«Оптика атмосферы и океана», **11**, N 4 (1998)

УДК 518.5, 535.434, 551.5

Н.Н. Белов, Г.В. Белокопытов, М.В. Журавлев

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ АМПЛИТУД ПАРЦИАЛЬНЫХ ВОЛН Ми ВНУТРИ КРУПНЫХ СФЕРИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ

Получены асимптотические представления амплитуд парциальных волн ряда Ми, которые не содержат специальных функций. Рассмотрена сходимость амплитуд в зависимости от показателя преломления крупной частицы. Проведен сравнительный анализ амплитуд парциальных волн, вычисленных по асимптотическим формулам и теории Ми. Полученные оценки целесообразно использовать для тестирования вычислительных алгоритмов расчета, построенных на точных формулах Ми.

Знание пространственного распределения оптических полей внутри сферических частиц необходимо для исследования широкого класса задач нелинейной оптики аэрозоля, таких как испарение и левитация аэрозольных частиц в поле мощного лазерного излучения, оптический разряд в аэрозоле, нелинейное рассеяние плоской электромагнитной волны на плазменных сгустках [1].

Ряды Ми, описывающие электромагнитные поля внутри сферических аэрозольных частиц, имеют весьма медленную сходимость вплоть до номеров, удовлетворяющих условию $n >> |m\rho|$, где m – комплексный показатель преломления вещества и ρ – параметр дифракции. Для корректного определения электромагнитного поля внутри сферической частицы требуются учет амплитуд парциальных волн высоких порядков, а также возможность рассчитывать функции Риккати–Бесселя первого (ФРБ1) и третьего рода (ФРБ3) с высокой точностью. Учет большого количества амплитуд парциальных волн не всегда приводит к увеличению точности расчета сумм рядов Ми. Это связано с потерей точности стандартных методов расчета ФРБ1 с комплексным аргументом $z = r - i\mu$, при возрастании индекса n и относительно больших значениях параметра дифракции ρ. Точность расчета ФРБ1 ограничивается разрядной сеткой ЭВМ, и для вычисления ФРБ1 с комплексным аргументом: $|\mathrm{Im}(m\rho)| > 30$ необходимо использовать двойное представление машинного числа [2]. При этом расчет ФРБ1 с использованием двойной точности методом восходящей рекурсии дает корректно рассчитанную последовательность ФРБ1 при относительно малых параметрах дифракции рассеяния света на частицах [3]. Алгоритм Миллера–Олвера–Темме, базирующийся на трехчленной рекуррентной зависимости, обеспечивает корректную процедуру расчета ФРБ1 в области $|z| < 30$ [4]. Возможности расширенного использования алгоритма рассмотрены в [5]. Точность метода зависит от начального номера итераций $N_p >> n$ и вида используемого нормировочного выражения. Показано, что использование нормировочного выражения, предложенного в [6], обеспечивает большую точность вычисления ФРБ1, чем при разложении в цепную дробь [7]. Сходимость метода цепных дробей при вычислении ФРБ1, который использован в [8] для вычисления сумм Ми, целиком связана с численной устойчивостью трехчленных рекуррентных соотношений [9]. Таким образом, для больших параметров дифракции, при любых методах численных расчетов, необходим контроль за вычислением коэффициентов рядов Ми путем сравнения получаемых результатов с приближенными формулами. Впервые этот подход применен в монографии [10], впоследствии его необходимость и плодотворность обсуждались в [2].

В настоящей статье представлены полученные нами простые асимптотические выражения, не содержащие специальных функций, для амплитуд парциальных волн внутри сферической частицы с номером $n \gg |m\rho|$, с учетом степени роста параметра дифракции одновременно с n, в той области, где стандартные методы расчета ФРБ1 неприменимы. Такой подход обеспечивает анализ амплитуд парциальных волн внутри крупных частиц $\rho > 100$, а также расширяющегося сферического плазменного очага оптического пробоя [11].

Записывая амплитуды парциальных волн в удобном для вычислений виде [12], имеем:

$$c_n = m\frac{\Psi_n(\rho)}{\Psi_n(m\rho)}\left(\frac{D_n(\rho) - C_n(\rho)}{D_n(m\rho) - mC_n(\rho)}\right); \tag{1}$$

$$d_n = m\frac{\Psi_n(\rho)}{\Psi_n(m\rho)}\left(\frac{D_n(\rho) - C_n(\rho)}{mD_n(m\rho) - C_n(\rho)}\right), \tag{2}$$

где $D_n(\rho)$ и $C_n(\rho)$ – соответственно логарифмические производные ФРБ1 и ФРБ3 [13]:

$$D_n(\rho) = \Psi'_n(\rho) \,/\, \Psi_n(\rho); \tag{3}$$

$$C_n(\rho) = \zeta'_n(\rho) \,/\, \zeta_n(\rho). \tag{4}$$

По определению ФРБ1 и ФРБ3 имеем:

$$\Psi_n(z) = \sqrt{1/2(\pi z)}J_{n+1/2}(z); \tag{5}$$

$$\zeta_n(z) = \sqrt{1/2(\pi z)}H^{(2)}_{n+1/2}(z). \tag{6}$$

Для получения искомой оценки воспользуемся асимптотическими выражениями для функций Бесселя и Ханкеля второго рода при условии $|z| \le c(n+3/2)^{1/2}$, $z \to \infty$, $n \to \infty$, $c > 0$ [14]:

$$J_{n+1/2}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{n+1/2} \frac{1}{\Gamma(n+3/2)} \times$$

$$\times \exp\left[-z^2/4(n+3/2)\right]\left[1+O(1/n)\right]; \tag{7}$$

$$H^{(2)}_{n+1/2}(z) = \frac{i}{\pi}\left(\frac{z}{2}\right)^{-(n+1/2)} \Gamma(n+1/2) \times$$

$$\times \exp\left[z^2/4(n+1/2)\right]\left[1+O(1/n)\right], \tag{8}$$

где $\Gamma(n + 1/2)$ – гамма функция, и следующими из них соотношениями для логарифмических производных:

$$D_n(z) = (n+1)/z; \tag{9}$$

$$C_n(z) = -n/z. \tag{10}$$

Подстановка формул (5)–(10) в исходные соотношения (1)–(4) дает асимптотические выражения для парциальных амплитуд:

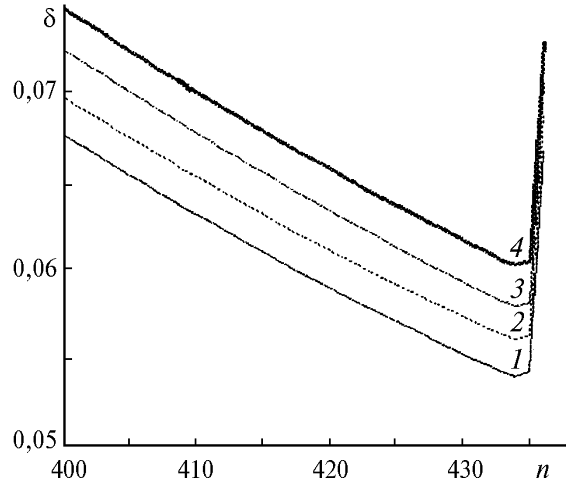
$$c_n = \frac{(2n+1)}{(n+1)} \frac{1}{(1+m^2)m^{n-1}} \times$$

$$\times \exp\left[(m^2-1)\rho^2/4(n+3/2)\right]; \tag{11}$$

$$d_n = \frac{1}{m^n}\exp\left[(m^2-1)\rho^2/4(n+3/2)\right]. \tag{12}$$

Рассматривая асимптотические формулы (11), (12) при условии одновременного роста ρ и $n \to \infty$ и вещественных $m^2 > 1$, получаем, что амплитуды имеют возрастающую степенную функцию в знаменателе, что и обеспечивает сходимость сумм Ми [12]. При вещественных $m^2 \le 1$ (этот случай соответствует плазменной сфере с пренебрежимо малым поглощением) амплитуды парциальных волн имеют убывающую показательную функцию в знаменателе и вследствие этого стремятся к бесконечности. Однако при суммировании в ряде Ми амплитуды умножаются на ФРБ1 и ее производные, что в конечном счете и обеспечивает сходимость сумм Ми, но весьма медленную.

На рисунке представлены относительные отклонения амплитуд парциальных волн, рассчитанные стандартными методами, а именно по алгоритму Миллера–Олвера–Темме и двухточечным рекуррентным формулам нисходящей рекурсии для логарифмических производных [15], от рассчитанных по формулам (11), (12). Вычисления производились для сферической частицы Al_2O_3 (корунда) с $m = 1{,}829 - i5{,}47 \cdot 10^{-3}$, радиуса 20 мкм, на длине волны 1,06 мкм. Цифрами *1* и *2* обозначены вещественная и мнимая части относительного отклонения δ для амплитуд c_n, *3* и *4* соответственно для амплитуд d_n. После $n > 340$ происходит резкий одновременный скачок вещественной и мнимой частей амплитуд, это связано с накоплением ошибок при расчете стандартными методами.



Таким образом, с помощью указанных асимптотик показаны сходимость амплитуд $n \to \infty$ и вещественных $m^2 > 1$ и расходимость в случае $m^2 \le 1$. Использование их совместно с асимптотическими представлениями Мейсселя, рассмотренными авторами в [16], существенно расширяет вычислительные возможности теории Ми для крупных сферических плазменных сгустков и крупных поглощающих частиц с параметром дифракции $\rho > 100$. Указанные асимптотики могут эффективно контролировать процесс вычислений по стандартным алгоритмам [5,8]. Следует обратить внимание на то, что в случае плазменных сгустков ($m^2 \le 1$) для корректного расчета сумм Ми необходимо учитывать более длинную последовательность амплитуд парциальных волн.

1. *Зуев В.Е., Копытин Ю.Д., Кузиковский А.В.* Нелинейные оптические эффекты в аэрозолях. Новосибирск: Наука, 1980. 173 с.
2. *Дейрменджан Д.* Рассеяние электромагнитного излучения сферическими полидисперсными частицами. М.: Мир, 1971. 165 с.
3. *Белов Н.Н.* // Оптика атмосферы и океана. 1992. Т. 5. N 2. С. 165–168.
4. *Бабушкина Л.В., Керимов М.К., Никитин А.И.* // ЖВМ и МФ. 1988. Т. 28. N 12. С. 1779–1787.
5. *Пришивалко А.П., Бабенко В.А., Кузьмин В.Н.* Рассеяние и поглощение света неоднородными и анизотропными сферическими частицами. Минск: Наука и техника, 1984. 263 с.

6. *Акулинин А.А.* // Оптика атмосферы. 1988. Т. 1. N 6. С. 127–129.
7. *Lentz W.J.* // Appl. Opt. 1976. V. 15. N 3. P. 668–671.
8. *Белов Н.Н.* // Оптика атмосферы. 1991. Т. 4. N 3. С. 321.
9. *Gautschi W.*// Siam. Rev. 1967. V. 9. N 1. P. 24–82.
10. *Шифрин К.С.* Рассеяние света в мутной среде. 1951. 288 с.
11. *Копытин Ю.Д., Сорокин Ю.М., Скрикин А.М., Белов Н.Н., Букатый В.И.* Оптический разряд в аэрозолях. Новосибирск.: Наука, 1990. 159 с.
12. *Kerker M., Cooke D.* // Appl. Opt. 1973. V. 12. N 7. P. 1378–1379.
13. *Kattawar G.W., Plass G.V.* // Appl. Opt. 1967. V. 6. N 8. P. 1377–1382.
14. *Керимов М.К., Скороходов С.Л.*// ЖВМ и МФ. 1990. Т. 30. N 12. С. 1775–1784.
15. *Aden A.L.* // J. Appl. Phys. 1951. V. 22. N 5. P. 601–605.
16. *Белов Н.Н., Журавлев М.В., Пьянков Е.Е.* // Оптика атмосферы и океана. 1996. Т. 9. N 1. С. 145–147.

ГНЦ. Научно-исследовательский
физико-химический институт им. Л.Я. Карпова, Москва

Поступила в редакцию
5 июня 1997 г.

N.N. Belov, G.V. Belokopytov, M.V. Zhouravlev. **Asymptotic Estimations in Calculations of Optical Fields within Large Spherical Particles.**

Calculations of coefficients for optical field within large spherical particles and plasma sphere are carried out by use of the asymptotic formulas and Mie’s series. The spherical function of the first kind of Riccati–Bessel has been calculated as the asymptotic formulas. The formulas are applied as the test estimation by Mie’s series.