(2k+1)}} (-1)^{k+l+n'+m'+n+1} C_{n'0n0}^{k0} C_{n'-m'n m}^{k-l} \begin{Bmatrix} k & n' & n \\ 1 & n & n' \end{Bmatrix}; \quad (40)$$

$$I_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k \Phi_{kl} C_{n'-m'nm}^{k-l} (-1)^{k+l+n'+m'+n+1} \left( \sqrt{(n'+1)(2n'+1)} C_{(n'-1)0n0}^{k0} \begin{Bmatrix} k & (n'-1) & n \\ 1 & n & n' \end{Bmatrix} + \right. \\ \left. + \sqrt{n'(2n'+3)} C_{(n'+1)0n0}^{k0} \begin{Bmatrix} k & (n'+1) & n \\ 1 & n & n' \end{Bmatrix} \right), \quad (41)$$

где  $C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{j m}$  – коэффициенты Клебша–Гордана;  $\begin{Bmatrix} j & j_1 & j_2 \\ m & m_1 & m_2 \end{Bmatrix}$  –  $6j$  – символы Вигнера.

Все интегралы при этом вычисляются регулярным образом, и расчет оптических характеристик светорассеяния производится посредством вычисления амплитудных функций рассеянного поля.

В заключение данного раздела приведем рекуррентные формулы для функций  $\alpha_n^q$ ,  $\beta_n^q$ ,  $\sigma_n^q$ ,  $\eta_n^q$ ,  $\gamma_n^q$ ,  $\lambda_n^q$ :

$$\alpha_n^q = q j_n^{(q-1)}(\rho_{20}) + \rho_{20} j_n^{(q)}(\rho_{20}), \quad \sigma_n^q = \frac{1}{\rho_{20}} (j_n^{(q)}(\rho_{20}) - q \sigma_n^{q-1}); \quad (42)$$

$$\beta_n^q = q h_n^{(q-1)}(\rho_{10}) + \rho_{10} h_n^{(q)}(\rho_{10}), \quad \eta_n^q = \frac{1}{\rho_{10}} (h_n^{(q)}(\rho_{10}) - q \eta_n^{q-1}); \quad (43)$$

$$\gamma_n^q = q j_n^{(q-1)}(\rho_{10}) + \rho_{10} j_n^{(q)}(\rho_{10}), \quad \lambda_n^q = \frac{1}{\rho_{10}} (j_n^{(q)}(\rho_{10}) - q \lambda_n^{q-1}). \quad (44)$$

Рекуррентные формулы для функций Бесселя и Ханкеля и производных  $q$ -го порядка от них можно найти в [9].

### 3. Рассчитанные результаты

Сходимость метода ВФРМ иллюстрируется расчетными данными, приведенными в таблицах.

В табл. 1 представлены данные расчетов при возмущении сферической частицы дифракционного радиуса  $\rho = 3$  до сферы с  $\rho = 3,45$  и показателем преломления  $m = 1,212 + i 0,601$ . В табл. 2 – для  $\rho = 8 \rightarrow 8,4$  и  $m = 1,212 + i 0,0601$ .

Таблица 1

$N$	$K_{\text{ext}}$	$I(\theta=0^\circ)$	$K_{\text{sca}}$	$I(\theta=180^\circ)$
0	1,0841	0,865990	0,9652	0,002215
1	1,2383	1,019322	1,2345	0,001413
2	1,3129	1,091631	1,2085	0,004078
3	1,3138	1,110172	1,1696	0,002552
4	1,3101	1,113392	1,1687	0,001824
5	1,3112	1,112781	1,1779	0,001812
6	1,3124	1,112167	1,1772	0,001981
7	1,3121	1,112218	1,1732	0,001973
8	1,3119	1,112291	1,1735	0,001964
9	1,3119	1,112280	1,1749	0,001966
10	1,3120	1,112269	1,1748	0,001968
0	1,3120	1,112278	1,1745	0,001967

Таблица 2

$N$	$K_{\text{ext}}$	$I(\theta=0^\circ)$	$K_{\text{sca}}$	$I(\theta=180^\circ)$
0	2,7672	5,586794	1,8439	0,000386
1	2,7939	5,989660	1,9033	0,001316
2	2,7964	6,143039	1,8578	0,000887
3	2,7985	6,163910	1,8544	0,000618
4	2,7989	6,160829	1,8554	0,000652
5	2,7979	6,158985	1,8547	0,000671
6	2,7978	6,159033	1,8546	0,000669
7	2,7980	6,159237	1,8548	0,000671
8	2,7980	6,159276	1,8548	0,000671
0	2,7980	6,159270	1,8547	0,000670

В первой и последней строках таблиц указаны оптические характеристики, рассчитанные по теории Ми соответственно для сфер с начальными и конечными радиусами. Тестирование алгоритма на сходимость проводилось на примере возмущения сферы  $r = a$  в сферу  $r = a(1 + \varepsilon)$ . Номер строки в таблицах соответствует порядку возмущения. Во второй колонке даны значения фактора ослабления, в третьей – нормированное значение индикатрисы рассеяния в направлении вперед, в четвертой – фактора рассеяния, в пятой – нормированное значение индикатрисы рассеяния назад.

Как видно из таблиц, при заданных значениях исходных параметров сходимость численных оценок достигается при учете поправок вплоть до восьмого и десятого порядков. Однако при других исходных данных могут потребоваться еще более высокие порядки, особенно при возмущениях в несферическую форму.

Для иллюстрации влияния формы частиц на светорассеивающие свойства приведем результаты модельных оценок по методу ВФРМ для сфероида с учетом двух поправок.

Представление трехосного эллипсоида с полуосями  $a/(1-u\varepsilon)$ ;  $a/(1-v\varepsilon)$ ;  $a/(1-w\varepsilon)$  в виде ряда по сферическим функциям имеет вид

$$f = u\xi^2 + v\eta^2 + w\xi^2; \quad (45)$$

$$\xi = \sqrt{2\pi/3} (\exp(-i\psi_0) (i \sin \varphi_0 - \cos \theta_0 \cos \varphi_0) Y_{11} + \exp(i\psi_0) (i \sin \varphi_0 + \cos \theta_0 \cos \varphi_0) Y_{1-1} - \sqrt{2} \sin \theta_0 \cos \varphi_0 Y_{10}); \quad (46)$$

$$\eta = \sqrt{2\pi/3} (\exp(-i\psi_0) (i \cos \varphi_0 + \cos \theta_0 \sin \varphi_0) Y_{11} + \exp(i\psi_0) (i \cos \varphi_0 + \cos \theta_0 \sin \varphi_0) Y_{1-1} + \sqrt{2} \sin \theta_0 \sin \varphi_0 Y_{10}); \quad (47)$$

$$\xi = \sqrt{2\pi/3} (-\exp(-i\psi_0) \sin \theta_0 Y_{11} + \exp(i\psi_0) \sin \theta_0 Y_{1-1} + \sqrt{2} \cos \theta_0 Y_{10}). \quad (48)$$

Коэффициенты разложения в ряд по сферическим функциям для  $f^k$ ,  $k=1, 2, \dots, p$  находятся программным способом, исходя из разложений (46) – (48) по алгоритму типа свертки.

На рис. 1 представлены угловые зависимости для приведенных значений четырех элементов матрицы рассеяния для угла рассеяния  $\theta$  (в плоскости  $\varphi = 0$ ), характеризующих поляризационные свойства рассеянного света для сфероида (как простейшей всюду выпуклой формы). Для инвертированного сфероида как простейшей формы с областью вогнутости (гантелеобразное тело) аналогичные данные представлены на рис. 2.

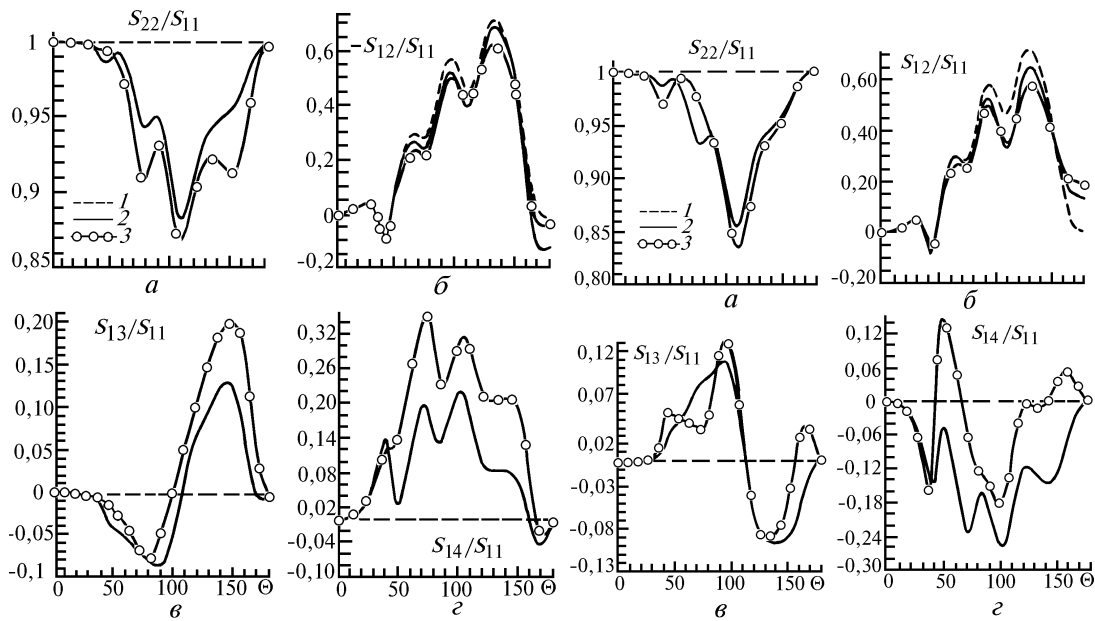


Рис. 1. Угловые зависимости приведенных значений элементов матрицы рассеяния для сфероида, рассчитанные по методу возмущений с учетом различного числа поправок

Рис. 2. То же, что и на рис. 1, для инвертированного сфероида

В обоих случаях рассеивающая частица взята ориентированной к падающему излучению при углах Эйлера  $\theta_0 = \pi/4$ ,  $\varphi_0 = 0$ ,  $\psi_0 = 0$ ; дифракционный радиус невозмущенной сферы  $\rho = 5$ , показатель преломления  $m = 1,212 + i 0,0601$ ,  $\varepsilon = 0,01$ ; степень возмущения вдоль полуосей

определяются величинами:  $u\varepsilon$ ,  $v\varepsilon$ ,  $w\varepsilon$ , где  $u = v = -4,6544$ ;  $w = 10$ ; плоская падающая световая волна линейно поляризована вдоль оси  $x$ . Кривые 1 относятся к угловым функциям светорассеяния для невозмущенной сферы; 2 – к расчетным данным, учитывающим лишь первый порядок возмущения; 3 – с учетом поправки второго порядка возмущения.

Как видно из рис. 1,  $v$ ,  $z$  и рис. 2,  $v$ ,  $z$  элементы  $S_{13}$  и  $S_{14}$  в случае сферы всюду по  $\theta$  нулевые и при отклонении от нулевого значения характеризуют степень отклонения от сферы, т.е. несферичность частиц и при возмущении с разным знаком существенно различны по угловой зависимости. Следует также отметить, что для инвертированного сфероида (т.е. имеющего область вогнутости на поверхности) степень деполаризации при малых углах рассеяния более существенна, чем в случае вытянутого сфероида. К этому также следует добавить, что угловые зависимости, рассчитанные для первой и второй поправок, в случае инвертированного сфероида качественно более существенно различаются между собой, чем в случае вытянутого сфероида со всюду выпуклой поверхностью (рис. 2,  $v$ ,  $z$ ).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 94 - 05-16463 а).

1. Yeh C. // Phys. Rev. 1964. V. 135. P. 1193.
2. Erma V. A. // Phys. Rev. 1968. V. 173. P. 1243.
3. Erma V. A. // Phys. Rev. 1968. V. 176. P. 1544.
4. Erma V. A. // Phys. Rev. 1969. V. 179. P. 1238.
5. Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К. Квантовая теория углового момента. Л.:Наука, 1975. 340 с.
6. Barber P., Yeh C. // Appl. Opt. 1975. V. 14. N 12. P. 2864–2872.
7. Asano S., Yamamoto G. // App. Opt. 1975. V. 14. N 1. P. 29–49.
8. Джексон Д. Классическая электродинамика. М.:Мир, 1971. 792 с.
9. Абрамовиц М., Стиган И.А. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 830 с.

Институт оптики атмосферы СО РАН,  
Томск

Поступила в редакцию  
12 октября 1994 г.

**D.N. Romashov, V.A. Jachmenev, R.F. Rakhimov. Calculation Formulae for the Method of Perturbation of Mie Scatterer Shape in the Basis of Vector Spherical Harmonics of Quantum Theory of Angular Moment.**

Numerical realization is presented of the perturbation method of Mie scatterer shape at arbitrarily oriented perturbation of a sphere. A conversion is performed from the basis of vector spherical harmonics with real dependence on azimuth angle  $\varphi$  conventional in the light scattering theory to the basis with complex dependence on the angle  $\varphi$ . The convergence of the method is studied as dependent on quantity of corrections to be considered. The computed values of the scattering phase matrix elements are presented for the cases of elongated and inversed spheroids.