

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИКИ АТМОСФЕРЫ И ОКЕАНА

УДК 535.36:551.521.3

В.В. Веретенников

О ВОССТАНОВЛЕНИИ ПРОФИЛЯ КОЭФФИЦИЕНТА ОСЛАБЛЕНИЯ ПО ОПТИЧЕСКОЙ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ СРЕДЫ ПРИ МНОГОКРАТНОМ РАССЕЯНИИ В МАЛОУГЛОВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Предложен метод восстановления пространственного распределения коэффициента ослабления неоднородной грубодисперсной среды по ее оптической передаточной функции. Метод основан на решении уравнения переноса излучения в малоугловом приближении. Получены приближенные соотношения для оценки расстояния до рассеивающего слоя и его толщины. Описан регуляризирующий алгоритм решения обратной задачи и в численном эксперименте исследованы его точностные характеристики.

Введение

Оптические методы являются эффективным средством изучения структуры дисперсных сред, к числу которых относится аэрозольная компонента атмосферы. Среди существующих методов оптической диагностики аэрозольных сред большая часть основана на явлении однократного рассеяния света и в силу этого ограничена областью слабозамутненной атмосферы. С увеличением оптической плотности дисперсной среды начинают проявляться эффекты многократного рассеяния света, учет которых в задачах диагностики представляет достаточно серьезную проблему.

Для исследования пространственной структуры аэрозольной компоненты атмосферы могут применяться методы лидарного зондирования [1, 2], а также методы трансмиссионной томографии атмосферы [3, 4]. В лидарных методах одним из способов учета эффекта многократного рассеяния в измеряемых сигналах является его численная оценка на основе решения уравнения переноса излучения (УПИ) для различных геометрических схем эксперимента и оптических моделей атмосферы с последующим включением соответствующих поправок в уравнение лазерной локации [5, 6]. При этом для интерпретации фактически используется только часть оптического сигнала, обусловленная однократным рассеянием, вклад которой уменьшается с ростом замутненности среды. Разность между суммарным сигналом и сигналом однократного рассеяния представляется как возмущение, подлежащее учету.

В [7] предложен метод диагностики оптически плотных дисперсных сред, в котором многократно рассеянное излучение рассматривается не как помеха, а как информативная составляющая измеренного сигнала, используемого при интерпретации. Метод [7] основан на решении УПИ в малоугловом приближении, которое позволяет установить связь в аналитическом виде между дисперсным составом среды и угловым распределением многократно рассеянной плоской волны.

В данной статье малоугловое приближение УПИ анализируется применительно к задаче восстановления пространственной структуры сильно замутненной аэрозольной атмосферы по данным о ее оптической передаточной функции (ОПФ). ОПФ среды является Фурье образом другой важной характеристики среды – функции рассеяния точки (ФРТ) – и играет ключевую роль при переносе изображения в рассеивающих средах. Вопросы теоретического и экспериментального определения ОПФ (ФРТ) подробно рассмотрены, например, в [8, 9]. ОПФ среды зависит как от индикатрисы рассеяния, характеризующей локальные свойства рассеивающего объема, так и от пространственного распределения коэффициентов рассеяния и ослабления вдоль направления распространения излучения. Главное внимание в работе будет уделено исследованию возможностей восстановления профиля коэффициента ослабления среды по данным о ее ОПФ. Отметим также, что информация об индикатрисе рассеяния, содержащаяся в ОПФ, позволяет рассмотреть другую обратную задачу – по восстановлению

дисперсного состава среды. В отличие от метода [7], основанного на измерении угловой структуры многократно рассеянного излучения, в последнем случае исходная информация для решения обратной задачи может быть получена путем измерения пространственного распределения освещенности в поперечном сечении узкого светового пучка, прошедшего рассеивающую среду. Данный вопрос имеет самостоятельный интерес и будет рассмотрен в отдельной статье.

1. Исходные уравнения. Математическая формулировка обратной задачи

ОПФ среды $F(v, z)$ можно получить из общего решения УПИ в малоугловом приближении в частотной области в следующем виде [10]:

$$F(v, z) = \exp \{ -\tau(z) + g(v) \}, \quad (1)$$

где

$$\tau(z) = \int_0^z \varepsilon(s) ds, \quad (2)$$

$$g(v) = \int_0^z \sigma(z-s) x(v, s) ds, \quad (3)$$

v – пространственная частота; σ, ε – коэффициенты рассеяния и ослабления; τ – оптическая толщина среды на интервале $[0, z]$; $x(p)$ – Фурье трансформанта малоугловой индикатрисы рассеяния. Функция $x(p)$ в приближении дифракции Фраунгофера с точностью до масштаба совпадает со средней по размерам автокорреляционной функцией тени частиц $\varphi(\rho)$, отнесенной к площади их поперечного сечения $x(p) = \varphi(p/k)$, $k = 2\pi/\lambda$, где λ – длина волны. Для полидисперсного ансамбля сферических рассеивателей автокорреляционная функция $\varphi(\rho)$ может быть выражена в виде интеграла [7]:

$$\varphi(\rho) = \int_{\rho/2}^R Q(\rho, r) f(r) dr, \quad (4)$$

где $f(r) = s(r)/S$, $s(r) = \pi r^2 n(r)$, $n(r)$ – распределение счетной концентрации частиц по размерам, $S = \int_0^R s(r) dr$ – суммарное геометрическое сечение частиц в единичном объеме рассеивающей среды; $Q(\rho, r) = G(\rho/2r)$ – функция автокорреляции тени одной частицы радиуса r , отнесенная к площади ее поперечного сечения:

$$G(t) = \begin{cases} 2\pi^{-1} [\arccos t - t\sqrt{1-t^2}], & t \leq 1, \\ 0, & t > 1. \end{cases} \quad (5)$$

Соотношения (1)–(4) справедливы при ограничениях [11] $kr |m-1| \gg 1$ (m – комплексный показатель преломления частиц среды), $\tau < 8$, связанных с общими условиями применимости малоуглового приближения УПИ [8, 12] и спецификой представления Фурье трансформанты индикатрисы рассеяния в виде (4).

При сделанных предположениях выполняются соотношения $\varepsilon = 2S$, $\sigma = S$, а функция $g(v)$ (3) и, следовательно, ОПФ среды $F(v)$ непосредственно выражаются через микроструктурные параметры среды в виде интегрального преобразования

$$g(v) = \frac{1}{2} \int_0^z \int_0^R G(v s/2 k r) \varepsilon(z-s) f(r) dr ds. \quad (6)$$

Выражение (6) можно рассматривать как интегральное уравнение для определения нормированного спектра размеров $f(r)$ (при известном профиле $\varepsilon(s)$) либо, наоборот, для восстановления профиля коэффициента ослабления $\varepsilon(s)$ при априорно заданной форме распределения частиц по размерам. В дальнейшем будем иметь дело с последней задачей, которую представим в стандартной форме интегрального уравнения первого рода

$$\int_0^z K(v, s) \tilde{\varepsilon}(s) ds = g(v) \quad (7)$$

относительно функции $\tilde{\varepsilon}(s) = \varepsilon(z - s)$ с ядром $K(v, s) = \varphi(v s/k)/2$. Исходная информация при обращении интегрального уравнения (7) задается функцией $g(v)$, которая однозначно выражается через ОПФ среды:

$$g(v) = \ln F(v) + \tau. \quad (8)$$

С учетом свойств функции $G(t)$ можно показать, что $\varphi(0) = 1$ и $F(0) = \exp(-\tau/2)$, а правая часть интегрального уравнения (7) представляется в окончательном виде

$$g(v) = \ln (F(v)/ F^2(0)). \quad (9)$$

2. Структурный анализ обратной задачи

Рассмотрим некоторые аналитические свойства ядра $K(v, s)$ интегрального уравнения (7), которые определяют основные закономерности поведения функции $g(v)$ (а следовательно, и поведение ОПФ среды $F(v)$) и характеризуют информативность измерений ОПФ относительно пространственного распределения коэффициента ослабления $\varepsilon(s)$. Исходя из свойств функций $G(t)$ и $f(r)$, нетрудно показать, что ядро $K(v, s)$ – непрерывная, монотонно убывающая выпуклая вниз функция по каждому из аргументов v и s с областью определения $0 \leq s \leq z$, $0 \leq v < \infty$ и областью изменения $0 \leq K(\cdot) \leq 0,5$. Определим значение частоты $v_0 = 2 kR/z$. Тогда при $v \geq v_0$ ядро обращается в нуль, $K(v, s) = 0$, для всех значений s из промежутка $[s_1, z]$, где $s_1 = z v_0/v$. Отсюда следует, что при $v \geq v_0$ верхний предел интегрирования в (7) будет равен s_1 , т.е. является функцией частоты v . Поэтому для значений $v \geq v_0$ функция $g(v)$ не содержит информации о распределении $\tilde{\varepsilon}(s)$ на интервале $[s_1, z]$. Поскольку $\tilde{\varepsilon}(s) = \varepsilon(z - s)$, то при $v \geq v_0$ величина $g(v)$ будет определяться значениями коэффициента ослабления $\varepsilon(s)$ в интервале $[z - s_1, z]$, т.е. в ближней к приемнику зоне. Таким образом, с ростом частоты, начиная с $v = v_0$, в формировании ОПФ среды не будет участвовать область рассеивающего объема, расположенная на расстоянии, большем, чем s_1 от приемника.

Из отмеченных свойств ядра $K(v, s)$ и неотрицательности коэффициента ослабления $\varepsilon(s)$ следует, что функция $g(v)$ – неотрицательная, монотонно убывающая и выпуклая вниз при $0 \leq v < \infty$:

$$0 \leq g(v) \leq \tau/2; \quad g'(v) \leq 0; \quad g''(v) \geq 0.$$

Причем если рассеивающий слой находится на некотором расстоянии H от приемника, то $g(v) = 0$ при $v > v_{\max} = 2 k R/H$. Это означает, что спектр частот, для которых ОПФ рассеянной компоненты отлична от нуля, будет ограничен. Ширина спектра прямо пропорциональна размерам рассеивающих частиц и обратно пропорциональна расстоянию до слоя. Это позволяет по ширине спектра оценивать дальность до ближней границы рассеивающего слоя. Реально можно получить оценку граничной частоты v_{\max}^* из условия $g(v_{\max}^*) = \delta$, где δ – некоторая достаточно малая положительная величина. При этом соответствующая оценка расстояния до слоя H^* будет завышенной. Например, для гауссовой модели слоя с оптической тол-

щиной $\tau = 1$, ближняя граница которого расположена на удалении 7,1 км от приемника, при $\delta = 0,01$ оценка H^* составляет 7,8 км.

Важную информацию о структуре слоя дает анализ наклона кривой $g(v)$ в нуле. С учетом выражения для производной

$$G'(t) = -(2/\pi) \sqrt{1-t^2},$$

дифференцируя (7) по v и полагая в полученном выражении $v = 0$, будем иметь

$$g'(0) = -\frac{A}{k\pi} \int_0^z \varepsilon(z-s) s ds, \quad (10)$$

где множитель A определяется микроструктурой среды

$$A = \int_0^R r^{-1} f(r) dr \quad (11)$$

и может быть выражен через интегральные микроструктурные параметры в виде

$$A = \pi N \bar{r}_n / S, \quad (12)$$

где N – счетная концентрация частиц; \bar{r}_n – средний по распределению $n(r)$ радиус частиц. В частном случае монодисперсной среды с частицами радиуса R будем иметь $A = 1/R$.

Представляя интеграл в (10) в виде

$$T = \int_0^z \varepsilon(s) (z-s) ds, \quad (13)$$

можно показать, что отношение

$$L = T/\tau \quad (14)$$

определяет расстояние от приемника до <центра тяжести> рассеивающего слоя. Таким образом, по величине производной $g'(v)$ в нуле можно оценить положение слоя на линии визирования.

При некоторых дополнительных упрощающих предположениях формула (10) может служить основой для оценки геометрической толщины рассеивающего слоя. Рассмотрим рассеивающий слой толщиной D , ближняя граница которого расположена на расстоянии H от наблюдателя. Определяя эффективное значение коэффициента ослабления в слое

$$\varepsilon_0 = \int_H^{H+D} \varepsilon(z-s) s ds \left[\int_H^{H+D} s ds \right]^{-1}, \quad (15)$$

будем иметь

$$T = \varepsilon_0 D(H + D/2). \quad (16)$$

Полагая приближенно $\tau = \varepsilon_0 D$, получим из (16) формулу для оценки геометрической толщины D рассеивающего слоя:

$$D = 2(T/\tau - H), \quad (17)$$

где

$$T = k\pi \left| g'(0) \right| / A.$$

В качестве примера на рис. 1 приведены результаты расчета в зависимости от параметра $\gamma = \nu/2kR$ функции $g(\gamma)$ для трех положений рассеивающего слоя, моделируемого нормальным распределением со средним значением z_m и дисперсией σ^2 . Кривые 1–3 соответствуют значениям параметра $z_m = 2; 5$ и 8 км при $\sigma = 0,5$ км. Как видно из рис. 1, наклон кривых $g(\gamma)$ в нуле однозначно определяется положением слоя. Влияние толщины слоя, характеризуемой дисперсией σ^2 , при фиксированном положении его центра ($z_m = 5$ км) показано на рис. 2, где кривые 1–3 соответствуют значениям параметра $\sigma = 0,1; 0,5$ и $1,0$ км. Из представленных на рис. 2 результатов видно, что при изменении толщины слоя в 10 раз поведение функции $g(\gamma)$ в низкочастотной области ($\gamma < 0,1$ км⁻¹) остается стабильным, а характерные различия проявляются в области больших частот ($\gamma > 0,15$ км⁻¹).

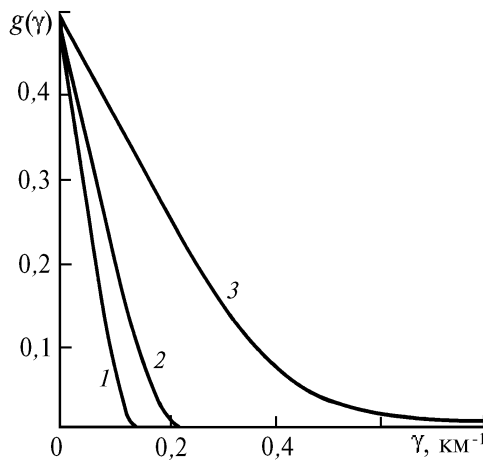


Рис. 1. Численное моделирование решения прямой задачи (7) для гауссовой модели рассеивающего слоя с параметрами (z_m, σ^2) со средними значениями z_m : кривая 1 – 2; 2 – 5; 3 – 8 км при $\sigma = 0,5$ км, $\tau = 1$

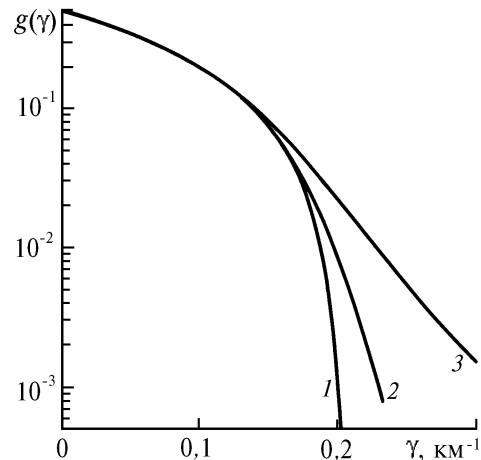


Рис. 2. Численное моделирование решения прямой задачи (7) для слоев с различной геометрической толщиной σ (кривая 1 – 0,1; 2 – 0,5; 3 – 1,0 км) при фиксированном положении центра ($z_m = 5$ км) и постоянной оптической толщине ($\tau = 1$)

Для оценки применимости приближенных формул (14) и (17) в таблице представлены результаты расчетов дальности до <центра тяжести> L и геометрической толщины рассеивающего слоя D при моделировании профиля коэффициента ослабления $\epsilon(s)$ гауссовой кривой с параметрами $z_m = 2; 5$ и 8 км; $\sigma = 0,5$ км; $\tau = 1$ на трассе $0 \leq s \leq 10$ км.

Как видно из таблицы, восстановленная геометрическая толщина рассеивающего слоя D соответствует <правилу 3σ > для нормального распределения.

Таблица

z_m , км	H , км	L , км	D , км
2	6,5	8,01	3,02
5	3,5	4,98	2,96
8	0,5	1,99	2,98

Таким образом, приведенные параметры показывают, что анализ структуры исходных данных (ширина спектра, производная $g'(\nu)$ в нуле) позволяет получить полезную информацию о свойствах искомого профиля коэффициента ослабления $\epsilon(s)$ (дальность до рассеивающего слоя, его оптическая и геометрическая толщина). Более содержательная интерпретация измерений ОПФ рассеивающей среды возможна при использовании численных методов решения обратных задач.

3. Алгоритм обращения и численный эксперимент

Для обращения интегрального уравнения (7) был применен регуляризирующий алгоритм, разработанный на основе метода Тихонова [13]. Предварительная алгебраизация (7) выполнялась по методике, описанной в [14] и основанной на аппроксимации коэффициента ослабления $\varepsilon(s)$ линейным сплайном по формуле

$$\varepsilon(s) = \sum_{j=1}^n \varepsilon_j N_j(s), \quad (18)$$

в которой коэффициенты ε_j определяют значения искомой функции $\varepsilon(s)$ в узлах $s_j = \Delta(j-1)$, заданных на интервале $[0, z]$ с равномерным шагом $\Delta = z/(n-1)$. Базисные функции $N_j(s)$, $j = 1, \dots, n$ имеют вид

$$N_j(s) = \begin{cases} 1 - \frac{|s-s_j|}{\Delta}, & |s-s_j| \leq \Delta, \\ 0, & |s-s_j| > \Delta. \end{cases} \quad (19)$$

Заменяя функцию $\varepsilon(s)$ в уравнении (7) ее приближением по формуле (18) для дискретной сетки частот $\nu_i = \nu_{\max}(i-1)/(m-1)$, $i = 1, \dots, m$, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно вектора $\varepsilon = (\varepsilon_n, \dots, \varepsilon_2, \varepsilon_1)$

$$A \varepsilon = g \quad (20)$$

с матрицей $A = \|a_{ij}\|$, элементы которой определяются выражениями

$$a_{ij} = \int_{s_{j-1}}^{s_{j+1}} K(\nu_i, s) N_j(s) ds, \quad i, j = 1, \dots, n; \quad s_0 = 0; \quad s_{n+1} = z. \quad (21)$$

Регуляризованный аналог системы (20) имеет вид

$$(A^T E^{-2} A + \alpha D) \varepsilon = A^T E^{-2} g, \quad (22)$$

где A^T – матрица, транспонированная к матрице A ; $E = \text{diag}\{e_1, \dots, e_m\}$; e_j – весовые коэффициенты, определяемые погрешностью j -го измерения; D – трехдиагональная сглаживающая матрица с элементами

$$d_{ij} = \frac{1}{\Delta} \begin{cases} 2, & i=j, \\ -1, & |i-j|=1, \\ 0, & |i-j| > 1, \end{cases} \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (23)$$

Выбор параметра регуляризации α осуществлялся на основе принципа минимальных невязок [15], позволяющего в данной задаче учитывать априорную информацию о неотрицательности искомой функции $\varepsilon(s)$ и о величине оптической толщины τ . Согласно [15] значение $\alpha_{\text{м.н}}$ по критерию минимальных невязок определяется из условия минимума функционала

$$F_{\text{м.н}} = \|A \varepsilon_\alpha - g\| + \|A \varepsilon_\alpha^{(+)} - g\|, \quad (24)$$

в котором $\varepsilon_\alpha^{(+)} = P_1 P_2 \varepsilon_\alpha$, P_2 – оператор проектирования на множество неотрицательных функций, а нелинейный оператор P_1 определяется следующим образом:

$$P_1 \varepsilon_\alpha = \tau \varepsilon_\alpha \left[\int_0^z \varepsilon_\alpha(s) ds \right]^{-1}. \quad (25)$$

В численных экспериментах прямая задача решалась на интервале $0 \leq s \leq 10$ км, на котором задавались дискретные отсчеты профиля коэффициента ослабления $\varepsilon_j = \varepsilon(s_j)$ с шагом

$\Delta = 0,25$ км. Размерность вектора g правой части (20) $m = 41$. Была исследована эффективность восстановления профиля $\varepsilon(s)$, моделируемого гауссовой кривой с параметрами (z_m, σ^2), в зависимости от положения слоя относительно приемника. Установлено, что точность решения обратной задачи повышается при приближении приемника к слою. Так, например, если при $z_m = 8$ км, $\sigma = 0,5$ км и 5 %-й относительной погрешности входных данных среднеквадратическая погрешность восстановления профиля $\varepsilon(s)$ составляет 17 %, то для слоя $z_m = 3$ км ошибка решения возрастает до 30 %.

Пример восстановления структуры слоистообразной рассеивающей среды, модель которой построена путем суперпозиции двух нормальных распределений с параметрами $z_{m1} = 7,5$, $z_{m2} = 9,5$ км и $\sigma = 0,3$ км, представлен на рис. 3 (1 – модель, 2 – результат решения обратной задачи). В приведенном примере размерность вектора решения $n = 15$. Относительная погрешность входных данных 10 %. Ось ординат на рис. 3 направлена от приемника в глубь слоя, а начало координат совмещено с его ближней границей. Решение обратной задачи, приведенное на рис. 3, получено с учетом положительности ε_α и известной оптической толщи τ при оптимальном значении параметра регуляризации α . Среднеквадратическая ошибка восстановления при этом составляла 10,4 %. Использование для выбора параметра регуляризации критерия минимальных невязок приводит к увеличению ошибки восстановления в пределах 5 %. Отметим, что для решения, полученного непосредственно из обращения уравнения (22) (без учета положительности и перенормировки на известную оптическую толщину), погрешность составляла не менее 20 %.

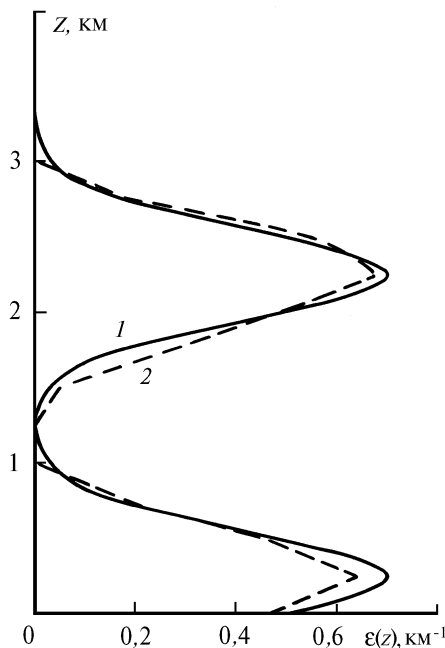


Рис. 3. Пример восстановления двухслойной модели профиля коэффициента ослабления $\varepsilon(s)$ в численном эксперименте: 1 – модель, 2 – решение обратной задачи при 10 %-й погрешности исходных данных и оптимальном значении параметра регуляризации

Заключение

Таким образом, в предлагаемой статье рассмотрен новый подход к задаче определения профиля коэффициента ослабления неоднородной рассеивающей среды, использующий информацию об оптической передаточной функции среды в малоугловом приближении теории переноса излучения. В отличие от лидарных методов в рассмотренной задаче не требуется применение импульсных источников излучения, а для разрешения пространственной структуры среды необходимо решение обратной задачи. Для обращения измерений ОПФ предло-

жен регуляризирующий алгоритм с использованием априорной информации о величине оптической толщи и неотрицательности искомой функции. В численном эксперименте показана работоспособность алгоритма и исследована эффективность решения обратной задачи в зависимости от положения рассеивающего слоя. Установлено, что для повышения точности восстановления профиля коэффициента ослабления необходимо проводить измерения на границе рассеивающего слоя. Предлагаемый метод может быть рекомендован для оптической диагностики пространственной структуры грубодисперсных сред типа тонких облачных слоев или приповерхностного слоя моря в условиях многократного рассеяния.

1. Дистанционные методы исследования атмосферы / Под ред. В.Е. Зуева. Новосибирск: Наука, 1980. 160 с.
2. Межерис Р. Лазерное дистанционное зондирование. М.: Мир, 1987. 550 с.
3. Wolfe D. C., Byer R. L. // *Appl. Optics*. 1982. V. 21. N 7. P. 1165–1178.
4. Twomey S. // *J. Atmos. Sci.* 1987. V. 44. N 23. P. 3544–3551.
5. Коршунов В. А. // *Оптика атмосферы*. 1990. Т. 3. N 2. С. 115–122.
6. Jinhuan Q., Quenzel H., Wigner M. // 15 International Laser Radar Conference (Abstracts of papers. Part 1). Tomsk. USSR. Institute of atmospheric optics. 1990. P. 345–348.
7. Вагин Н. И., Веретенников В. В. // *Изв. АН СССР. Сер. ФАО*. 1989. Т. 25. N 7. С. 723–731.
8. Зеге Э. П., Иванов А. П., Кацев И. Л. Перенос изображения в рассеивающей среде. Минск: Наука и техника, 1985. 327 с.
9. Валентюк А. Н., Предко К. Г. Оптическое изображение при дистанционном наблюдении. Минск: Наука и техника, 1991. 359 с.
10. Браво-Животовский Д. М., Долин Л. С., Лучинин А. Г., Савельев В. А. // *Изв. АН СССР. Сер. ФАО*. 1969. Т. 5. N 2. С. 160–167.
11. Белов В. Ф., Боровой А. Г., Вагин Н. И., Волков С. Н. // *Изв. АН СССР. Сер. ФАО*. 1984. Т. 20. N 3. С. 323–327.
12. Зеге Э. П., Кацев И. Л. // *Изв. АН СССР. Сер. ФАО*. 1991. Т. 27. N 2. С. 172–181.
13. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 285 с.
14. Боровой А. Г., Вагин Н. И., Веретенников В. В. // *Оптика и спектроскопия*. 1986. Т. 61. Вып. 6. С. 1326–1330.
15. Танана В. П. Методы решения операторных уравнений. М.: Наука, 1981. 156 с.

Институт оптики атмосферы СО РАН,
Томск

Поступила в редакцию
30 декабря 1992 г.

V. V. Veretennikov. On Reconstructing the Extinction Coefficient Profile of a Medium from its Optical Transfer Function Taking into Account Multiple Scattering Within the Small Angle Approximation.

A technique for reconstructing spatial distribution of the extinction coefficient of an inhomogeneous course disperse medium from its optical transfer function is proposed. The technique is based on solving the radiation transfer equation in the small angle approach. Approximate expressions for estimating the distance to a scattering layer and its thickness are derived. A regularization algorithm for solving inverse problems is described and its precision characteristics are studied in a numerical experiment.