

УДК 551.46

А.В. Аргучинцева, В.К. Аргучинцев

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАГРЯЗНЕНИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОД СУШИ

Предлагается численная модель переноса примесей в реках на основе решения уравнений теории мелкой воды и полуэмпирического уравнения турбулентной диффузии.

Приведены результаты численных экспериментов для участка реки Ангары.

Обзоры литературы по математическому моделированию загрязнения гидросферы приведены в монографиях [1–3 и др.].

Для изучения загрязнения водоемов можно воспользоваться полуэмпирическим уравнением турбулентной диффузии. Необходимо отметить, что поле скорости и коэффициенты турбулентной диффузии при этом не могут быть определены с достаточной степенью точности на основе существующей гидрологической сети наблюдений.

В данной статье гидрологические характеристики находятся на основе решения уравнений теории мелкой воды [4] с параметризацией влияния силы трения о дно и учетом турбулентного обмена по горизонтали:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -g \frac{\partial(h + \delta)}{\partial x} + \\ &+ lv + \frac{\partial}{\partial x} k_x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} k_y \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{ru|\mathbf{v}|}{h}; \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -g \frac{\partial(h + \delta)}{\partial y} - \\ &- lv + \frac{\partial}{\partial x} k_x \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} k_y \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{rv|\mathbf{v}|}{h}; \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial uh}{\partial x} + \frac{\partial vh}{\partial y} &= 0, \quad |\mathbf{v}| = \sqrt{u^2 + v^2}, \end{aligned} \tag{1}$$

где t – время; u, v – компоненты вектора скорости движения воды вдоль осей декартовой прямоугольной системы координат x и y ; g – ускорение свободного падения; h – глубина водоема; $l = 2\omega \sin\varphi$ – параметр Кориолиса; ω – угловая скорость суточного вращения Земли; φ – широта; k_x, k_y – коэффициенты турбулентного обмена соответственно вдоль осей координат x и y ; $\delta(x, y)$ – функция, описывающая рельеф дна; r – коэффициент придонного трения.

Система дифференциальных уравнений в частных производных (1) решается при начальных условиях:

$$u(x, y, 0) = u^0(x, y), \quad v(x, y, 0) = v^0(x, y), \quad h(x, y, 0) = h^0(x, y).$$

Контур области интегрирования состоит из твердой части и открытых границ. На твердой части контура задается условие прилипания. На открытых границах задаются значения искоемых функций или их производных в зависимости от направления скорости течения.

В соответствии с предлагаемым методом решения, используя уравнение неразрывности, преобразуем систему уравнений (1) к следующему виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{2} u \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial uU}{\partial x} + \frac{1}{2} v \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial vU}{\partial y} &= \\ &= -gH \frac{\partial(h + \delta)}{\partial x} + lV + \frac{\partial}{\partial x} k_x \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} k_y \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{rU|\mathbf{v}|}{h}; \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} u \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial uV}{\partial x} + \frac{1}{2} v \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial vV}{\partial y} &= \\ &= -gH \frac{\partial(h + \delta)}{\partial y} - lU + \frac{\partial}{\partial x} k_x \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} k_y \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{rV|\mathbf{v}|}{h}; \tag{2} \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial HU}{\partial x} + \frac{\partial HV}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

Здесь введены следующие обозначения: $H = \sqrt{h}$; $U = Hu$; $V = Hv$.

Интегрирование системы уравнений (2) проводится численно в декартовой системе координат с применением метода фиктивных областей [5], позволяющего учитывать произвольный рельеф дна водоемов.

Для дискретизации уравнений (2) по времени используются схема Кранка–Николсона и двуциклический метод покомпонентного расщепления [5].

Введем сетку с основными узловыми точками

$$x_i = i\Delta x; \quad y_j = j\Delta y, \quad i = \overline{1, I}; \quad j = \overline{1, J}.$$

Используем также вспомогательные точки $x_{i+1/2}, y_{j+1/2}$, расположенные в серединах основных интервалов.

Для компактности дальнейшего изложения обозначим:

$\Psi_{i,j} = \Psi(x_i, y_j, t_n)$, $t_n = n \Delta t$ ($n = 0, 1, \dots$);

$$(A_1 \Psi)_{i,j} = \frac{u_{i+1/2,j}^n \Psi_{i+1,j} - u_{i-1/2,j}^n \Psi_{i-1,j}}{2\Delta x}$$

$$\frac{k_{x_{i+1/2,j}}^n (\Psi_{i+1,j} - \Psi_{i,j})}{\Delta x^2} - \frac{k_{x_{i-1/2,j}}^n (\Psi_{i,j} - \Psi_{i-1,j})}{\Delta x^2};$$

$$(A_2 \Psi)_{i,j} = \frac{v_{i,j+1/2}^n \Psi_{i,j+1} - v_{i,j-1/2}^n \Psi_{i,j-1}}{2\Delta y}$$

$$- \frac{k_{y_{i,j+1/2}}^n (\Psi_{i,j+1} - \Psi_{i,j})}{\Delta y^2} - \frac{k_{y_{i,j-1/2}}^n (\Psi_{i,j} - \Psi_{i,j-1})}{\Delta y^2};$$

$$(B_1 h)_{i,j} = gH_{i,j}^n \frac{h_{i+1,j} + \delta_{i+1,j} - h_{i-1,j} - \delta_{i-1,j}}{2\Delta x};$$

$$(B_2 h)_{i,j} = gH_{i,j}^n \frac{h_{i,j+1} + \delta_{i,j+1} - h_{i,j-1} - \delta_{i,j-1}}{2\Delta y};$$

$$(D_1 U)_{i,j} = \frac{H_{i+1,j}^n U_{i+1,j} - H_{i-1,j}^n U_{i-1,j}}{2\Delta x};$$

$$(D_2 V)_{i,j} = \frac{H_{i,j+1}^n U_{i,j+1} - H_{i,j-1}^n V_{i,j-1}}{2\Delta y};$$

$$(K\Psi)_{i,j} = \frac{1}{2} l_{i,j} \Psi_{i,j}; \quad (\varphi\Psi)_{i,j} = \frac{1}{2} \frac{r |\mathbf{v}_{i,j}^n| \Psi_{i,j}}{h_{i,j}},$$

где Ψ – одна из функций рассматриваемой задачи; Δt – шаг по времени.

Далее введем матричные операторы

$$M_1 = \begin{vmatrix} A_1 + \varphi & -K & B_1 \\ K & A_1 + \varphi & 0 \\ D_1 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} A_2 + \varphi & -K & 0 \\ K & A_2 + \varphi & B_2 \\ 0 & D_2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Тогда конечно-разностные аналоги системы уравнений (2) могут быть записаны в виде

$$\left(E + \frac{\Delta t}{2} M_1^n\right) N^{n-1/2} = \left(E - \frac{\Delta t}{2} M_1^n\right) N^{n-1};$$

$$\left(E + \frac{\Delta t}{2} M_2^n\right) N^n = \left(E - \frac{\Delta t}{2} M_2^n\right) N^{n-1/2};$$

$$\left(E + \frac{\Delta t}{2} M_2^n\right) N^{n+1/2} = \left(E - \frac{\Delta t}{2} M_2^n\right) N^n;$$

$$\left(E + \frac{\Delta t}{2} M_1^n\right) N^{n+1} = \left(E - \frac{\Delta t}{2} M_1^n\right) N^{n+1/2},$$

где $N = \begin{vmatrix} U \\ V \\ h \end{vmatrix}$; E – единичная матрица.

Используемая конечно-разностная схема покомпонентного расщепления имеет второй порядок аппроксимации по Δx , Δy и первый по Δt , сохраняет массу и полную энергию системы [6]. Система уравнений решается методом матричной факторизации [7].

Для моделирования распространения примесей в водоемах рассмотрим уравнение переноса и диффузии пассивной примеси на мелкой воде [4]:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} k_x \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} k_y \frac{\partial C}{\partial y} + F, \quad (3)$$

где $F(x, y, t)$ – функция, описывающая распределение и мощность источников рассматриваемой субстанции.

Из-за отсутствия детальной информации из наблюдений в качестве начальных условий примем C , равное фоновому распределению. На границах ставятся условия второго рода. При этом потоки примеси через твердые границы водоема предполагаются отсутствующими.

Используя уравнение неразрывности, преобразуем (3) к следующему виду:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2} u \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial u S}{\partial x} + \frac{1}{2} v \frac{\partial S}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial v S}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} k_x \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} k_y \frac{\partial S}{\partial y} + f, \quad (4)$$

где $S = CH$; $f = FH$.

Тогда конечно-разностные аналоги уравнения (4) могут быть записаны в виде

$$\left(E + \frac{\Delta t}{2} A_1^n\right) S^{n-1/2} = \left(E - \frac{\Delta t}{2} A_1^n\right) S^{n-1};$$

$$\left(E + \frac{\Delta t}{2} A_2^n\right) S^n = \left(E - \frac{\Delta t}{2} A_2^n\right) S^{n-1/2} + \Delta t f;$$

$$\left(E + \frac{\Delta t}{2} A_2^n\right) S^{n+1/2} = \left(E - \frac{\Delta t}{2} A_2^n\right) S^n + \Delta t f;$$

$$\left(E + \frac{\Delta t}{2} A_1^n\right) S^{n+1} = \left(E - \frac{\Delta t}{2} A_1^n\right) S^{n+1/2}.$$

Для численной реализации конечно-разностных уравнений используется немонотонная прогонка [8].

Далее перейдем к описанию результатов численного моделирования динамики загрязнения воды при вероятных нарушениях герметичности проектируемого перехода трубопровода через реку Ангару на расстоянии 34–37 км судового хода от г. Иркутска. На этом участке река делает левый поворот, а на расстоянии 34,5 км судового хода ее русло делится островом Ашун. Глубины реки снимались с батиметрической карты масштаба 1:5000 с шагом 25 м.

На рис. 1 приведено скоростное поле потока, рассчитанное на основе предложенной гидродинамической модели.

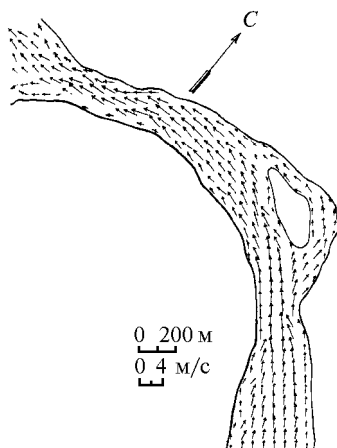


Рис. 1. Схема поверхностных течений

Расчеты загрязнения реки производились для различных вариантов аварийного разрыва газопровода. Мощность источника задавалась равной 0,1 л/с. Точки разрыва выбраны в створе, где намечалась прокладка газопровода. Первая точка расположена у правого берега реки, вторая – на середине и третья – у левого берега. Расчеты велись для жидких углеводородов (фракция, близкая к бензину), находящихся в газе. Предельно допустимая концентрация газоконденсата в воде не должна превышать 0,05 мг/л.

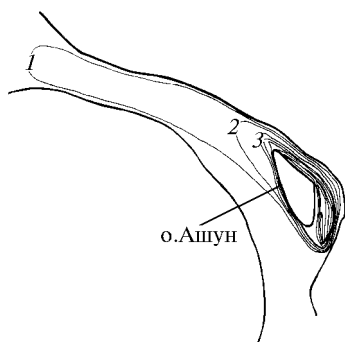


Рис. 2. Поле загрязнения воды при прорыве газопровода у правого берега реки

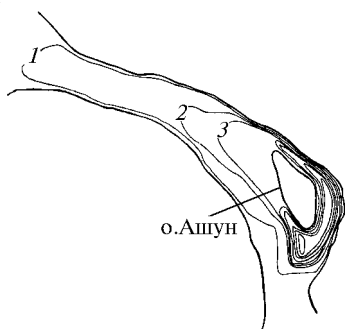


Рис. 3. Поле загрязнения воды при прорыве газопровода в середине реки

Иркутский государственный университет

A.V. Arguchintseva, V.K. Arguchintsev. Numerical Simulation of Pollution of Surface Water.

In this paper a numerical model of admixtures transport in rivers is discussed. The model is based on solutions of the shallow water equations and the semiempirical equation of turbulent diffusion. The results of numerical experiments are presented for a concrete area of Angara River.

Первая серия расчетов характеризует загрязнение воды за время срабатывания аварийных кранов, равное 90 с. При разрыве газопровода у правого берега реки основное пятно загрязнения сосредоточено в окрестности точки разрыва, так как здесь наблюдаются небольшие скорости течения воды. Наибольшая концентрация вещества составляет 10 мг/л. При разрыве газопровода на середине реки и у левого берега пятно загрязнения вытягивается по направлению течения. Наибольшая концентрация вещества составляет 4–5 мг/л, так как скорости течения вблизи точек разрыва больше, чем в первом случае.

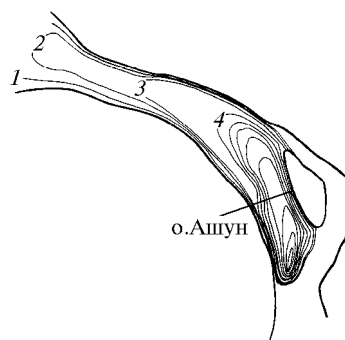


Рис. 4. Поле загрязнения воды при прорыве газопровода у левого берега реки

Следующая серия расчетов проведена для тех же точек разрыва, когда действует стационарный непрерывный источник в течение 30 мин (рис. 2–4). Изолинии проведены через 10 пдк; первая изолиния оконтуривает загрязнение со значением концентрации, равным 1 пдк. Процесс распространения примеси в центре реки и у ее левого берега происходит быстрее, чем у правого. Это связано с динамикой течений, так как поток в этой части реки обладает большими скоростями, что соответственно приводит к быстрому распространению примеси вдоль реки, создавая угрозу для водозабора г. Ангарска.

1. Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука, 1982. 319 с.
2. Озмидов Р.В. Диффузия примесей в океане. Л.: Гидрометеиздат, 1986. 280 с.
3. Дружинин Н.И., Шишкин А.И. Математическое моделирование и прогнозирование загрязнения поверхностных вод суши. Л.: Гидрометеиздат, 1989. 390 с.
4. Вольцингер Н.Е., Пясковский Р.В. Теория мелкой воды. Л.: Гидрометеиздат, 1977. 207 с.
5. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989. 608 с.
6. Скиба Ю.Н. // Метеорология и гидрология. 1995. N 2. С. 55–65.
7. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967. 196 с.
8. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 592 с.

Поступила в редакцию
6 августа 1997 г.