«Оптика атмосферы и океана», **11**, № 4 (1998)

УДК 621.391

А.М. Горцев, И.С. Шмырин

ОПТИМАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ОЦЕНКИ СОСТОЯНИЙ МС-ПОТОКА СОБЫТИЙ ПРИ НАЛИЧИИ ОШИБОК В ИЗМЕРЕНИЯХ МОМЕНТОВ ВРЕМЕНИ

Рассматривается задача об оценке состояния МС-потока событий, являющегося математической моделью потоков элементарных частиц (фотонов, электронов и т.д.). Находится рекуррентное выражение для апостериорной вероятности, представляющей наиболее полную характеристику состояния потока событий. Решение о состоянии потока выносится по критерию максимума апостериорной вероятности. Приводятся результаты численных расчетов апостериорной вероятности и результаты статистического эксперимента на имитационной модели.

1. Введение

Случайные потоки событий являются широко применяемой математической моделью реальных процессов. В частности, потоки элементарных частиц (фотонов, электронов и т.д.), поступающие на регистрирующие приборы, информационные потоки, циркулирующие в вычислительных сетях и сетях связи, достаточно адекватно описываются случайными потоками событий. Задачи по оценке состояний и параметров случайных потоков событий возникают в оптических и лазерных системах, функционирующих в режиме счета фотонов, например, при лазерном зондировании высотных слоев атмосферы, в оптических системах обнаружения, распознавания и сопровождения, работающих через атмосферу на предельно большие расстояния, а также в оптических системах загоризонтной связи.

Большинство авторов рассматривают математические модели потоков событий в предположении, что моменты времени наступления событий измеряются без ошибок. Однако приборы, регистрирующие моменты наступления событий, привносят в измерения различного рода ошибки, которые необходимо учитывать при вынесении статистических решений.

В [1] рассмотрен эмпирический алгоритм оценки состояний МС-потока событий, основанный на введении в рассмотрение весовой функции наблюдений, учитывающей старение наблюдений. В настоящей статье находится рекуррентное соотношение для апостериорных вероятностей состояний МС-потока событий при наличии ошибок в измерениях моментов времени наступления этих событий. Решение о состоянии потока выносится по критерию максимума апостериорной вероятности, представляющей наиболее полную характеристику состояния потока, которую можно получить, располагая только выборкой наблюдений, и как следствие этого обеспечивающей минимум полной вероятности ошибки вынесения решения [2].

2. Постановка задачи

Рассматривается дважды стохастический пуассоновский поток событий, интенсивность которого есть кусочно-постоянный стационарный случайный процесс $\lambda(t)$ с двумя состояниями λ_1 и λ_2 ($\lambda_1 > \lambda_2$). Будем говорить, что имеет место первое состояние процесса, если $\lambda(t) = \lambda_1$, и наоборот, имеет место второе состояние процесса, если $\lambda(t) = \lambda_2$. Длительность пребывания процесса в том или ином состоянии распределена по экспоненциальному закону $F_i(t) = 1 - \exp\{-\alpha_i t\}$, $i = 1, 2$, где α_1 – интенсивность смены первого состояния процесса на второе; α_2 – интенсивность смены второго состояния на первое. На участках стационарности (когда $\lambda(t) = \lambda_1$ либо $\lambda(t) = \lambda_2$) наблюдается пуассоновский поток событий. Такой поток также называют МС-потоком событий либо потоком с переключениями. Так как процесс $\lambda(t)$ является ненаблюдаемым, а наблюдаемыми являются только временные моменты наступления событий, то необходимо по наблюдениям за потоком оценить его состояние в данный момент времени. В измерениях моментов наступления событий присутствует ошибка: $t_i = \overset{0}{t}_i + \Delta t_i$, где t_i – наблюдаемые моменты наступления событий; $\overset{0}{t}_i$ – истинные моменты наступления событий; Δt_i – ошибки измерений, которые независимы и одинаково распределены для любых i. Положим, что ошибка измерений нормальна с нулевым средним и дисперсией σ^2. Так как ошибки измерений с неизбежностью приводят к явлению «перемешивания» событий (событие, наступившее в момент времени $\overset{0}{t}_i$, может наблюдаться в момент времени $t_i < \overset{0}{t}_i$ либо в момент времени $t_i > \overset{0}{t}_i$), то положим $\sigma \ll 1$ (это говорит о том, что регистрирующие приборы не настолько плохи, чтобы их не использовать при измерениях). Тем самым с большой вероятностью избегается случай всеобщего «перемешивания» событий (перемешивание возможно только для соседних событий).

Рассматривается установившийся (стационарный) режим функционирования потока событий, поэтому переходными процессами на интервале наблюдения (t_0, t), где t_0 – начало наблюдений, t – окончание наблюдений (момент вынесения решения), пренебрегаем. Тогда без потери общности можно положить $t_0 = 0$, при этом $0 < t_i = t_i^0 + \Delta t_i < t$. Подчеркнем, что априорные вероятности первого и второго состояний процесса в момент времени t определяются соответственно в виде

$$\pi_1(t, t_0) = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} + \left(q - \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}\right) \exp\{-(\alpha_1 + \alpha_2)(t - t_0)\};$$

$$\pi_2(t, t_0) = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} - \left(q - \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}\right) \exp\{-(\alpha_1 + \alpha_2)(t - t_0)\},$$

где q – вероятность того, что в момент времени t_0 имело место первое состояние процесса $\lambda(t)$. Тогда для стационарного режима $(t \to \infty)$ получаем финальные (априорные) вероятности состояний в виде [3]

$$\pi_1 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}, \quad \pi_2 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}.$$

Таким образом, для оценки состояния ненаблюдаемого процесса $\lambda(t)$ в момент времени t необходимо определить апостериорные вероятности $w(\lambda_1/t_1, ..., t_n)$ и $w(\lambda_2/t_1, ..., t_n)$ того, что в момент времени t $\lambda(t) = \lambda_1$ либо $\lambda(t) = \lambda_2$ соответственно (n – количество наблюдений за время t). В силу того что $w(\lambda_1/t_1, ..., t_n) + w(\lambda_2/t_1, ..., t_n) = 1$, необходимо определить только одну апостериорную вероятность, например $w(\lambda_1/t_1, ..., t_n)$. Решение о состоянии процесса выносится путем сравнения апостериорных вероятностей: если $w(\lambda_1/t_1, ..., t_n) \geq w(\lambda_2/t_1, ..., t_n)$, то $\lambda(t) = \lambda_1$, в противном случае $\lambda(t) = \lambda_2$. Наконец, отметим, что задача оценки состояний МС-потока событий в условиях, когда ошибка измерений моментов времени наступления событий отсутствует, решена в [3].

3. Вывод переходных вероятностей

Пусть время меняется дискретно с конечным шагом Δt: $t = k\Delta t$, $k = 0, 1, \ldots$. Рассмотрим двумерный процесс $(\lambda^{(k)}, r_k)$, где $\lambda^{(k)} = \lambda(k\Delta t)$ – значение процесса $\lambda(t)$ в момент времени $k\Delta t$ ($\lambda^{(k)} = \lambda_1$ либо $\lambda^{(k)} = \lambda_2$), $r_k = r_k(\Delta t) = r[k\Delta t] - r[(k-1)\Delta t]$ – число событий, наблюденных на временном интервале $((k-1)\Delta t, k\Delta t)$ длины Δt, $r_k = 0, 1, \ldots$.

Рассмотрим вероятность $p(\lambda^{(k+1)}, r_{k+1}/\lambda^{(k)}, r_k)$ – условную вероятность того, что процесс $(\lambda^{(k)}, r_k)$, находившийся в состоянии $(\lambda^{(k)}, r_k)$ в момент времени $k\Delta t$, окажется в состоянии $(\lambda^{(k+1)}, r_{k+1})$ в момент времени $(k+1)\Delta t$. Другими словами, $p(\lambda^{(k+1)}, r_{k+1}/\lambda^{(k)}, r_k)$ – вероятность перехода процесса $(\lambda^{(k)}, r_k)$ из состояния в состояние за один шаг Δt. Тогда

$$p(\lambda^{(k+1)}, r_{k+1}/\lambda^{(k)}, r_k) = p(\lambda^{(k+1)}/\lambda^{(k)}, r_k)\, p(r_{k+1}/\lambda^{(k)}, \lambda^{(k+1)}, r_k). \quad (1)$$

Первый сомножитель в (1) запишется в виде $p(\lambda^{(k+1)}/\lambda^{(k)}, r_k) = p(\lambda^{(k+1)}/\lambda^{(k)})$, так как на значение процесса $\lambda(t)$ в момент времени $(k+1)\Delta t$ число наблюденных событий r_k на интервале $((k-1)\Delta t, k\Delta t)$ совершенно не влияет (процесс $\lambda(t)$ «живет своей жизнью»), значение же $\lambda^{(k)}$ процесса $\lambda(t)$ в момент времени $k\Delta t$ не зависит от предыстории в силу экспоненциального распределения длительности состояния $\lambda^{(k)}$, наконец, ошибки измерений вообще не влияют на состояния процесса $\lambda(t)$.

Перейдем к рассмотрению второго сомножителя в (1), где r_{k+1} – количество наблюденных событий на интервале $(k\Delta t, (k+1)\Delta t)$. Так как за счет ошибок измерений возможно «перемешивание» событий, вообще говоря, на всей временной оси (в силу нормального распределения ошибок), то вероятность $p(r_{k+1}/\lambda^{(k)}, \lambda^{(k+1)}, r_k)$ запишется в виде

$$p(r_{k+1}/\lambda^{(k)}, \lambda^{(k+1)}, r_k) = p(r_{k+1}/\lambda^{(k)}, \lambda^{(k+1)}, r_k(\ldots, \lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(k)}, \ldots)). \quad (2)$$

Выберем такое $\sigma \ll 1$, чтобы вероятность «переходов» событий из интервалов, несоседних к интервалу $(k\Delta t, (k+1)\Delta t)$, была достаточно малой величиной, так что редкими «переходами» в дальнейшем изложении пренебрегаем, т.е. событие, наступившее в момент времени $t_i^0 \in ((k-1)\Delta t, k\Delta t)$ либо в момент времени $t_i^0 \in ((k+1)\Delta t, (k+2)\Delta t)$, может наблюдаться только на интервале $(k\Delta t, (k+1)\Delta t)$; событие же, наступившее в момент времени $t_i^0 \in (k\Delta t, (k+1)\Delta t)$, может наблюдаться только либо на интервале $((k-1)\Delta t, k\Delta t)$ либо на интервале $((k+1)\Delta t, (k+2)\Delta t)$. В силу сказанного (2) примет вид

$$p(r_{k+1}/\lambda^{(k)}, \lambda^{(k+1)}, r_k) = p(r_{k+1}/\lambda^{(k-1)}, \lambda^{(k)}, \lambda^{(k+1)}). \quad (3)$$

Таким образом, переходная вероятность (1) примет вид

$$p(\lambda^{(k+1)}, r_{k+1}/\lambda^{(k)}, r_k) = p(\lambda^{(k+1)}/\lambda^{(k)})\, p(r_{k+1}/\lambda^{(k-1)}, \lambda^{(k)}, \lambda^{(k+1)}). \quad (4)$$

Получим сначала выражения для вероятностей $p(\lambda^{(k+1)}/\lambda^{(k)})$. Для упрощения обозначений положим $k\Delta t = u$, $(k+1)\Delta t = \tau$. Рассмотрим два смежных интервала: (u, τ), $u < \tau$, и $(\tau, \tau + \Delta\tau)$, где $\Delta\tau$ – бесконечно малый интервал времени. Тогда нетрудно выписать дифференциальное уравнение для вероятностей $p(\lambda(\tau) = \lambda^{(k+1)}/\lambda(u) = \lambda^{(k)})$:

$$p'(\lambda(\tau) = \lambda_1/\lambda(u) = \lambda^{(k)}) = \alpha_2 - (\alpha_1 + \alpha_2)\, p(\lambda(\tau) =$$

$$= \lambda_1/\lambda(u) = \lambda^{(k)}),$$

$$p(\lambda(\tau) = \lambda_2/\lambda(u) = \lambda^{(k)}) = 1 - p(\lambda(\tau) = \lambda_1/\lambda(u) = \lambda^{(k)}),$$

$$\lambda^{(k)} = \lambda_1, \lambda_2,$$

решение которых, учитывая введенные обозначения, запишется в виде

$$p(\lambda^{(k+1)} = \lambda_1/\lambda^{(k)} = \lambda_1) = \pi_1 + \pi_2 \exp\{-(\alpha_1+\alpha_2)\,\Delta t\},$$

$$p(\lambda^{(k+1)} = \lambda_2/\lambda^{(k)} = \lambda_1) = \pi_2 - \pi_2 \exp\{-(\alpha_1+\alpha_2)\,\Delta t\},$$

$$p(\lambda^{(k+1)} = \lambda_1/\lambda^{(k)} = \lambda_2) = \pi_1 - \pi_1 \exp\{-(\alpha_1+\alpha_2)\,\Delta t\},$$

$$p(\lambda^{(k+1)} = \lambda_2/\lambda^{(k)} = \lambda_2) = \pi_2 + \pi_1 \exp\{-(\alpha_1+\alpha_2)\,\Delta t\},$$

где π_1, π_2 определены выше. Таким образом, переходные вероятности $p(\lambda^{(k+1)}/\lambda^{(k)})$ в выражении (4) определяются вышеприведенными формулами.

Перейдем теперь к определению вероятности $p(r_{k+1}/\lambda^{(k-1)}, \lambda^{(k)}, \lambda^{(k+1)})$. Поставим сначала задачу нахождения распределения вероятностей числа «переходов» событий, наступивших в моменты $\overset{0}{t}_i \in (k\Delta t, (k+1)\Delta t)$, через правую границу $(k+1)\Delta t$ интервала $(k\Delta t, (k+1)\Delta t)$. Пронумеруем события, наступившие в моменты $\overset{0}{t}_i$ на интервале $(k\Delta t, (k+1)\Delta t)$, как это показано на рис. 1. Там же через τ_i обозначены интервалы между соседними событиями ($\tau_i = \overset{0}{t}_{i-1} - \overset{0}{t}_i$, $i = 2, 3, \ldots$, $\tau_1 = (k+1)\Delta t - \overset{0}{t}_1$). Предполагается, что в силу малости Δt значение $\lambda(t) = \lambda^{(k)}$ ($\lambda^{(k)} = \lambda_1$ либо $\lambda^{(k)} = \lambda_2$) остается постоянным для $t \in [k\Delta t, (k+1)\Delta t]$.

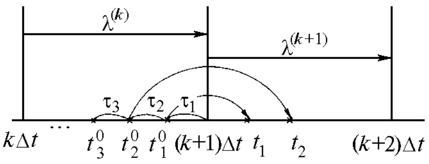

Рис. 1. Иллюстрация «переходов» событий через правую границу интервала $(k\Delta t, (k+1)\Delta t)$

Рассмотрим момент времени $\overset{0}{t}_1$. Зафиксируем величину τ_1. Тогда за счет ошибок измерений первое событие может «перейти» правую границу $(k+1)\Delta t$ интервала и наблюдаться на соседнем интервале (см. рис. 1). Это произойдет, если $t_1 > \overset{0}{t}_1 + \tau_1$. Тогда при фиксированном τ_1 вероятность этого события запишется в виде

$$P_1(\tau^{(1)} = \tau_1) = P(t_1 > \overset{0}{t}_1 + \tau_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int\limits_{\overset{0}{t}_1+\tau_1}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{(t_1-\overset{0}{t}_1)^2}{2\sigma^2}\right\} dt_1 = $$

$$= \Phi\left(-\frac{\tau^{(1)}}{\sigma}\right).$$

Здесь и далее $\Phi(a) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{a} \exp\left\{-\dfrac{x^2}{2}\right\} dx.$

Аналогично второе событие может «перейти» правую границу $(k+1)\Delta t$ интервала при фиксированных τ_1 и τ_2, если $t_2 > \overset{0}{t}_2 + \tau_1 + \tau_2$. Тогда

$$P_2(\tau^{(2)} = \tau_1 + \tau_2) = P(t_2 > \overset{0}{t}_2 + \tau_1 + \tau_2) = \Phi(-\tau^{(2)}/\sigma).$$

Наконец, j-е событие может «перейти» правую границу $(k+1)\Delta t$ интервала при фиксированных $\tau_1, \ldots, \tau_j$, если $t_j > \overset{0}{t}_j + \tau_1 + \ldots + \tau_j$. Тогда

$$P_j(\tau^{(j)} = \tau_1 + \ldots + \tau_j) = P(t_j > \overset{0}{t}_j + \tau_1 + \ldots + \tau_j) = \Phi(-\tau^{(j)}/\sigma),$$

$$j = 1, 2, \ldots\,. \tag{5}$$

Введем в рассмотрение случайную величину n_j, принимающую два значения 0 и 1: $n_j = 1$, если «переход» j-го события через границу $(k+1)\Delta t$ состоялся; $n_j = 0$ – в противном случае. При этом n_j принимает значение 1 с вероятностью $P_j(\tau^{(j)})$, значение 0 – с вероятностью $1 - P_j(\tau^{(j)})$. Тогда распределение вероятностей числа «переходов» событий через правую границу $(k+1)\Delta t$ есть не что иное, как распределение случайной величины $n = \sum\limits_{j=1}^{\infty} n_j$. Отметим, что обычными предельными теоремами для сумм случайных величин здесь нельзя воспользоваться, так как вероятности $P_j(\tau^{(j)})$ зависят от j. Найдем характеристическую функцию случайной величины n, так как она однозначно определяет распределение вероятностей [4].

По определению [4] характеристической функции, в силу независимости случайных величин n_j, имеем

$$g(x)\, M\{\exp(ixn)\} = M\left\{\prod_{j=1}^{\infty} \exp(ixn_j)\right\} = M\left\{\prod_{j=1}^{\infty} z^{n_j}\right\}, \tag{6}$$

где $i = \sqrt{-1}$; $z = \exp(ix)$, x – действительное число. Сначала произведем усреднение в (6) по значениям 0 и 1 случайных величин n_j при фиксированных $\tau_1, \tau_2, \ldots$:

$$g(x/\tau_1, \tau_2, \ldots) = \prod_{j=1}^{\infty} M\{z^{n_j}/\tau_1, \tau_2, \ldots\} =$$

$$= \prod_{j=1}^{\infty} \{zP_j(\tau^{(j)}) + [1 - P_j(\tau^{(j)})]\}. \tag{7}$$

Подставляя в (7) выражение (5), находим

$$g(x/\tau_1, \tau_2, \ldots) = \prod_{j=1}^{\infty} \left\{z\Phi\left(-\frac{\tau^{(j)}}{\sigma}\right) + \left[1 - \Phi\left(-\frac{\tau^{(j)}}{\sigma}\right)\right]\right\}. \tag{8}$$

Для того чтобы получить (6), необходимо произвести усреднение в (8) по $\tau_1, \tau_2, \ldots$. Так как $\tau_1, \tau_2, \ldots$ независимы (на интервале $(k\Delta t, (k+1)\Delta t)$ наступление событий в моменты времени $\overset{0}{t}_i$ образует пуассоновский поток с фиксированной интенсивностью $\lambda^{(k)} = \lambda_1$ либо $\lambda^{(k)} = \lambda_2$), то

$$p(\tau_1, \tau_2, \ldots) = \prod_{j=1}^{\infty} p(\tau_j) = \prod_{j=1}^{\infty} \lambda^{(k)} \exp\{-\lambda^{(k)}\tau_j\}. \tag{9}$$

Сначала усредним (8) по $\tau_2, \tau_3, \ldots$. Тогда получим

$$g(x/\tau^{(1)}) = \psi(\tau^{(1)}) = \left\{ z\Phi\left(-\frac{\tau^{(1)}}{\sigma}\right) + \left[1 - \Phi\left(-\frac{\tau^{(1)}}{\sigma}\right)\right]\right\} \int_0^\infty \int_0^\infty \ldots \times$$

$$\times \prod_{j=2}^{\infty} \left\{ z\Phi\left(-\frac{\tau^{(j)}}{\sigma}\right) + \left[1 - \Phi\left(-\frac{\tau^{(j)}}{\sigma}\right)\right]\right\} \prod_{j=2}^{\infty} p(\tau_j)\, d\tau_2\, d\tau_3 \ldots =$$

$$= \left\{ z\Phi\left(-\frac{\tau^{(1)}}{\sigma}\right) + \left[1 - \Phi\left(-\frac{\tau^{(1)}}{\sigma}\right)\right]\right\} \int_0^\infty p(\tau_2) \times$$

$$\times \left\{ \left\{ z\Phi\left(-\frac{\tau^{(2)}}{\sigma}\right) + \left[1 - \Phi\left(-\frac{\tau^{(2)}}{\sigma}\right)\right]\right\} \times \right.$$

$$\times \int_0^\infty \int_0^\infty \ldots \prod_{j=3}^{\infty} \left\{ z\Phi\left(-\frac{\tau^{(j)}}{\sigma}\right) + \left[1 - \Phi\left(-\frac{\tau^{(j)}}{\sigma}\right)\right]\right\} \times$$

$$\left. \times \prod_{j=3}^{\infty} p(\tau_j)\, d\tau_3\, d\tau_4 \ldots \right\} d\tau_2 =$$

$$= \left\{ z\Phi\left(-\frac{\tau^{(1)}}{\sigma}\right) + \left[1 - \Phi\left(-\frac{\tau^{(1)}}{\sigma}\right)\right]\right\} \int_0^\infty p(\tau_2)\, \psi(\tau^{(2)})\, d\tau_2. \quad (10)$$

Таким образом, находим

$$\psi(\tau^{(1)}) = \left\{ z\Phi\left(-\frac{\tau^{(1)}}{\sigma}\right) + \left[1 - \Phi\left(-\frac{\tau^{(1)}}{\sigma}\right)\right]\right\} \int_0^\infty \psi(\tau^{(2)})\, p(\tau_2)\, d\tau_2. \quad (11)$$

Обозначим $f(\tau^{(1)}) = \{z\Phi\,(-\tau^{(1)}/\sigma) + [1 - \Phi\,(-\tau^{(1)}/\sigma)]\}$. Тогда, подставляя в (11) $p(\tau_2)$ из (9), находим

$$\psi(\tau^{(1)}) = \varphi(\tau^{(1)}) \int_{\tau^{(1)}}^{\infty} \psi(\tau^{(2)}) \exp\{-\lambda^{(k)} \tau^{(2)}\}\, d\tau^{(2)}, \quad (12)$$

где $\varphi(\tau^{(1)}) = f(\tau^{(1)})\, \lambda^{(k)} \exp\{\lambda^{(k)} \tau^{(1)}\}$. Продифференцируем (12) по $\tau^{(1)}$, тогда имеем

$$\psi'(\tau^{(1)}) = \varphi'(\tau^{(1)}) \int_{\tau^{(1)}}^{\infty} \psi(\tau^{(2)}) \exp\{-\lambda^{(k)} \tau^{(2)}\}\, d\tau^{(2)} - \psi(\tau^{(1)}) \times$$

$$- \varphi(\tau^{(1)}) \exp\{-\lambda^{(k)} \tau^{(1)}\}. \quad (13)$$

Подставляя из (12) в (13) выражение для интеграла и производя несложные преобразования, получаем

$$d \ln \psi(\tau^{(1)}) = d \ln \varphi(\tau^{(1)}) - \varphi(\tau^{(1)}) \exp\{-\lambda^{(k)} \tau^{(1)}\}\, d\tau^{(1)}. \quad (14)$$

Интегрирование (14) от нуля до $\tau^{(1)}$ приводит к следующему выражению для $\psi(\tau^{(1)})$:

$$\psi(\tau^{(1)}) = \frac{\psi(0)}{\varphi(0)} \varphi(\tau^{(1)}) \exp\left\{ -\int_0^{\tau^{(1)}} \varphi(y) \exp(-\lambda^{(k)} y)\, dy \right\}. \quad (15)$$

Отметим, что из (10) следует

$$\lim_{\tau^{(1)}\to\infty} \psi(\tau^{(1)}) = \lim_{\tau^{(1)}\to\infty} \left\{ z\Phi\left(-\frac{\tau^{(1)}}{\sigma}\right) + \left[1 - \Phi\left(-\frac{\tau^{(1)}}{\sigma}\right)\right]\right\} \times$$

$$\times \lim_{\tau^{(1)}\to\infty} \int_0^\infty \left\{ z\Phi\left(-\frac{\tau^{(2)}}{\sigma}\right) + \left[1 - \Phi\left(-\frac{\tau^{(2)}}{\sigma}\right)\right]\right\} \times$$

$$\times p(\tau_2)\, d\tau_2 \ldots = 1 \int_0^\infty p(\tau_2)\, d\tau_2 \int_0^\infty p(\tau_3)\, d\tau_3 \ldots = 1. \quad (16)\times$$

Обозначим $C = \psi(0)/\varphi(0)$. Тогда, подставляя в (15) выражение для $\varphi(\cdot)$ из (12), находим

$$\psi(\tau^{(1)}) = C\, \lambda^{(k)} f(\tau^{(1)}) \exp\left\{ -\lambda^{(k)} \left[\int_0^{\tau^{(1)}} [f(y) - 1]\, dy \right] \right\}. \quad (17)$$

Константу C определим, используя граничное условие (16):

$$\lim_{\tau^{(1)}\to\infty} \psi(\tau^{(1)}) = C\, \lambda^{(k)} \lim_{t^{(1)}\to\infty} f(\tau^{(1)}) \times$$

$$\times \lim_{\tau^{(1)}\to\infty} \exp\left\{ -\lambda^{(k)} \left[\int_0^{\tau^{(1)}} [f(y) - 1]\, dy \right] \right\} = 1.$$

Отсюда, учитывая, что $\lim\limits_{\tau^{(1)}\to\infty} f(\tau^{(1)}) = 1$, получаем

$$C\, \lambda^{(k)} = \exp\left\{ \lambda^{(k)} \int_0^\infty [f(y) - 1]\, dy \right\}. \quad (18)$$

Подставляя (18) в (17), находим

$$\psi(\tau^{(1)}) = f(\tau^{(1)}) \exp\left\{ \lambda^{(k)} \int_{\tau^{(1)}}^{\infty} [f(y) - 1]\, dy \right\}. \quad (19)$$

Из (10) для $\tau^{(1)} = 0$ вытекает

$$\psi(0) = \frac{z+1}{2} \int_0^\infty p(\tau_2) \left\{ \left\{ z\Phi\left(-\frac{\tau_2}{\sigma}\right) + \left[1 - \Phi\left(-\frac{\tau_2}{\sigma}\right)\right]\right\} \times \right.$$

$$\left. \times \int_0^\infty p(\tau_3) \left\{ z\Phi\left(-\frac{\tau_2+\tau_3}{\sigma}\right) + \left[1 - \Phi\left(-\frac{\tau_2+\tau_3}{\sigma}\right)\right]\right\} d\tau_3 \ldots \right\} d\tau_2 =$$

$$= \frac{z+1}{2} \int_0^\infty \psi(\tau_2)\, p(\tau_2)\, d\tau_2 = \frac{z+1}{2} \int_0^\infty \psi(y)\, p(y)\, dy. \quad (20)$$

Сама же характеристическая функция (6) с учетом (10) запишется в виде

$$g(x) = \int_0^\infty g(x/\tau^{(1)})\, p(\tau^{(1)})\, d\tau^{(1)} =$$

$$= \int_0^\infty \psi(\tau^{(1)})\, p(\tau^{(1)})\, d\tau^{(1)} = \int_0^\infty \psi(y)\, p(y)\, dy. \quad (21)$$

Из сравнения (20) и (21) следует, что $\psi(0) = \frac{z+1}{2}g(x)$, но для $\tau^{(1)} = 0$ имеем $f(0) = \frac{z+1}{2}$, поэтому $\psi(0) = f(0)g(x)$. Отсюда получаем

$$g(x) = \psi(0)/f(0). \qquad (22)$$

С другой стороны, из (19) для $\tau^{(1)} = 0$ следует

$$\frac{\psi(0)}{f(0)} = \exp\left\{\lambda^{(k)}\int_0^\infty [f(y)-1]\,dy\right\}. \qquad (23)$$

Таким образом, объединение (22) и (23) дает выражение для характеристической функции

$$g(x) = \exp\left\{\lambda^{(k)}\int_0^\infty [f(y)-1]\,dy\right\}. \qquad (24)$$

Подставляя в (24) выражение для $f(\tau^{(1)})$ (заменив в нем $\tau^{(1)}$ на переменную интегрирования y), учитывая при этом, что $z = \exp(ix)$ и $\lambda^{(k)}\int_0^\infty \Phi\left(-\frac{y}{\sigma}\right)dy = \frac{\lambda^{(k)}\sigma}{\sqrt{2\pi}}$, окончательно находим выражение для характеристической функции в виде

$$g(x) = \exp\left\{\frac{\lambda^{(k)}\sigma}{\sqrt{2\pi}}(\exp(ix)-1)\right\}. \qquad (25)$$

Представим (25) в виде бесконечного ряда:

$$g(x) = \exp\left\{-\frac{\lambda^{(k)}\sigma}{\sqrt{2\pi}}\right\}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[(\lambda^{(k)}\sigma/\sqrt{2\pi})\exp(ix)]^n}{n!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\exp(ixn)\frac{(\lambda^{(k)}\sigma/\sqrt{2\pi})^n}{n!}\exp\left\{-\frac{\lambda^{(k)}\sigma}{\sqrt{2\pi}}\right\}. \qquad (26)$$

С другой стороны, из (6) следует, что

$$g(x) = M\{\exp(ixn)\} = \sum_{n=0}^{\infty}\exp(ixn)\,p(n). \qquad (27)$$

Из сравнения (26) и (27) вытекает, что

$$p(n) = \frac{(\lambda^{(k)}\sigma/\sqrt{2\pi})^n}{n!}\exp\left\{-\frac{\lambda^{(k)}\sigma}{\sqrt{2\pi}}\right\}. \qquad (28)$$

Таким образом, распределение вероятностей числа «переходов» событий через правую границу $(k+1)\Delta t$ интервала $(k\Delta t, (k+1)\Delta t)$ является пуассоновским (другими словами, поток «переходов» событий через правую границу интервала $(k\Delta t, (k+1)\Delta t)$ является пуассоновским). Аналогичные доказательства можно провести для левой границы $k\Delta t$ интервала $(k\Delta t, (k+1)\Delta t)$, а также для правой границы $k\Delta t$ интервала $((k-1)\Delta t, k\Delta t)$ и левой границы $(k+1)\Delta t$ интервала $((k+1)\Delta t, (k+2)\Delta t)$.

Итак, итоговое число событий, наблюденных на интервале $(k\Delta t, (k+1)\Delta t)$, есть

$$r_{k+1} = \overset{0}{r}_{k+1} - \overset{0\text{л}}{r}_{k+1} - \overset{0\text{п}}{r}_{k+1} + \overset{0\text{п}}{r}_{k} + \overset{0\text{л}}{r}_{k+2}, \qquad (29)$$

где $\overset{0}{r}_{k+1}$ – число событий, наступивших на интервале $(k\Delta t, (k+1)\Delta t)$ в моменты времени $\overset{0}{t}_i$; $\overset{0\text{л}}{r}_{k+1}$ – число событий, «перешедших» за счет ошибок измерений через левую границу $k\Delta t$ этого интервала и наблюденных на интервале $((k-1)\Delta t, k\Delta t)$; $\overset{0\text{п}}{r}_{k+1}$ – число событий, «перешедших» правую границу $(k+1)\Delta t$ интервала $(k\Delta t, (k+1)\Delta t)$ и наблюденных на интервале $((k+1)\Delta t, (k+2)\Delta t)$; $\overset{0\text{п}}{r}_{k}$ – число событий, наступивших на интервале $((k-1)\Delta t, k\Delta t)$ в моменты времени $\overset{0}{t}_i$, «перешедших» правую. границу этого интервала и наблюденных на интервале $(k\Delta t, (k+1)\Delta t)$; $\overset{0\text{л}}{r}_{k+2}$ – число событий, наступивших на интервале $(k+1)\Delta t, (k+2)\Delta t)$ в моменты времени $\overset{0}{t}_i$, «перешедших» левую. границу этого интервала и наблюденных на интервале $(k\Delta t, (k+1)\Delta t)$.

Вероятности этих величин, кроме $\overset{0}{r}_{k+1}$, определяются формулой (28). Нужно только вместо n подставить соответствующее число событий, а вместо $\lambda^{(k)}$ – значение, соответствующее тому или иному интервалу. Например, для $\overset{0\text{л}}{r}_{k+2}$ формула (28) примет вид

$$p(\overset{0\text{л}}{r}_{k+2}) = \frac{(\lambda^{(k+1)}\sigma/\sqrt{2\pi})^{\overset{0\text{л}}{r}_{k+2}}}{\overset{0\text{л}}{r}_{k+2}!}\exp\left\{-\frac{\lambda^{(k+1)}\sigma}{\sqrt{2\pi}}\right\}. \qquad (30)$$

Вероятность величины $\overset{0}{r}_{k+1}$ определяется обычной формулой пуассоновского потока.

Предположим теперь, что ошибки измерений моментов наступления событий отсутствуют. Тогда до некоторого момента наблюдения $k\Delta t$ траектория процесса $\lambda(t)$, представляющая собой реализацию случайного процесса, является детерминированной функцией времени. Если это так, то МС-поток можно трактовать как нестационарный пуассоновский поток событий, для которого имеют место ординарность и отсутствие последействия [5]. Для рассматриваемого случая присутствия ошибок измерений в моментах наступления событий свойства ординарности и отсутствия последействия сохраняются, так как ошибки измерений независимы. Таким образом, и в этом варианте МС-поток событий есть нестационарный пуассоновский поток. Тогда вероятность наблюдения r_{k+1} событий этого потока на интервале $(k\Delta t, (k+1)\Delta t)$ есть

$$p(r_{k+1}/\Lambda_{k+1}) = \frac{(\Lambda_{k+1})^{r_{k+1}}}{r_{k+1}!}\exp(-\Lambda_{k+1}), \qquad (31)$$

где $\Lambda_{k+1} = M(r_{k+1})$. Число событий r_{k+1} определяется соотношением (29). Тогда, учитывая формулу (28) и как пример ее использования формулу (30), получаем

$$\Lambda_{k+1} = \Lambda(\lambda^{(k-1)}, \lambda^{(k)}, \lambda^{(k+1)}) = M(r_{k+1}) =$$

$$= M(\overset{0}{r}_{k+1}) - M(\overset{0Л}{r}_{k+1}) - M(\overset{0П}{r}_{k+1}) + M(\overset{0П}{r}_{k}) + M(\overset{0Л}{r}_{k+2}) =$$

$$= \lambda^{(k)}\,\Delta t - \frac{2\lambda^{(k)}\sigma}{\sqrt{2\pi}} + \frac{\lambda^{(k-1)}\sigma}{\sqrt{2\pi}} + \frac{\lambda^{(k+1)}\sigma}{\sqrt{2\pi}}. \qquad (32)$$

С учетом (32) формула (31) перепишется в виде

$$p(r_{k+1}/\Lambda_{k+1}) = p(r_{k+1}/\Lambda_{k+1}(\lambda^{(k-1)}, \lambda^{(k)}, \lambda^{(k+1)})) =$$

$$= p(r_{k+1}/\lambda^{(k-1)}, \lambda^{(k)}, \lambda^{(k+1)}) =$$

$$= \frac{1}{r_{k+1}!}\left(\lambda^{(k)}\,\Delta t - \frac{2\lambda^{(k)}\sigma}{\sqrt{2\pi}} + \frac{\lambda^{(k-1)}\sigma}{\sqrt{2\pi}} + \frac{\lambda^{(k+1)}\sigma}{\sqrt{2\pi}}\right)^{r_{k+1}} \times$$

$$\times \exp\left\{-(\lambda^{(k)}\,\Delta t - \frac{2\lambda^{(k)}\sigma}{\sqrt{2\pi}} + \frac{\lambda^{(k-1)}\sigma}{\sqrt{2\pi}} + \frac{\lambda^{(k+1)}\sigma}{\sqrt{2\pi}})\right\}, \qquad (33)$$

а это есть не что иное, как вероятность, входящая в формулу (4) вторым сомножителем. Таким образом, переходная вероятность (4) полностью определена.

При дальнейшем рассмотрении поставленной задачи (выполнении вычислительных процедур) потребуется установление ограничений на величины Δt и σ. Эти ограничения вытекают из формулы (33). Рассмотрение вариантов формулы (последние определяются значениями величен $\lambda^{(k-1)}, \lambda^{(k)}, \lambda^{(k+1)}$; всего восемь вариантов) приводит к следующему ограничению на Δt и σ: $\Delta t > [2(\lambda_1 - \lambda_2)\sigma]/(\lambda_1\sqrt{2\pi})$. С другой стороны, чтобы вероятность «переходов» событий из интервала $(k\Delta t, (k+1)\Delta t)$ в несоседние к нему интервалы и, наоборот, вероятность «перехода» событий в интервал $(k\Delta t, (k+1)\Delta t)$ из несоседних к нему интервалов была достаточно малой, потребуем, чтобы $\Delta t \le 3\sigma$. Тогда ограничения на Δt примут вид $[2(\lambda_1 - \lambda_2)\sigma]/(\lambda_1\sqrt{2\pi}) < \Delta t \le 3\sigma$. Конкретный подбор величины Δt при заданных $\lambda_1, \lambda_2, \alpha_1, \alpha_2, \sigma$ можно осуществить только экспериментально, например путем имитационного моделирования.

4. Вывод рекуррентного соотношения для апостериорной вероятности

Обозначим $\mathbf{r}_m = (r_0, r_1, ..., r_m)$ – последовательность наблюденных событий за время от 0 до $m\Delta t$ на интервалах $((k-1)\Delta t, k\Delta t)$ длительности Δt, $k = \overline{0,m}$ ($r_0 = 0$, так как r_0 – число наблюденных событий на интервале $(-\Delta t, 0)$ для $k = 0$); $\lambda^{(m)} = (\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, ..., \lambda^{(m)})$ – последовательность неизвестных (ненаблюдаемых) значений процесса $\lambda(k\Delta t)$ в моменты времени $k\Delta t$, $k = \overline{0,m}$ ($\lambda^{(0)} = \lambda(0) = \lambda_1$ либо $\lambda^{(0)} = \lambda_2$).

Обозначим $W(\boldsymbol{\lambda}^{(m)}, \mathbf{r}_m)$ – совместная вероятность значений $\boldsymbol{\lambda}^{(m)}$ и $\mathbf{r}_m$. Так как поток наблюденных событий является нестационарным пуассоновским потоком, то $W(\lambda^{(m)}, \mathbf{r}_m)$ представляется как произведение переходных вероятностей (4):

$$W(\lambda^{(m)}, \mathbf{r}_m) = W(\lambda^{(0)}, r_0) \prod_{k=1}^{m} p(\lambda^{(k)}/\lambda^{(k-1)}) \times$$

$$\times\, p(r_k/\lambda^{(k-2)}, \lambda^{(k-1)}, \lambda^{(k)}). \qquad (34)$$

Аналогично для $m + 1$:

$$W(\lambda^{(m+1)}, \mathbf{r}_{m+1}) = W(\lambda^{(0)}, r_0) \prod_{k=1}^{m+1} p(\lambda^{(k)}/\lambda^{(k-1)}) \times$$

$$\times\, p(r_k/\lambda^{(k-2)}, \lambda^{(k-1)}, \lambda^{(k)}). \qquad (35)$$

Сравнение (34) и (35) приводит к следующему соотношению:

$$W(\lambda^{(m+1)}, \mathbf{r}_{m+1}) = W(\lambda^{(m)}, \mathbf{r}_m)\, p(\lambda^{(m+1)}/\lambda^{(m)}) \times$$

$$\times\, p(r_{m+1}/\lambda^{(m-1)}, \lambda^{(m)}, \lambda^{(m+1)}).$$

Отсюда, учитывая, что

$$W(\lambda^{(m)}/\mathbf{r}_m) = W(\lambda^{(m)}, \mathbf{r}_m)/W(\mathbf{r}_m),$$

находим

$$W(\lambda^{(m+1)}/\mathbf{r}_{m+1}) = \frac{W(\mathbf{r}_m)}{W(\mathbf{r}_{m+1})}\, W(\boldsymbol{\lambda}^{(m)}/\mathbf{r}_m) \times$$

$$\times\, p(\lambda^{(m+1)}/\lambda^{(m)})\, p(r_{m+1}/\lambda^{(m-1)}, \lambda^{(m)}, \lambda^{(m+1)}). \qquad (36)$$

Тогда искомая апостериорная вероятность того, что в момент времени $t = (m + 1)\Delta t$ состояние процесса $\lambda(t)$ есть $\lambda^{(m+1)}$ ($\lambda^{(m+1)} = \lambda_1$ либо $\lambda^{(m+1)} = \lambda_2$), запишется в виде

$$W(\lambda^{(m+1)}/\mathbf{r}_{m+1}) = \sum_{\lambda^{(0)}=\lambda_1}^{\lambda_2} \ldots \sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} W(\boldsymbol{\lambda}^{(m+1)}/\mathbf{r}_{m+1}). \qquad (37)$$

Подставляя в (37) выражение (36), после несложных преобразований получаем

$$W(\lambda^{(m+1)}/\mathbf{r}_{m+1}) = \frac{W(\mathbf{r}_m)}{W(\mathbf{r}_{m+1})} \sum_{\lambda^{(m-1)}=\lambda_1}^{\lambda_2} \sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} W(\lambda^{(m-1)}, \lambda^{(m)}/\mathbf{r}_m) \times$$

$$\times\, p(\lambda^{(m+1)}/\lambda^{(m)})\, p(r_{m+1}/\lambda^{(m-1)}, \lambda^{(m)}, \lambda^{(m+1)}). \qquad (38)$$

Вероятность $W(\lambda^{(m-1)}, \lambda^{(m)}/\mathbf{r}_m)$ представим в виде произведения вероятностей:

$$W(\lambda^{(m-1)}, \lambda^{(m)}/\mathbf{r}_m) = W(\lambda^{(m)}/\mathbf{r}_m)\, p(\lambda^{(m-1)}/\lambda^{(m)}, \mathbf{r}_m).$$

Рассмотрим вероятность $p(\lambda^{(m-1)}/\lambda^{(m)}, \mathbf{r}_m)$. Это есть условная вероятность того, что при условии наблюденных событий на интервале $(0, m\Delta t)$ процесс $\lambda(t)$ пришел в реализовавшееся в момент времени $m\Delta t$ состояние $\lambda^{(m)}$ из состояния $\lambda^{(m-1)}$ («известно настоящее – нужно найти прошлое»). Как уже отмечалось выше, процесс $\lambda(t)$ не зависит от наблюденных событий, поэтому $p(\lambda^{(m-1)}/\lambda^{(m)}, \mathbf{r}_m) = p(\lambda^{(m-1)}/\lambda^{(m)})$, т.е. это переходная вероятность для процесса $\lambda(t)$, только устремленная в прошлое. Для определения вероятности $p(\lambda^{(m-1)}/\lambda^{(m)})$ используем формулу Байеса [4]. Для конкретности положим $\lambda^{(m-1)} = \lambda_1,\ \lambda^{(m)} = \lambda_2$. Тогда

$$p(\lambda^{(m-1)} = \lambda_1/\lambda^{(m)} = \lambda_1) = p(\lambda^{(m)} = \lambda_1/\lambda^{(m-1)} = \lambda_1)\ \pi_1 \ /\ [p(\lambda^{(m)} = $$

$$= \lambda_1/\lambda^{(m-1)} = \lambda_1)\ \pi_1 + p(\lambda^{(m)} = \lambda_1/\lambda^{(m-1)} = \lambda_2)\ \pi_2], \qquad (39)$$

где π_1, π_2 – вероятности, определенные выше в п. 2. Остальные вероятности являются переходными вероятностями процесса $\lambda(t)$, устремленными из настоящего в будущее и определенными в формуле (4). Подставляя эти выражения в (39), заменив в них соответствующим образом индексы, получаем

$$p(\lambda^{(m-1)} = \lambda_1/\lambda^{(m)} = \lambda_1) = \pi_1 + \pi_2 \exp\{-(\alpha_1+\alpha_2)\,\Delta t\}. \qquad (40)$$

Сравнение выражения (40) с формулой для переходной вероятности $p(\lambda^{(m)} = \lambda_1/\lambda^{(m-1)} = \lambda_1)$ из (4) показывает их полное совпадение, т.е. процесс $\lambda(t)$ обратим. Совершенно аналогично получаются остальные переходные вероятности:

$$p(\lambda^{(m-1)} = \lambda_2/\lambda^{(m)} = \lambda_1) = \pi_2 - \pi_2 \exp\{-(\alpha_1+\alpha_2)\,\Delta t\},$$

$$p(\lambda^{(m-1)} = \lambda_1/\lambda^{(m)} = \lambda_2) = \pi_1 - \pi_1 \exp\{-(\alpha_1+\alpha_2)\,\Delta t\},$$

$$p(\lambda^{(m-1)} = \lambda_2/\lambda^{(m)} = \lambda_2) = \pi_2 + \pi_1 \exp\{-(\alpha_1+\alpha_2)\,\Delta t\}. \qquad (41)$$

С учетом сказанного формула (38) перепишется в виде

$$W(\lambda^{(m+1)}/\mathbf{r}_{m+1}) = \frac{W(\mathbf{r}_m)}{W(\mathbf{r}_{m+1})} \sum_{\lambda^{(m-1)}=\lambda_1}^{\lambda_2} \sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} W(\lambda^{(m)}/\mathbf{r}_m)\, p(\lambda^{(m-1)}/\lambda^{(m)}) \times$$

$$\times\, p(\lambda^{(m+1)}/\lambda^{(m)})\, p(r_{m+1}/\lambda^{(m-1)}, \lambda^{(m)}, \lambda^{(m+1)}). \qquad (42)$$

Остается определить неизвестный множитель $W(\mathbf{r}_m)/W(\mathbf{r}_{m+1})$, который находим из условия нормировки:

$$\sum_{\lambda^{(m+1)}=\lambda_1}^{\lambda_2} W(\lambda^{(m+1)}/\mathbf{r}_{m+1}) = \frac{W(\mathbf{r}_m)}{W(\mathbf{r}_{m+1})} \sum_{\lambda^{(m-1)}=\lambda_1}^{\lambda_2} \sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} \sum_{\lambda^{(m+1)}=\lambda_1}^{\lambda_2} W(\lambda^{(m)}/\mathbf{r}_m) \times$$

$$\times\, p(\lambda^{(m-1)}/\lambda^{(m)})\, p(\lambda^{(m+1)}/\lambda^{(m)})\, p(r_{m+1}/\lambda^{(m-1)}, \lambda^{(m)}, \lambda^{(m+1)}) = 1.$$

Таким образом,

$$\frac{W(\mathbf{r}_m)}{W(\mathbf{r}_{m+1})} = \left\{ \sum_{\lambda^{(m-1)}=\lambda_1}^{\lambda_2} \sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} \sum_{\lambda^{(m+1)}=\lambda_1}^{\lambda_2} W(\lambda^{(m)}/\mathbf{r}_m) \times \right.$$

$$\left. \times\, p(\lambda^{(m-1)}/\lambda^{(m)})\, p(\lambda^{(m+1)}/\lambda^{(m)})\, p(r_{m+1}/\lambda^{(m-1)}, \lambda^{(m)}, \lambda^{(m+1)}) \right\}^{-1}. \qquad (43)$$

Подставляя (43) в (42), окончательно получаем рекуррентную формулу для апостериорной вероятности $W(\lambda^{(m+1)}/\mathbf{r}_{m+1})$:

$$W(\lambda^{(m+1)}/\mathbf{r}_{m+1}) = \left\{ \sum_{\lambda^{(m-1)}=\lambda_1}^{\lambda_2} \sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} W(\lambda^{(m)}/\mathbf{r}_{m+1})\, p(\lambda^{(m-1)}/\lambda^{(m)}) \times \right.$$

$$\left. \times\, p(\lambda^{(m+1)}/\lambda^{(m)})\, p(r_{m+1}/\lambda^{(m-1)}, \lambda^{(m)}, \lambda^{(m+1)}) \right\} \times$$

$$\times \left\{ \sum_{\lambda^{(m-1)}=\lambda_1}^{\lambda_2} \sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} \sum_{\lambda^{(m+1)}=\lambda_1}^{\lambda_2} W(\lambda^{(m)}/\mathbf{r}_m)\, p(\lambda^{(m-1)}/\lambda^{(m)})\, p(\lambda^{(m+1)}/\lambda^{(m)}) \times \right.$$

$$\left. \times\, p(r_{m+1}/\lambda^{(m-1)}, \lambda^{(m)}, \lambda^{(m+1)}) \right\}^{-1}. \qquad (44)$$

Формула (44) позволяет рассчитать апостериорную вероятность в любой момент времени $m\Delta t$, $m = 0, 1, \ldots$. При этом для $m = 0$ $W(\lambda^{(0)} = \lambda_1/r_0) = \pi_1$, $W(\lambda^{(0)} = \lambda_2/r_0) = \pi_2$, $\lambda^{(-1)} = \lambda_1$ либо $\lambda^{(-1)} = \lambda_2$.

В заключение отметим, что обычный подход, используемый в задачах оптимальной нелинейной фильтрации [2, 3], предполагает дальнейший предельный переход при $\Delta t \to 0$ в формуле (44), который приводит к дифференциальному уравнению для апостериорной вероятности. Однако в рассматриваемом случае ошибок в измерениях моментов наступления событий такой предельный переход незаконен, так как при $\Delta t \to 0$ вероятности (33) могут стать отрицательными. Предельный переход в (44) возможен только тогда, когда одновременно с Δt и $\sigma \to 0$, т.е. предельным случаем является случай безошибочных измерений моментов времени наступления событий, рассмотренный в [3].

5. Результаты численных расчетов

Для получения численных результатов разработан алгоритм вычисления апостериорной вероятности по формуле (44). Программа расчета реализована на алгоритмическом языке Паскаль. Первый этап расчета предполагает имитационное моделирование МС-потока событий и моделирование механизма ошибок в измерениях моментов времени наступления событий. Описание алгоритма имитационного моделирования здесь не приводится, так как никаких принципиальных трудностей алгоритм не содержит. Второй этап расчета – непосредственное вычисление апостериорной вероятности по формуле (44).

Все расчеты проведены для следующих значений параметров: $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = 1$, $\alpha_1 = 0{,}5$, $\alpha_2 = 0{,}7$, $\sigma = 0{,}05$. На рис. 2–4 приведены значения апостериорной вероятности $W(\lambda_1/t)$ для $\Delta t = 0{,}0359$ (см. рис. 2); 0,09295 (рис. 3); 0,15 (рис. 4). На рисунках указаны участки стационарности процесса $\lambda(t)$. С целью определения для заданных параметров приемлемого значения Δt проведен статистический эксперимент. Для каждого Δt имитировалось 50 реализаций МС-потока с ошибками измерений моментов времени наступления событий.

Длительность каждой реализации $t = 50$ ед. В момент времени t рассчитывалась вероятность $W(\lambda_1/t)$, и по критерию максимума апостериорной вероятности выносилось решение о том или ином состоянии процесса $\lambda(t)$. После чего проводилось сравнение полученного решения с истинным состоянием процесса $\lambda(t)$ в момент времени t, известного из результата имитационного моделирования, и подсчитывалась частота ошибочных решений:

$$P_1 = \hat{P}(\lambda(t) = \lambda_1/\lambda(t) = \lambda_2) = n_1/N_2,$$

$$P_2 = \hat{P}(\lambda(t) = \lambda_2/\lambda(t) = \lambda_1) = n_2/N_1,$$

где N_i – число реализаций, для которых истинное состояние процесса $\lambda(t)$ в момент времени t равно λ_i, $i = 1, 2$, $N = N_1 + N_2$; n_1 – число ошибочных решений о втором состоянии процесса $\lambda(t)$ (в момент времени t имеет место состояние процесса $\lambda(t) = \lambda_2$, но выносится ошибочное решение – $\lambda(t) = \lambda_1$); n_2 – число ошибочных решений о первом состоянии процесса $\lambda(t)$ (в момент времени t имеет место состояние процесса $\lambda(t) = \lambda_1$, но выносится ошибочное решение – $\lambda(t) = \lambda_2$). Оценка полной вероятности ошибки подсчитывалась по формуле: $P = \pi_1 P_2 + \pi_2 P_1$. Результаты статистического эксперимента приведены в таблице.

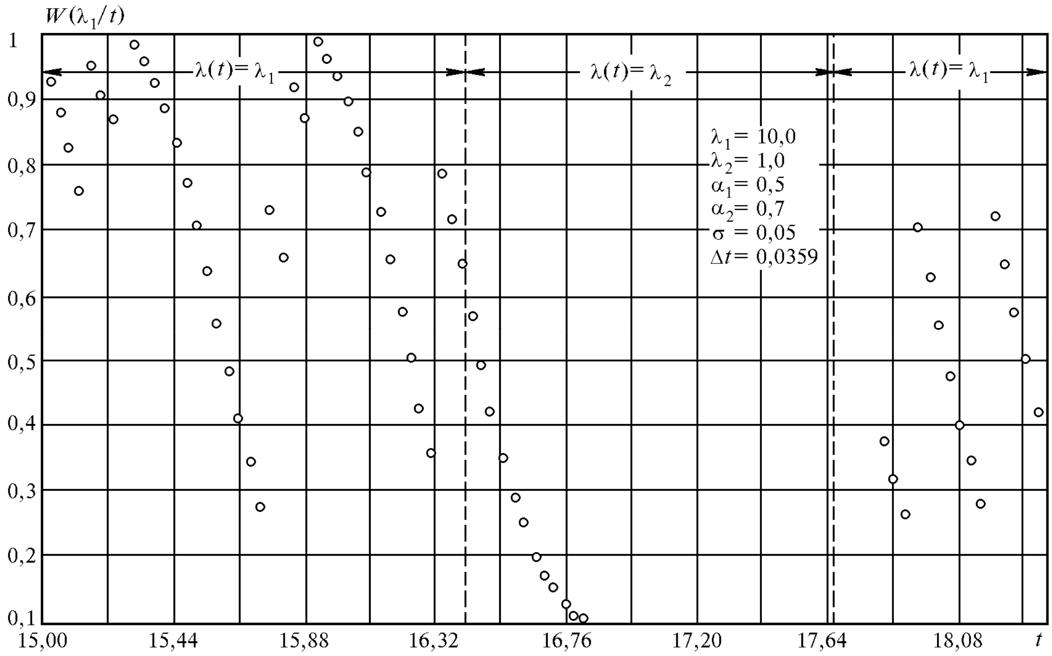

Рис. 2

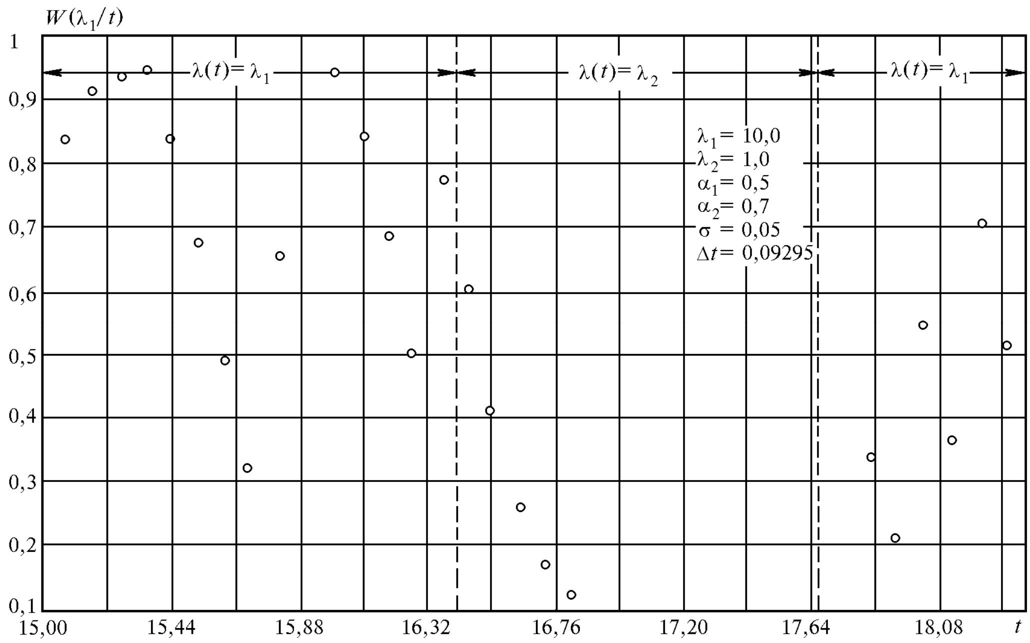

Рис. 3

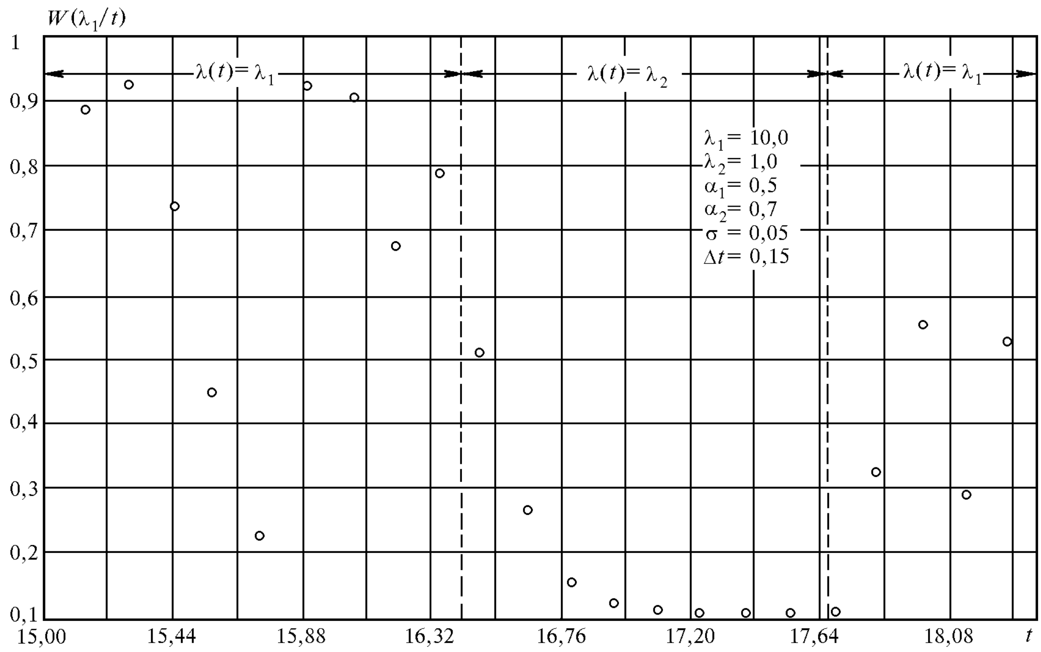

Рис. 4

P_i	$\Delta t = 0{,}0359$	$\Delta t = 0{,}09295$	$\Delta t = 0{,}15$
P_1	0,077	0,077	0,038
P_2	0,250	0,292	0,333
P	0,178	0,202	0,210

Анализ результатов показывает, что при заданных значениях параметров чем ближе значение Δt к левой границе $2(\lambda_1 + \lambda_2)\sigma/\lambda_1\sqrt{2\pi} = 0{,}035905$, тем меньше полная вероятность ошибки. Однако при изменении исходных параметров для определения приемлемого значения Δt необходимо проводить подобный статистический эксперимент.

1. *Горцев А.М., Нежельская Л.А., Шевченко Т.И.* Оценивание состояний МС-потока событий при наличии ошибок измерений // Известия вузов. Физика. 1993. № 12. С. 67–85.
2. *Хазен Э.М.* Методы оптимальных статистических решений и задачи оптимального управления. М.: Сов. радио, 1968. 256 с.
3. *Горцев А.М., Нежельская Л.А.* Оптимальная нелинейная фильтрация марковского потока событий с переключениями // Техника средств связи. 1989. Вып. 7. С. 46–54.
4. *Боровков А.А.* Теория вероятностей. М.: Наука, 1986. 431 с.
5. *Хинчин А.Я.* Работы по математической теории массового обслуживания. М.: Физматгиз, 1963. 235 с.

Томский государственный
университет

Поступила в редакцию
5 февраля 1997 г.

A.M. Gortsev, I.S. Shmyrin. **Optimal Algorithm for Events MS-flow State Estimation with Errors in Instants Measurement.**

A problem of estimation of events MS-flow state being a mathematical model of elementary particles flows (photons, electrons, ets.) is examined. A recursion relation is being found for a posteriori probability, which is the most perfect characteristic of the events flow state. A decision for the flow state is being made by the maximum criterion of a posteriori probability. The computation results are presented as well as the results of statistical experiment on the model.