

Рассеяние света произвольно ориентированным цилиндром в приближении Вентцеля – Крамерса – Бриллюэна.

1. Факторы эффективности ослабления и поглощения

К.А. Шаповалов*

Красноярская государственная медицинская академия
660022, г. Красноярск, ул. Партизана Железняка, 1

Поступила в редакцию 7.11.2008 г.

Получены выражения для расчета факторов эффективности ослабления и поглощения в приближении Вентцеля – Крамерса – Бриллюэна (ВКБ) оптически «мягким» ($|m - 1| \ll 1$, где $m = n + i\chi$ – относительный показатель преломления цилиндра) круговым цилиндром конечной длины при падении света произвольной поляризации под любым углом относительно оси симметрии цилиндра. Показано аналитически, что выражения для фактора эффективности ослабления однородной частицы любой формы в приближениях ВКБ в скалярном виде и аномальной дифракции (АД) совпадают с точностью до знака χ . Отмечено, что только при условии значительной оптической «мягкости» частицы ($|m - 1| \rightarrow 0$) выражение для фактора эффективности поглощения однородной частицы любой формы в приближении ВКБ в скалярном виде также переходит в таковое для приближения АД.

Ключевые слова: фактор эффективности ослабления и поглощения, рассеяние света, поляризация, однородная частица.

Введение

Большое значение для мониторинга состояния атмосферы и океана [1] в коллоидной химии и в других областях имеет изучение рассеяния света ледяными кристаллами, а также несферическими частицами, входящими в состав естественных и искусственных аэрозолей, гидрозолей, взвесей биологических частиц. Если частицы оптически «мягкие» ($|m - 1| \ll 1$, где $m = n + i\chi$ – относительный показатель преломления светорассеивающей частицы), то можно использовать приближения Рэля – Ганса – Дебая (РГД), аномальной дифракции (АД) [2] и Вентцеля – Крамерса – Бриллюэна (ВКБ).

Ранее автором получены выражения для факторов эффективности ослабления и поглощения света конечным круговым цилиндром в ВКБ-приближении при падении света перпендикулярно и вдоль оси симметрии цилиндра [3, 4]. В настоящей статье обобщаются данные выражения факторов эффективности ослабления и поглощения в приближении ВКБ для света, падающего произвольно относительно оси симметрии конечного цилиндра.

Предположим, что неподвижный однородный цилиндр высотой H и радиусом a ориентирован осью симметрии вдоль оси z . Пусть плоская электромагнитная волна падает в плоскости ZOY прямоугольной системы координат под углом θ_i к оси z (рис. 1):

$$E_i(r) = e_i \exp[i k (y \sin\theta_i + z \cos\theta_i)], \quad (1)$$

где $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число; λ – длина волны в дисперсионной среде; e_i – единичный вектор в направлении поляризации падающей волны.

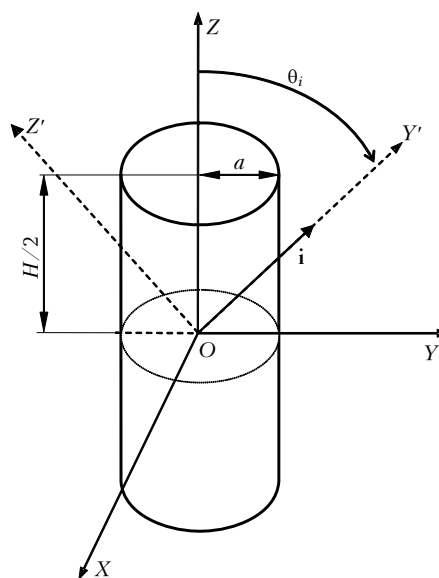


Рис. 1. Геометрия рассеяния света на круговом цилиндре радиуса a и высоты H (i – направление единичного вектора падающего света)

Введем новую систему координат, полученную поворотом вдоль неподвижной оси x так, чтобы новая ось y' была направлена вдоль падающей волны (см. рис. 1):

* Константин Алексеевич Шаповалов (sh_const@mail.ru).

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}') = \mathbf{e}_i \exp[i k y']. \quad (2)$$

Используем амплитуду светорассеяния в приближении ВКБ [3, 5]:

$$\mathbf{f}(\mathbf{s}, \mathbf{i}) = \frac{k^2}{4\pi} [-\mathbf{s}(\mathbf{s} \times \mathbf{e}_i)] \int (m^2 - 1) T(m, \theta_i) \times \\ \times \exp[ik((m-1)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{i} - \xi_1) + \mathbf{r}(\mathbf{i} - \mathbf{s}))] dV, \quad (3)$$

где \mathbf{s} , \mathbf{i} – единичные векторы вдоль направления рассеяния и распространения света соответственно; ξ_1 – входная координата на поверхности частицы для волны, проходящей через точку \mathbf{r} ; $T(m, \theta_i)$ – коэффициент пропускания Френеля (причем $T(m, \pi/2) = 2/(m+1)$); \mathbf{r} – радиус-вектор точки внутри частицы.

Тогда из (3) для амплитуды однородной частицы в направлении вперед имеем

$$\mathbf{f}(\mathbf{i}, \mathbf{i}) = \frac{k^2(m^2 - 1) \cdot \mathbf{e}_i}{4\pi} \times \\ \times \int T(m, \theta_i) \exp[ik((m-1)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{i} - \xi_1))] dV. \quad (4)$$

В новой системе координат после интегрирования (4) по y' получим

$$\mathbf{f}(\mathbf{i}, \mathbf{i}) = \frac{-i k(m+1) \cdot \mathbf{e}_i}{4\pi} \times \\ \times \int T(m, \theta_i) \{ \exp[ik((m-1)(y'_2 - y'_1))] - 1 \} dz' dx', \quad (5)$$

где y'_1 , y'_2 – входная и выходная координаты y' на поверхности частицы.

Согласно оптической теореме [5] сечение ослабления σ_e , нормированное на площадь S проекции частицы в плоскости, перпендикулярной оси пучка (или фактор эффективности ослабления Q_e), равно

$$Q_e = \frac{\sigma_e}{S} = \frac{4\pi}{kS} \text{Im}(\mathbf{f}(\mathbf{i}, \mathbf{i})) \cdot \mathbf{e}_i. \quad (6)$$

Подставляя амплитуду (5) в (6), имеем для фактора эффективности ослабления:

$$Q_e = \frac{1}{S} \text{Re} \left[(m+1) \int T(m, \theta_i) \times \right. \\ \left. \times \{ 1 - \exp[ik((m-1)(y'_2 - y'_1))] \} dS' \right]. \quad (7)$$

Выражение (7) справедливо для однородной частицы любой формы в приближении ВКБ. В скалярном виде $T(m, \pi/2) = 2/(m+1)$ и выражение для фактора эффективности ослабления (7) совпадает с таковым в приближении АД с точностью до знака [6]. В приближении АД, в отличие от ВКБ, перед $ik(m-1)$ – знак минус, что изменяет знак χ ($n + i\chi$ на $n - i\chi$) в итоговых формулах.

Выражения для факторов эффективности ослабления и поглощения света цилиндрами в приближении АД получены в [2, 7]. Поляризация не учи-

тывается в приближении АД, поэтому автором получены несколько иные формулы.

Амплитуда светорассеяния цилиндра в приближении ВКБ для двух поляризаций в двух плоскостях: параллельной \parallel и перпендикулярной \perp плоскости ZOY (см. рис. 1) имеет вид

$$\mathbf{f}(\mathbf{i}, \mathbf{i})_{\parallel, \perp} = \frac{k(m+1) \cdot \mathbf{e}_i}{4\pi} \times$$

$$\begin{cases} T1_{\parallel, \perp} f1 + T2_{\parallel, \perp} (f1 + f2) \text{ при } 0 \leq \theta_i < \arctg\left(\frac{D}{H}\right), & (8) \\ T2_{\parallel, \perp} f3 + T1_{\parallel, \perp} (f3 + f4) \text{ при } \arctg\left(\frac{D}{H}\right) \leq \theta_i \leq \frac{\pi}{2}, & (9) \end{cases}$$

где коэффициенты Френеля

$$T1_{\parallel, \perp} = T3_{\perp, \parallel}(m, \cos \theta_i), \quad T2_{\parallel, \perp} = T3_{\perp, \parallel}(m, \sin \theta_i),$$

$$T3_{\parallel}(m, x) = \frac{2\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2} + \sqrt{m^2-x^2}},$$

$$T3_{\perp}(m, x) = \frac{2m\sqrt{1-x^2}}{m^2\sqrt{1-x^2} + \sqrt{m^2-x^2}};$$

$$f1 = iS_1 Rq(i\Delta_H), \quad f2 = i\{\pi S_2 - S_1\} Rp(i\Delta_H),$$

$$f3 = f3_{\parallel, \perp} = i2(m+1)S_2 \times$$

$$\times \int_0^1 T3_{\parallel, \perp}(m, x) \sqrt{1-x^2} Rq\left(i\Delta_D \sqrt{1-x^2}\right) dx,$$

$$f4 = f4_{\parallel, \perp} = i \frac{(m+1)}{2} \times$$

$$\times \int_0^1 T3_{\parallel, \perp}(m, x) Rp\left(i\Delta_D \sqrt{1-x^2}\right) \left(S_1 - 4S_2 \sqrt{1-x^2}\right) dx,$$

$$Rp(x) = 1 - \exp(x), \quad Rq(x) = \frac{Rp(x)}{x} + 1;$$

$$\Delta_D = \frac{kD(m-1)}{\sin \theta_i}, \quad \Delta_H = \frac{kH(m-1)}{\cos \theta_i};$$

$$S_1 = DH \sin \theta_i, \quad S_2 = a^2 \cos \theta_i, \quad D = 2a.$$

Подставляя в (6) амплитуды (8), (9) и площадь $S = S_1 + \pi S_2$, получим

$$Q_{e\parallel, \perp} = \frac{1}{S} \begin{cases} \text{Im} \left\{ (m+1) \left[T1_{\parallel, \perp} f1 + T2_{\parallel, \perp} (f1 + f2) \right] \right\} \\ \text{при } 0 \leq \theta_i < \arctg\left(\frac{D}{H}\right), & (10) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Im} \left\{ (m+1) \left[T2_{\parallel, \perp} f3 + T1_{\parallel, \perp} (f3 + f4) \right] \right\} \\ \text{при } \arctg\left(\frac{D}{H}\right) \leq \theta_i \leq \frac{\pi}{2}. & (11) \end{cases}$$

Если $T1_{\parallel, \perp} = T2_{\parallel, \perp} = T3_{\parallel, \perp} = \frac{2}{m+1}$, то выражения

ВКБ для фактора эффективности ослабления цилиндра (10), (11) будут скалярными и перейдут

в формулы приближения АД [2, 7, 8]. Тогда в скалярном виде имеем

$$f3 = \pi S_2 \left[\frac{2H_1(\Delta_D)}{\Delta_D} + i \left(1 - \frac{2J_1(\Delta_D)}{\Delta_D} \right) \right], \quad (12)$$

$$f4 = \pi \left\{ S_2 \left(\frac{2H_1(\Delta_D)}{\Delta_D} - 2H_0(\Delta_D) + \right. \right. \\ \left. \left. + i [J_0(\Delta_D) - J_2(\Delta_D) - 1] \right) + \frac{S_1}{2} [J_1(\Delta_D) + iH_1(\Delta_D)] \right\},$$

где $H_0(x)$, $H_1(x)$, $J_0(x)$, $J_1(x)$, $J_2(x)$ – функции Струве и Бесселя 1-го рода.

Используя (12), из (10) и (11) получим для фактора эффективности ослабления непоглощающего цилиндра ($\chi = 0$) в скалярном виде

$$Q_e = \frac{2}{S} \times \left\{ \begin{array}{l} \pi S_2 (1 - \cos \Delta_H) + S_1 \left(1 + \cos \Delta_H - \frac{2 \sin \Delta_H}{\Delta_H} \right) \\ \text{при } 0 \leq \theta_i < \arctg \left(\frac{D}{H} \right), \\ \pi \left[S_2 \left(1 + J_0(\Delta_D) - \frac{4J_1(\Delta_D)}{\Delta_D} - J_2(\Delta_D) \right) + \frac{S_1}{2} H_1(\Delta_D) \right] \\ \text{при } \arctg \left(\frac{D}{H} \right) \leq \theta_i \leq \frac{\pi}{2}, \end{array} \right. \quad (13)$$

отсюда в скалярном виде при $\theta_i = \pi/2$, как и ранее [3], имеем

$$Q_e = \pi H_1(\Delta_D). \quad (14)$$

Фактор эффективности поглощения Q_a по [3, 5] равен

$$Q_a = \int_V k \epsilon_r'' |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2 dV / S, \quad (15)$$

где $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ – полное электрическое поле внутри частицы; $\epsilon_r'' = -2n\chi$ – мнимая часть относительной диэлектрической проницаемости частицы ($m^2 = \epsilon_r' + i\epsilon_r''$).

В приближении ВКБ имеем (см. [5]):

$$Q_a = -2kn\chi \int |T(m, \theta_i)|^2 \exp[2k\chi(y' - y_1)] dV',$$

интегрирование по y' дает

$$Q_a = n \int |T(m, \theta_i)|^2 (1 - \exp[2k\chi(y'_2 - y'_1)]) ds'. \quad (16)$$

При значительной оптической «мягкости» частиц $n|T(m, \theta_i)|^2 \rightarrow 1$ выражение для фактора эффективности поглощения (16) в приближении ВКБ переходит в таковое в приближении АД с точностью до знака χ [2, 6, 7].

Из (16) для фактора эффективности поглощения цилиндра получим:

$$Q_{a||\perp} = \frac{n}{S} \times \left\{ \begin{array}{l} |T1_{||\perp}|^2 Q1_a + |T2_{||\perp}|^2 (Q1_a + Q2_a) \\ \text{при } 0 \leq \theta_i < \arctg \left(\frac{D}{H} \right), \\ |T2_{||\perp}|^2 Q3_a + |T1_{||\perp}|^2 (Q3_a + Q4_a) \\ \text{при } \arctg \left(\frac{D}{H} \right) \leq \theta_i \leq \frac{\pi}{2}, \end{array} \right. \quad (17)$$

где

$$Q1_a = S_1 Rq(-\Delta_H^{\text{Im}}), \\ Q2_a = (\pi S_2 - S_1) Rp(-\Delta_H^{\text{Im}}), \quad \Delta_H^{\text{Im}} = \frac{2kH\chi}{\cos \theta_i} = 2\text{Im}[\Delta_H], \\ Q3_a = |m+1|^2 S_2 \times \\ \times \int_0^1 |T3_{||\perp}(m, x)|^2 \sqrt{1-x^2} Rq(-\Delta_H^{\text{Im}} \sqrt{1-x^2}) dx, \\ \Delta_D^{\text{Im}} = \frac{2kD\chi}{\sin \theta_i} = 2\text{Im}[\Delta_D], \\ Q4_a = \frac{|m+1|^2}{4} \times \\ \times \int_0^1 |T3_{||\perp}(m, x)|^2 Rp(-\Delta_D^{\text{Im}} \sqrt{1-x^2}) (S_1 - 4S_2 \sqrt{1-x^2}) dx.$$

В скалярном виде из (18) следует

$$Q3_a = \pi S_2 \left[1 - \frac{2(I_1(\Delta_D^{\text{Im}}) - L_1(\Delta_D^{\text{Im}}))}{\Delta_D^{\text{Im}}} \right], \quad (19) \\ Q4_a = \pi \left\{ \frac{S_1}{2} [I_1(\Delta_D^{\text{Im}}) - L_1(\Delta_D^{\text{Im}})] - \right. \\ \left. - S_2 \left[1 - I_0(\Delta_D^{\text{Im}}) - I_2(\Delta_D^{\text{Im}}) + 2L_0(\Delta_D^{\text{Im}}) - \frac{2L_1(\Delta_D^{\text{Im}})}{\Delta_D^{\text{Im}}} \right] \right\},$$

где $I_1(x)$ и $L_1(x)$ – модифицированные функции Бесселя и Струве 1-го рода.

На рис. 2 показаны зависимости значений факторов эффективности ослабления и поглощения цилиндра в приближении ВКБ от фазового сдвига Δ (где $\Delta = 2ka|m-1|$) при $kH = 1500$ и бесконечно длинного цилиндра [8] (строгое решение) при $m = 1,1 + i \cdot 0,01$ для $\theta_i = 56^\circ$. Очевидно, что значения факторов эффективности ослабления и поглощения в приближении ВКБ с учетом поляризации по сравнению со скалярным видом (см. рис. 2) занижены.

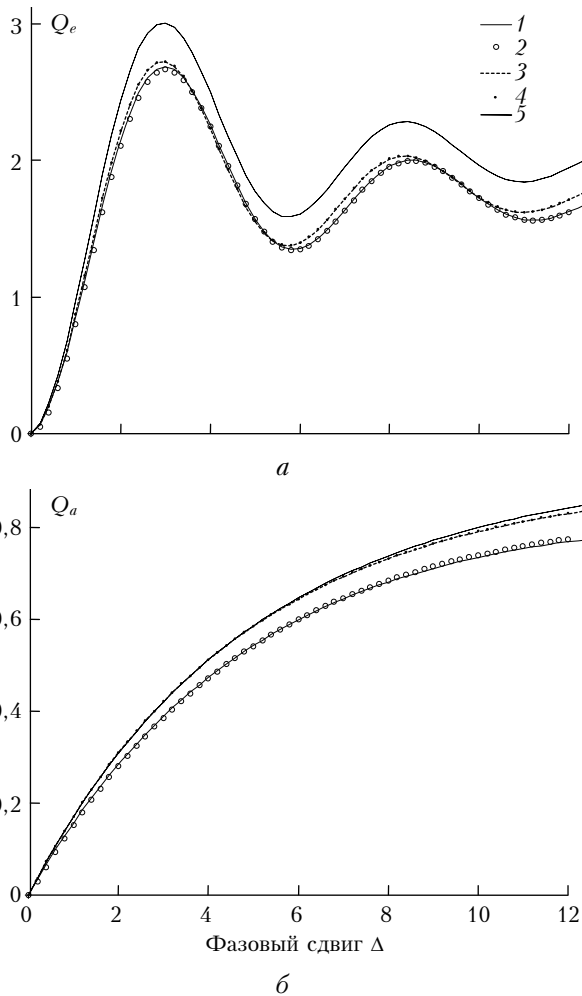


Рис. 2. Зависимость факторов эффективности ослабления Q_e (а) и поглощения Q_a (б) от фазового сдвига Δ для бесконечно длинного цилиндра $Q_{e||}$, $Q_{a||}$ (кривая 1) и $Q_{e\perp}$, $Q_{a\perp}$ (2), цилиндра конечной длины при $kH = 1500$ в приближении ВКБ $Q_{e||}$, $Q_{a||}$ (3), $Q_{e\perp}$, $Q_{a\perp}$ (4) и в скалярном виде приближения ВКБ Q_e , Q_a (5) с относительным показателем преломления $m = 1,1 + i \cdot 0,01$ для $\theta_i = 56^\circ$

Заключение

Получены выражения для расчета факторов эффективности ослабления и поглощения света оптически «мягким» круговым цилиндром конечной длины при падении света произвольной поляризации под любым углом относительно оси симметрии цилиндра в приближении ВКБ. Показано, что выражения для фактора эффективности ослабления однородной частицы любой формы в приближении ВКБ в скалярном виде и в приближении АД совпадают с точностью до знака χ . Отмечены незначительные различия для фактора эффективности поглощения однородной частицы любой формы в приближении ВКБ в скалярном виде и в приближении АД.

1. Волковицкий О.А., Павлова Л.Н., Петрушин А.Г. Оптические свойства кристаллических облаков. Л.: Гидрометеоздат, 1984. 200 с.
2. Петрушин А.Г. Рассеяние и ослабление излучения «мягкими» цилиндрами конечной длины // Оптика и спектроскопия. 1983. Т. 54. Вып. 5. С. 882–884.
3. Шаповалов К.А. Рассеяние света цилиндром конечной длины в приближении Вентцеля – Крамерса – Бриллюэна. 2. Факторы эффективности ослабления и поглощения // Оптика атмосфер. и океана. 2007. Т. 20. № 4. С. 318–320.
4. Лопатин В.Н., Шаповалов К.А. Оценка максимальных значений факторов эффективности светорассеяния в ВКБ-приближении // Оптика и спектроскопия. 1991. Т. 71. Вып. 3. С. 494–497.
5. Исмару А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах: Пер. с англ. М.: Мир, 1981. Т. 1. 280 с.
6. Ван де Хюлт Г. Рассеяние света малыми частицами. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1961. 536 с.
7. Осипов В.П., Иванов В.Д. Ослабление и поглощение излучения «мягкими» цилиндрами конечной длины // III Всесоюз. совещ. по распространению лазерного излучения в дисперсной среде: Тез. докл. Ч. 1. Обнинск, 1985. С. 170–173.
8. Борен К., Хафмен Д. Поглощение и рассеяние света малыми частицами: Пер. с англ. М.: Мир, 1986. 660 с.

K.A. Shapovalov. Light scattering of arbitrary oriented cylinder in Wentzel – Kramers – Brillouin approximation. 2. Efficiency factors of extinction and absorption.

The expressions for calculation of extinction and absorption efficiency factors by optically «soft» ($|m - 1| \ll 1$, where $m = n + i\chi$ is a relative refractive index of cylinder) circular finite cylinder for arbitrary polarized incident light in the direction at any angle to the axis of cylinder in Wentzel – Kramers – Brillouin (WKB) approximation are obtained. It is shown analytically that the expressions of extinction efficiency factor by homogeneous particle of any shape in WKB in scalar form and anomalous diffraction (AD) approximations are coincided to an accuracy of χ . It is noted that only under significant optical «softness» of particle ($|m - 1| \rightarrow 0$) the expression for the efficiency factor of absorption by homogeneous particle of any shape in WKB approximation in scalar form also goes into such expression for AD approximation.