

К.А. Шаповалов

Рассеяние света цилиндром конечной длины в приближении Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна. 2. Факторы эффективности ослабления и поглощения

Красноярская государственная медицинская академия

Поступила в редакцию 5.12.2006 г.

Получены выражения для расчета факторов эффективности ослабления и поглощения оптически «мягким» ($|m-1| \ll 1$, где $m = n - i\chi$ – относительный показатель преломления цилиндра) круговым цилиндром конечной длины при падении света перпендикулярно оси симметрии цилиндра в приближении Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна (ВКБ). Показано аналитически и численно, что значения фактора эффективности ослабления кругового цилиндра в приближениях ВКБ и аномальной дифракции (АД) полностью совпадают. Отмечено, что в отличие от фактора эффективности ослабления только при условии значительной оптической «мягкости» кругового цилиндра ($|m-1| \rightarrow 0$) выражение для фактора эффективности поглощения кругового цилиндра в приближении ВКБ переходит в таковое для приближения АД.

Изучение рассеяния света несферическими частицами, входящими в состав естественных и искусственных аэрозолей, суспензий биологических частиц, ледяными кристаллами имеет большое практическое значение для мониторинга состояния атмосферы и океана, в коллоидной химии и др. [1, 2].

Для оптически «мягких» ($|m-1| \ll 1$, где $m = n - i\chi$ – относительный показатель преломления частицы) светорассеивающих частиц несферической формы удобно использовать приближения Рэлея–Ганса–Дебая (РГД), аномальной дифракции (АД) [3] и Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна (ВКБ).

В настоящей статье проводится анализ факторов эффективности ослабления и поглощения света конечным круговым цилиндром в приближении Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна для света, падающего перпендикулярно оси симметрии цилиндра.

1. Фактор эффективности ослабления

Используя интегральное представление амплитуды светорассеяния, в приближении ВКБ [4, 5] в скалярном виде имеем

$$f(\beta) = \frac{\rho^2 H(m-1)}{2\pi} \times \int_0^{12\pi} \int_0^{2\pi} \exp \left[i \left(\rho \psi_1(\beta, t, \varphi) + \frac{\Delta}{2} \psi_2(t, \varphi) \right) \right] d\varphi dt, \quad (1)$$

где

$$\psi_1(\beta, t, \varphi) = t(\sin\beta \cos\varphi + [m - \cos\beta] \sin\varphi),$$

$$\psi_2(t, \varphi) = \sqrt{1 - t^2 \cos^2\varphi},$$

a – радиус цилиндра; H – высота цилиндра; $\Delta = 2\rho(m-1)$ – фазовый сдвиг; $\rho = ka$ – дифракцион-

ный параметр цилиндра; $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число; λ – длина волны в дисперсионной среде; β – угол рассеяния, отсчитываемый от направления рассеяния вперед.

Рассмотрим случай непоглощающих цилиндров ($\chi = 0$).

Для направления рассеяния вперед ($\beta = 0^\circ$) при небольших фазовых сдвигах $\Delta < 1$ можно разложить подынтегральное выражение (1) в ряд Тейлора по Δ . В результате после интегрирования получим

$$f(0) = \frac{\rho H}{2\pi} \left[\pi \Delta \left(\frac{1}{2} - \frac{\Delta^2}{16} + \frac{\Delta^4}{384} + O(\Delta^6) \right) + i \Delta^2 \left(\frac{2}{3} - \frac{2\Delta^2}{45} + \frac{2\Delta^4}{1575} + O(\Delta^6) \right) \right]. \quad (2)$$

Для любых фазовых сдвигов

$$f(0) = \frac{\rho H}{2} [J_1(\Delta) + iH_1(\Delta)], \quad (3)$$

где $J_1(x)$ – функция Бесселя 1-го рода; $H_1(x)$ – функция Струве.

Согласно оптической теореме [5] сечение ослабления σ_e , нормированное на площадь S проекции частицы в плоскости, перпендикулярной оси пучка (или фактор эффективности ослабления Q_e), можно записать в виде

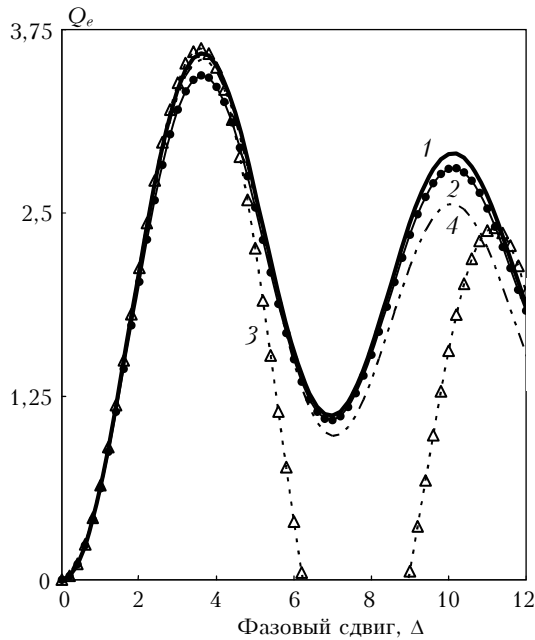
$$Q_e = \frac{\sigma_e}{S} = \frac{4\pi}{kS} \text{Im}(\mathbf{f}(\mathbf{i}, \mathbf{i})) \cdot \mathbf{e}_i, \quad (4)$$

где \mathbf{i} , \mathbf{e}_i – единичные векторы в направлении пространства и поляризации падающей волны соответственно.

Используя площадь $S = 2aH$, амплитуду светорассеяния (3), имеем для непоглощающих цилиндров

$$Q_e = \pi H_1(\Delta). \quad (5)$$

Заметим, что выражение (5) совпадает с таким в приближении АД [6]. На рисунке показаны зависимости значений факторов эффективности ослабления Q_e от фазового сдвига Δ , рассчитанных по формуле (5) и с помощью приближенных выражений ВКБ амплитуд $f^{(1)}(\beta)$ и $f^{(2)}(\beta)$ [4], а также для бесконечно длинного цилиндра (строгое решение) [7] с относительным показателем преломления $m = 1,1$.



Зависимость фактора эффективности ослабления Q_e от фазового сдвига Δ для непоглощающего цилиндра с относительным показателем преломления $m = 1,1$ бесконечно длинного (кривая 1) и с использованием в оптической теории амплитуд рассеяния ВКБ: $f(\beta)$ – кривая 2, $f^{(1)}(\beta)$ – 3, $f^{(2)}(\beta)$ – 4

Заметно, что значения факторов эффективности ослабления Q_e , рассчитанные с использованием приближенных выражений ВКБ амплитуд $f^{(1)}(\beta)$ и $f^{(2)}(\beta)$, начиная с фазового сдвига 4, занижены по сравнению со значениями факторов эффективности ослабления для бесконечно длинного цилиндра (см. рисунок).

Для случая поглощающих цилиндров ($\chi > 0$) выражение для фактора эффективности ослабления Q_e в приближении ВКБ имеет более сложный вид, чем формула (5), хотя аналитически сводится к приближению АД [8]. Численная проверка расчета фактора эффективности ослабления Q_e в приближении ВКБ по формулам (1), (4) для фазовых сдвигов $0 < \Delta < 100$ и $0 < \chi < 1$ подтвердила полное совпадение с приближением АД [3]:

$$Q_e = 2 \left[1 - \int_0^1 \cos(2\rho(n-1)\sqrt{1-t^2}) \times \right.$$

$$\left. \times \exp(-4\rho\chi\sqrt{1-t^2}) dt \right]. \quad (6)$$

При небольших фазовых сдвигах $\Delta < 1$ и $\rho\chi < 1$ получим из (6):

$$Q_e = 2 \left[1 - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Delta^{2k}}{(2k)!} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (2\rho\chi)^j \Gamma\left(\frac{2k+2+j}{2}\right)}{j! \Gamma\left(\frac{2k+1+j}{2} + 1\right)} \right) \right], \quad (7)$$

где $\Gamma(x)$ – гамма-функция Эйлера.

2. Фактор эффективности поглощения

Сечение поглощения σ_a по [5], нормированное на площадь S проекции частицы в плоскости, перпендикулярной оси пучка (или фактор эффективности поглощения Q_a), равно:

$$\frac{\sigma_a}{S} = Q_a = \frac{\int_V k\epsilon_r'' |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2 dV}{S}, \quad (8)$$

где $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ – полное электрическое поле внутри частицы; $\epsilon_r'' = 2n\chi$ – мнимая часть относительной диэлектрической проницаемости частицы.

Если падающая волна имеет вид $\mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_i \exp[iky]$, то в ВКБ-приближении полное электрическое поле внутри цилиндра (см. [4, 5]) можно записать в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{2\mathbf{e}_i \exp\left\{ ik \left[m \left(y + \sqrt{a^2 - x^2} \right) - \sqrt{a^2 - x^2} \right] \right\}}{m+1}. \quad (9)$$

Таким образом, используя (8) и (9), получим выражение для фактора эффективности поглощения в ВКБ-приближении:

$$Q_a^{\text{ВКБ}} = \frac{4n}{(n+1)^2 + \chi^2} \left[\frac{\pi}{2} (I_1(4\rho\chi) - L_1(4\rho\chi)) \right], \quad (10)$$

где $I_1(x) = -iJ_1(ix)$ – модифицированная функция Бесселя 1-го рода; $L_1(x) = -H_1(ix)$ – модифицированная функция Струве.

При малых $\rho\chi \ll 1$ получим из (10), разлагая в ряд:

$$Q_a^{\text{ВКБ}} = \frac{4n}{(n+1)^2 + \chi^2} \times \left[\pi\rho\chi - \frac{16}{3}(\rho\chi)^2 + 2\pi(\rho\chi)^3 - \frac{256}{45}(\rho\chi)^4 + O((\rho\chi)^5) \right]. \quad (11)$$

Отметим, что выражение для фактора эффективности поглощения в приближении АД [3, 6] имеет вид

$$Q_a^{\text{АД}} = 1 - \int_0^1 \exp(-4\rho\chi\sqrt{1-t^2}) dt =$$

$$= \frac{\pi}{2}(I_1(4\rho\chi) - L_1(4\rho\chi)). \quad (12)$$

Для оптически «мягких» цилиндров $4n/[(n+1)^2 + \chi^2] \rightarrow 1$, т.е. выражение для фактора эффективности поглощения (10) в ВКБ-приближении переходит в таковое для приближения АД (12). При $n = 1,3$ и $\chi = 0,1$ значения фактора эффективности поглощения (10) в ВКБ-приближении занижены по сравнению с приближением АД (12) на 2%, а при $n = 1,1$ и $\chi = 0,1$ уже на 0,5%.

Заключение

Получены выражения для расчета факторов эффективности ослабления и поглощения оптически «мягким» круговым цилиндром конечной длины при падении света перпендикулярно оси симметрии цилиндра в приближении ВКБ. Анализируются выражения для факторов эффективности ослабления и поглощения кругового цилиндра в приближении ВКБ и АД.

Отмечены незначительные различия для факторов эффективности поглощения кругового цилиндра в приближениях ВКБ и АД. Выражения для

факторов эффективности ослабления в приближении ВКБ, полученные по оптической теореме, и в приближении АД полностью совпадают.

1. Волковицкий О.А., Павлова Л.Н., Петрушин А.Г. Оптические свойства кристаллических облаков. Л.: Гидрометеониздат, 1984. 200 с.
2. Лопатин В.Н., Сидько Ф.Я. Введение в оптику взвешенных клеток. Новосибирск: Наука, 1988. 240 с.
3. Петрушин А.Г. Рассеяние и ослабление излучения «мягкими» цилиндрами конечной длины // Оптика и спектроскопия. 1983. Т. 54. № 5. С. 882–884.
4. Шаповалов К.А. Рассеяние света цилиндром конечной длины в приближении Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна. 1. Амплитуда светорассеяния // Оптика атмосф. и океана. 2007. Т. 20. № 1. С. 18–20.
5. Исимару А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах: Пер. с англ. М.: Мир, 1981. Т. 1. 280 с.
6. Ван де Хюлст Г. Рассеяние света малыми частицами. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1961. 536 с.
7. Борен К., Хафмен Д. Поглощение и рассеяние света малыми частицами: Пер. с англ. М.: Мир, 1986. 660 с.
8. Лопатин В.Н., Шаповалов К.А. Оценка максимальных значений факторов эффективности светорассеяния в ВКБ-приближении // Оптика и спектроскопия. 1991. Т. 71. Вып. 3. С. 494–497.

K.A. Shapovalov. Light scattering by cylinder of finite length in Wentzel–Kramers–Brillouin approximation. 2. Efficiency factors of extinction and absorption.

The expressions for calculation of the efficiency factors of extinction and absorption by optically «soft» ($|m - 1| \ll 1$, where $m = n - i\chi$ is a relative refractive index of the cylinder) circular cylinder of a finite length for incident light direction perpendicular to the axis of cylinder in Wentzel–Kramers–Brillouin (WKB) approximation are obtained. It is shown analytically and numerically that the values of factor efficiency extinction by circular cylinder in WKB and Anomalous diffraction (AD) approximations fully coincid. It is noted that unlike extinction efficiency factor only under significant optical «softness» of the circular cylinder ($|m - 1| \rightarrow 0$) the expression for efficiency factor of absorption by circular cylinder in WKB approximation passes into such expression in AD approximation.