

В.Ф. Терзи, Ф.С. Якупова, Л.В. Курт

КОЛИЧЕСТВЕННАЯ ТЕОРИЯ РАДУГИ

По формулам теории Ми выполнены точные расчеты двух первых элементов матрицы рассеяния света на монодисперсной однородной водной частице с радиусом 0,5 мм и на полидисперсной системе сферических частиц — модели облака С.6 Дейрменджана. Расчеты выполнены для фиолетового, синего, голубого, зеленого, желто-зеленого, оранжевого, красного и пурпурного цветов видимого излучения. Приведены спектральные распределения индикатрис рассеяния в области основной (углы рассеяния 136–142°) и вторичной (124–130°) радуг.

Теория рассеяния света однородными сферическими частицами хорошо изучена и используется при решении многих прикладных задач оптики атмосферы [1–3]. Используемые при этом алгоритмы расчета (например, [2, 4]) становятся неустойчивыми для больших частиц из-за накопления ошибок округления при расчете амплитудных функций по восходящим рекуррентным соотношениям [4].

Для количественного описания оптических явлений, возникающих на больших частицах, таких как радуга [5], gloria [6], венцы и т.д., необходимо использовать устойчивые алгоритмы [7]. В настоящее время в доступной литературе отсутствуют точные расчетные данные оптических характеристик (ОХ) больших сферических частиц, например, в работе [8] приведены только времена счета элементов матрицы рассеяния частицами с $x \leq 5000$ ($x = 2\pi r/\lambda = kr$, r — радиус частицы, λ — длина волны излучения, k — волновое число).

Построенная авторами работ [5, 9] теория радуги основана на расчетных данных ОХ для частиц с $x \leq 1500$ и показателя преломления $m = 1,33$, что соответствует одной длине волны $\lambda = 0,550$ мкм. В этом случае не учитываются спектральные изменения показателя преломления воды и безразмерного параметра x , хотя именно этой зависимостью определяется столь красочное распределение цветов в радуге. В таблице приведены значения комплексного показателя преломления воды $m = n - ik$ и параметра x для частицы с радиусом $r = 0,5$ мм для основных длин волн видимого излучения, которые использованы нами при расчете спектральной яркости радуги. Радиус частиц взят равным 0,5 мм, т.к. на меньших частицах не удается наблюдать столь яркое сочетание цветов в обеих радугах.

Т а б л и ц а

Характеристики водной капли и основные параметры первичной и вторичной радуг для $r = 0,5$ мм

№ п/п	Цвет	λ , мкм	n	k	x	Q_1	P_1	Q_2	P_2	Q'_1	Q'_2	θ
1	Фиолетовый	0,375	1,341	$3,5 \cdot 10^{-9}$	8377,6	139,1	0,903	127,1	0,444	139,4	127,6	2,0035
2	Синий	0,400	1,339	$1,86 \cdot 10^{-9}$	7854,0	138,8	0,975	127,5	0,977	139,1	127,4	2,0042
3	Голубой	0,450	1,337	$1,02 \cdot 10^{-9}$	6981,3	138,6	0,860	128,1	0,923	138,8	127,6	2,0053
4	Зелёный	0,500	1,335	$1,0 \cdot 10^{-9}$	6283,2	138,3	0,928	128,5	0,566	138,5	128,2	2,0062
5	Жёлто-зелёный	0,550	1,333	$1,96 \cdot 10^{-9}$	5712,0	138,2	0,960	129,1	0,935	138,2	128,5	2,0061
6	Оранжевый	0,627	1,332	$1,39 \cdot 10^{-8}$	5026,5	137,9	0,865	129,3	0,901	138,1	128,8	2,0055
7	Красный	0,700	1,331	$3,35 \cdot 10^{-8}$	4488,0	137,8	0,900	129,5	0,806	138,0	129,1	2,0078
8	Пурпурный	0,800	1,339	$1,25 \cdot 10^{-7}$	3927,0	137,6	0,940	0,796	0,796	137,6	129,6	2,0060

Примечание. Углы Q'_1 и Q'_2 соответствуют максимуму степени поляризации рассеянного света по результатам точных расчетов для основной и вторичной радуг; θ — фактор ослабления

Методика расчета. При вычислении комплексных амплитуд нами использовались как восходящие [4], так и нисходящие рекуррентные соотношения [7, 12], последние дают устойчивое решение для любых размеров частиц. Количество членов суммирования N [4, 7] зависит от параметра x . На основе многочисленных расчетов нами определен вид этой зависимости

$$N = x + 5x^{1/3} + 2, \quad N = mx + 300, \quad \text{Real}(m) > 1. \quad (1)$$

Первое выражение используется для $x < 300$, когда расчеты ведутся по алгоритму [2], а второе для $x > 300$ — по алгоритму [7]. Во избежание переполнения и потери точности используется кусочно-

прерывное (сброс порядка величины) представление функций Рикатти-Бесселя [4]. Расчеты выполнены на ЭВМ ЕС-1033, время счета для $x = 5000$ и 182 углов рассеяния составляет 35 мин.

Результаты расчета. Сравнение результатов расчетов первых двух элементов матрицы рассеяния в области основной радуги для $x = 1500$ и $m = 1,33$ представлено на рис. 1. Видно, что приближенный метод, основанный на принципе Гюйгенса, хорошо описывает поведение обоих элементов матрицы рассеяния. К сожалению, этот метод, изложенный в [9], применим только в области основной радуги и не описывает более тонкие интерференционные эффекты, которые приводят к возникновению цветных (обычно розовых и зеленых) полос (дополнительных дуг) на внутренней стороне основной радуги. Приводимые в [5] данные (кривая 3 на рис. 1) точного решения относятся к составляющей, которая не вносит существенного вклада в яркость радуги. Для наглядности наши данные смещены вниз на величину фактора ослабления Θ , равного 2,06. Несмотря на отсутствие точных данных по спектральной яркости радуги, угловое распределение цветов в ней было определено более 100 лет назад на основе геометрической оптики.

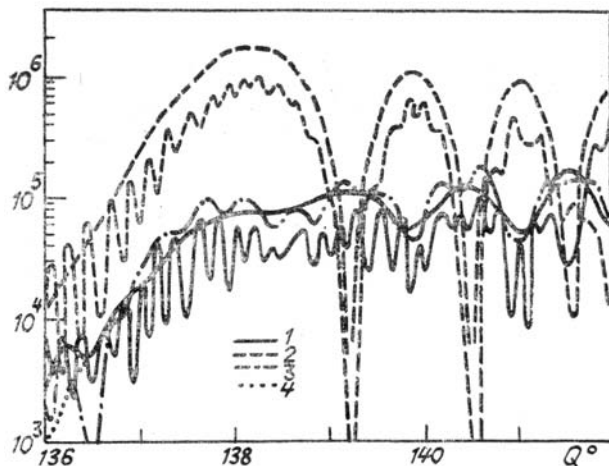


Рис. 1. Два первых элемента матрицы рассеяния в области основной радуги: параллельные (1, 3) и перпендикулярные (2) составляющие (для $x = 1500$, $m = 1,33$). Гладкие кривые 1 и 2 получены приближенным методом на основе принципа Гюйгенса [9], осциллирующие кривые 3 и 4 — наши данные, вычисленные по точным формулам теории Ми; 3 и 4 — данные [5], полученные по точным формулам теории Ми (3) и приближенным методом теории комплексных угловых моментов

Возникновение радуг геометрическая оптика объясняет наличием экстремальных углов выхода лучей из сферической частицы после p внутренних отражений [10]. В частности, для основной радуги $p = 2$, а для вторичной радуги $p = 3$.

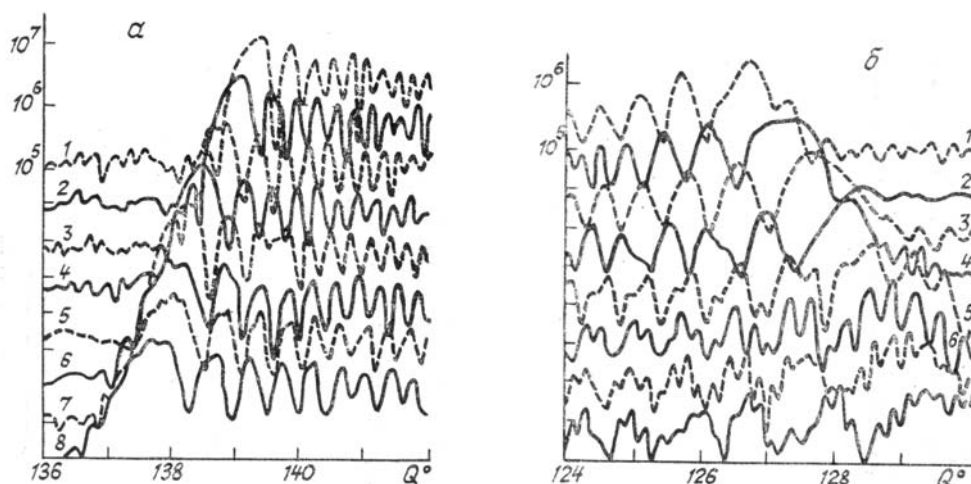


Рис. 2. Индикатрисы рассеяния в области основной (а) и вторичной (б) радуг для различных длин волн видимого излучения (номера на кривых соответствуют нумерации в таблице). Масштаб на оси ординат приведен для верхней кривой, остальные кривые для наглядности сдвинуты последовательно вниз на указанную по оси ординат отметку. Шаг дискретизации равен $0,1^\circ$

На основе простых геометрических соображений можно найти угол рассеяния для этих лучей [10]

$$Q_{p-1} = q(2\tau - 2p\tau') + 2\pi c, \quad (2)$$

где угол «входа» луча в частицу τ и угол преломления τ' принимает экстремальные значения при

$$\tau = \arcsin \sqrt{\frac{m^2 - 1}{p^2 - 1}}, \quad \tau' = \arccos \left(\frac{1}{m} \cos \tau \right). \quad (3)$$

Для основной радуги $p = 2$, $c = 0$, $q = -1$, для вторичной радуги $p = 3$, $c = 1$, $q = -1$. Отметим, что в [10] в обоих этих случаях дается ошибочное значение знака для величины q .

Как видно из (2), (3), положение Q_{p-1} зависит от постоянного преломления m и параметра p . Поэтому происходит угловое разделение различных цветов (см. таблицу). Причем наблюдается обратное сочетание цветов для основной Q_1 и вторичной Q_2 радуг. Объяснение этого явления также можно получить в рамках геометрической оптики [10].

На рис. 2 приведены точные расчеты индикатрисы рассеяния $((M_2 + M_1)/2)$ в области основной (а) и вторичной (б) радуг. На этих рисунках видны все тонкие эффекты, которые удается наблюдать в природе [5]. Между радугами видна темная александрова полоса, с внутренней стороны основной радуги и внешней стороны вторичной радуги наблюдаются тонкие полосы (особенно зеленая и пурпурно-розовая; Как видно из этих рисунков, Q'_1 и Q'_2 , дающие максимальный вклад в индикатрису рассеяния, для каждой длины волны λ несколько смещены по отношению к углам Q_1 и Q_2 , что связано с тем, что углы Q_1 и Q_2 соответствуют экстремальным значениям углов для $p = 2$ и 3 (см. таблицу).

В таблице приведены также значения степени линейной поляризации рассеянного излучения

$$P = \frac{M_2 - M_1}{M_2 + M_1} \quad (4)$$

для углов Q_1 и Q_2 соответственно. Видно, что рассеянное излучение в области радуги сильно поляризовано. Для Q'_1 и Q'_2 величина P значительно выше.

Максимумы и минимумы индикатрисы за основным пиком радуг связаны с интерференцией лучей, претерпевших одинаковое количество внутренних отражений, но вошедших в частицу под различными углами [10], поэтому их положение сильно зависит от размера частицы. Для полидисперсной системы частиц эти экстремумы накладываются и уничтожаются (рис. 3). Представленные на рис. 3 индикатрисы для различных длин волн вычислены для модели облака, распределение частиц по размерам в которой задается гамма-распределением (модель облака С.6)

$$n(r) = 5 \cdot 10^{-3} r^2 \exp(-0,1 r). \quad (5)$$

Данные на рис. 3 относятся к элементу матрицы рассеяния M_2 , который является преобладающим в области радуги (см. рис. 1).

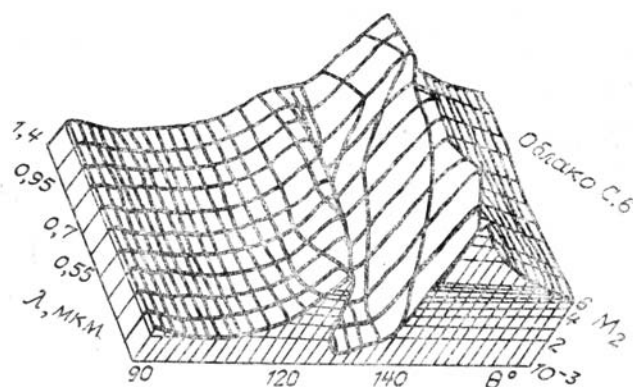


Рис. 3. Диаграмма спектрального распределения индикатрис рассеяния в области основной и вторичной радуг для полидисперсной системы сферических частиц (модель облака С.6)

Наблюдаемые на рис. 1–3 закономерности распределения, спектральных яркостей радуг хорошо объясняются в рамках геометрической оптики, однако количественное описание удастся найти только в рамках теории Ми. Последняя сводится к перемножению десятка тысяч сложных функций, что затрудняет физическое объяснение получаемых при этом данных.

Особенностями рассеяния света в заднюю полусферу на облачных частицах являются возникновения радуги и глорий [6]. В обоих случаях интенсивность рассеянного света является максимальной,

однако их можно отличить по знаку поляризации: в области радуг электрический вектор рассеянного излучения направлен в основном перпендикулярно плоскости рассеяния (положительная поляризация, т.е. $M_2 > M_1$); в области глории (вблизи $Q = 180^\circ$) колебание электрического вектора происходит преимущественно параллельно плоскости рассеяния (отрицательная поляризация, т.е. $M_2 < M_1$) [6]. Таким образом, природа появления ненулевых значений кроссполяризованного компонента в эхосигнале при поляризационном лазерном зондировании облаков [11] может быть определена после экспериментального определения знака степени поляризации (4): в случае многократного рассеяния должна преобладать положительная поляризация ($M_2 > M_1$); в случае однократного рассеяния — отрицательная ($M_1 > M_2$).

1. Зуев В. Е. Распространение видимых и инфракрасных волн в атмосфере. М.: Сов. радио, 1970. 498 с.
2. Зуев В. Е., Креков Г. М. Оптические модели атмосферы. Л.: Гидрометеоздат, 1986. 256 с.
3. Зуев В. Е., Кабанов М. В. Оптика атмосферного аэрозоля. Л.: Гидрометеоздат, 1987. 254 с.
4. Дейрменджан Д. Рассеяние электромагнитного излучения сферическими полидисперсными частицами. М.: Мир, 1971. 290 с.
5. Нуссенцвейг Х. //УФН. 1978. Т. 125. Вып. 3. С. 527–547.
6. Терзи В. Ф., Якупова Ф. С., Конюхов А. Г., Курт Л. В. //Оптика атмосферы. 1988. Т. 1. № 8. С. 51–58.
7. Kattawar G. W., Plass G. N. //Appl. Opt. 1967. V. 6. № 8. P. 1377–1382.
8. Wiscombe W. J. //Appl. Opt. 1980. V. 19. № 9. P. 1505–1509.
9. Mobbs S. D. //J. Opt. Soc. Am. 1979. V. 69. № 8. P. 1089–1092.
10. Ван де Хюлст Г. Рассеяние света малыми частицами. М.: ИЛ, 1961. 536 с.
11. Креков Г. М., Кавкянов С. И., Крекова М. М. Интерпретация сигналов оптического зондирования атмосферы. Новосибирск: Наука, 1987. 185 с.
12. Шифрин К. С., Зельмаиович И. Л. Таблицы по светорассеянию. Л.: Гидрометеоздат, 1968. 470 с.

Поступила в редакцию
14 ноября 1988 г.

V. P. Terzi, F. S. Yakupova, L. V. Kurt. **Quantitative Theory of Rainbow.**

Exact calculations of two first elements of scattering phase matrix for a homogeneous water particle with the radius of 0,5 mm and for a polydisperse ensemble of spherical particles (Deirmendjian's cloud model C.6) using Mie theory formulas are made.

The calculations were made for violet, dark-blue, light-blue, green, Yellow-green, orange, red and purple colours of visible radiation. Spectral distributions of scattering phase functions in the region of primary (the $136^\circ - 142^\circ$ scattering angles) and secondary ($124^\circ - 130^\circ$) rainbows are given.