

Н.В. Сушилов, Е.Д. Холодкевич

ОСЦИЛЛЯЦИИ СРЕДНЕЙ РАЗНОСТИ НАСЕЛЕННОСТЕЙ И ПОГЛОЩЕНИЕ ПРОБНОГО ПОЛЯ В ДВУХУРОВНЕВОЙ СРЕДЕ В СИЛЬНОМ ПОЛЕ С ПЕРИОДИЧЕСКИ МОДУЛИРОВАННОЙ АМПЛИТУДОЙ

С помощью метода матричной экспоненты, позволяющего избежать действий с цепными дробями, получены аналитические решения уравнений Блоха в случае возбуждения двухуровневой среды сильным резонансным полем с периодически модулированной амплитудой. Вычислены коэффициенты поглощения пробного поля для двух частных случаев такой накачки – бихроматической и трихроматической. Показано, что при бихроматической накачке в отличие от трихроматической спектр коэффициента поглощения пробного поля не содержит Раби-резонансов, а содержит лишь резонансы на частотах, кратных межмодовому интервалу поля накачки. Получены условия возникновения и частотные области отрицательного поглощения (усиления) пробного поля для обоих вариантов накачки.

Общие решения уравнений Блоха, описывающих резонансное взаимодействие двухуровневой среды с полихроматическим полем (т.е. с полем, амплитуда которого периодически промодулирована во времени), получены Топтыгиной и Фрадкиным [1] с помощью метода теоремы Флоке, который они применили для решений уравнений Блоха с периодическими коэффициентами в 1982 году [2]. Этот метод, наряду с неоспоримыми преимуществами, обладает двумя существенными недостатками: во-первых, он применим только для решения уравнений с периодическими коэффициентами, во-вторых, для вычисления амплитуд гармоник, через которые выражаются решения, необходимо проводить численное суммирование слабосходящихся цепных дробей.

Матричный же метод решения уравнений Блоха, предложенный в [3], позволяет получать аналитические решения не только для периодической, но и для произвольной модуляции параметров возбуждающего поля [4]. Кроме того, этот метод позволяет обходиться без суммирования цепных дробей.

В настоящей статье мы даем аналитические решения уравнений Блоха для резонансного возбуждения 2-уровневой среды полем, состоящим из 2-х и 3-х сильных монохроматических компонент (би- и трихроматическое поле соответственно). Далее, мы вычисляем коэффициент поглощения слабого поля, зондирующего насыщенный вышеупомянутыми полями переход, и определяем частотные интервалы, в которых поглощение пробного поля отрицательно, т.е. происходит его усиление.

Итак, пусть двухуровневая среда (система двухуровневых атомов) возбуждается полем, электрическую компоненту которого можно записать в следующем виде:

$$\varepsilon(t) = E(t) \cos \omega t, \quad (1)$$

где $E(t)$ – амплитуда, периодически зависящая от времени; ω – частота, равная частоте перехода между уровнями. Уравнения, описывающие зависимость во времени элементов матрицы плотности двухуровневой среды в приближении дипольного взаимодействия и в приближении вращающейся волны (уравнения Блоха), будут иметь в этом случае следующий вид [5]:

$$\frac{dX(t)}{dt} = A(t) X(t) + L; \quad (2)$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ n(t) \end{pmatrix}; A(t) = \begin{pmatrix} -\Gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & -\Gamma_2 & f(t) \\ 0 & -f(t) & -\Gamma_1 \end{pmatrix}; L = n_0 \Gamma_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; f(t) = dE(t)/\hbar,$$

где $u(t)$, $v(t)$, $n(t)$ – стандартные компоненты вектора Блоха во вращающейся системе координат ($u(t)$ и $v(t)$ определяют поляризацию среды во внешнем поле, а $n(t)$ – разность населенностей уровней атомов); n_0 – равновесная разность населенностей; d – дипольный момент перехода между уровнями двухуровневого атома; $\Gamma_{1,2}^{-1}$ – времена релаксации населенности и поляризации среды соответственно.

Для некоторых частных случаев зависимости огибающей $E(t)$ решения системы уравнений (2) можно получить в аналитическом виде. Например, в случае

$$E(t) = E_0 (1 + 2 \cos \Omega t) \quad (3)$$

поле (1) представимо в виде суммы трех монохроматических компонент с одинаковым частотным интервалом Ω между соседними компонентами, а частота центральной компоненты равна ω (так называемое трихроматическое поле). Случаю

$$E(t) = 2 E_0 \cos \Omega t \quad (4)$$

соответствует так называемое бихроматическое поле (отличие (4) от (3) заключается лишь в отсутствии центральной резонансной компоненты).

Подставив (3) в решение уравнений Блоха для произвольной амплитуды $E(t)$ и предположив для упрощения расчетов равенство $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$, получим в явном виде аналитические решения для трихроматического возбуждающего поля:

$$u(t) = 0;$$

$$\begin{aligned} v(t) = & n_0 e^{-\Gamma t} \left\{ \left(1 - \Gamma \sum_{k=0}^{\infty} [c_k J_{2k} (P_1^-(2k) + P_1^+(2k)) - J_{2k+1} (P_1^-(2k+1) - P_1^+(2k+1))] \right) \sin F(t) + \right. \\ & \left. + \Gamma \sum_{k=0}^{\infty} [c_k J_{2k} (P_2^-(2k) + P_2^+(2k)) - J_{2k+1} (P_2^-(2k+1) - P_2^+(2k+1))] \cos F(t) \right\} + \\ & + n_0 \Gamma \sum_{k,l=0}^{\infty} \{ c_k c_l J_{2k} J_{2l} (P_1^-(2k) - P_1^+(2k)) \sin 2(k+l)\Omega t + c_k c_l J_{2k} J_{2l} (P_2^-(2k) - P_2^+(2k)) \cos 2(k+l)\Omega t + \\ & + [c_k c_l J_{2k} J_{2l} (P_1^-(2k) - P_1^+(2k)) + J_{2k+1} J_{2l+1} (P_1^-(2k+1) - P_1^+(2k+1))] \sin 2(k-l)\Omega t + \\ & + [c_k c_l J_{2k} J_{2l} (P_2^-(2k) - P_2^+(2k)) + J_{2k+1} J_{2l+1} (P_2^-(2k+1) + P_2^+(2k+1))] \cos 2(k-l)\Omega t + \\ & + [c_k J_{2k} J_{2l+1} (P_1^-(2k) + P_1^+(2k)) - c_l J_{2l} J_{2k+1} (P_1^-(2k+1) + P_1^+(2k+1))] \sin (2l+1+2k)\Omega t - \\ & - [c_l J_{2l} J_{2k+1} (P_2^-(2k+1) - P_2^+(2k+1)) - c_k J_{2k} J_{2l+1} (P_2^-(2k) + P_2^+(2k))] \cos (2l+1+2k)\Omega t + \\ & + c_k J_{2k} J_{2l+1} (P_1^-(2k) + P_1^+(2k)) \sin (2l+l-2k)\Omega t - c_k J_{2k} J_{2l+1} (P_2^-(2k) + P_2^+(2k)) \cos (2l+l-2k)\Omega t - \\ & - c_l J_{2l} J_{2k+1} (P_1^-(2k+1) + P_1^+(2k+1)) \sin (2k+l-2l)\Omega t - c_l J_{2l} J_{2k+1} (P_2^-(2k+1) + \\ & + P_2^+(2k+1)) \cos (2k+1-2l)\Omega t - J_{2k+1} J_{2l+1} (P_1^-(2k+1) - P_1^+(2k+1)) \sin 2(k+l+1)\Omega t - \\ & - J_{2k+1} J_{2l+1} (P_2^-(2k+1) + P_2^+(2k+1)) \cos 2(k+l+1)\Omega t \} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
n(t) = & n_0 e^{-\Gamma t} \left\{ \Gamma \sum_{k=0}^{\infty} [c_k J_{2k}(P_2^-(2k) + P_2^+(2k)) - J_{2k+1}(P_2^-(2k+1) - P_2^+(2k+1))] \sin F(t) + \right. \\
& \left. + \left(1 - \Gamma \sum_{k=0}^{\infty} [c_k J_{2k}(P_1^-(2k) + P_1^+(2k)) - J_{2k+1}(P_1^-(2k+1) - P_1^+(2k+1))] \right) \cos F(t) \right\} + \\
& + n_0 \Gamma \sum_{k,l=0}^{\infty} \{ -c_k c_l J_{2k} J_{2l} (P_2^-(2k) - P_2^+(2k)) \sin 2(k+l)\Omega t + c_k c_l J_{2k} J_{2l} (P_1^-(2k) - \\
& - P_1^+(2k)) \cos 2(k+l)\Omega t - [J_{2k+1} J_{2l+1} (P_2^-(2k+1) - P_2^+(2k+1)) - c_k c_l J_{2k} J_{2l} (P_2^-(2k) - P_2^+(2k))] \times \\
& \times \sin 2(k-l)\Omega t + [J_{2k+1} J_{2l+1} (P_1^-(2k+1) + P_1^+(2k+1)) + c_k c_l J_{2k} J_{2l} (P_1^-(2k) + \\
& + P_1^+(2k))] \cos 2(k-l)\Omega t + [c_l J_{2l} J_{2k+1} (P_2^-(2k+1) + P_2^+(2k+1)) - \\
& - c_k J_{2k} J_{2l+1} (P_2^-(2k) + P_2^+(2k))] \sin(2L+1+2k)\Omega t + [c_k J_{2k} J_{2l+1} (P_1^-(2k) - \\
& - P_1^+(2k)) - c_l J_{2l} J_{2k+1} (P_1^-(2k+1) - P_1^+(2k+1))] \cos(2L+1+2k)\Omega t - \\
& - c_k J_{2k} J_{2l+1} (P_2^-(2k) + P_2^+(2k))] \sin(2L+1-2k)\Omega t - c_k J_{2k} J_{2l+1} (P_1^-(2k) - \\
& - P_1^+(2k))] \cos(2L+1-2k)\Omega t + c_l J_{2l} J_{2k+1} (P_2^-(2k+1) + P_2^+(2k+1)) \sin(2k+1-2L)\Omega t - \\
& - c_l J_{2l} J_{2k+1} (P_1^-(2k+1) - P_1^+(2k+1)) \cos(2k+1-2L)\Omega t + J_{2k+1} J_{2l+1} (P_2^-(2k+1) - \\
& - P_2^+(2k+1)) \sin 2(k+L+1)\Omega t - (J_{2k+1} J_{2l+1} (P_1^-(2k+1) + P_1^+(2k+1)) \cos 2(k+L+1)\Omega t) \} (), \quad (6)
\end{aligned}$$

где

$$P_1^{\pm}(m) = \Gamma / [\Gamma^2 + (\Omega_R \pm m\Omega)^2]; \quad P_2^{\pm}(m) = (\Omega_R \pm m\Omega) / [\Gamma^2 + (\Omega_R \pm m\Omega)^2]; \quad (7)$$

функция Бесселя 1-го рода (для упрощения записи мы опустили общий для всех J_m аргумент 2ρ); $c_0 = 1/2$; $c_1 = c_2 = \dots = c_m = 1$.

Для бихроматического возбуждающего поля (4) решения будут иметь вид:

$$u(t) = 0;$$

$$\begin{aligned}
v(t) = & n_0 e^{-\Gamma t} \left\{ \left[1 - 2\Gamma \sum_{k=0}^{\infty} c_k J_{2k} L_1(2k) \right] 2 \sum_{l=0}^{\infty} J_{2l+1} \sin(2l+1)\Omega t + \right. \\
& + 2\Gamma \sum_{k,l=0}^{\infty} c_l J_{2l} J_{2k+1} L_2(2k+1) \cos 2L\Omega t \left. \right\} + 2n_0 \Gamma \sum_{k,l=0}^{\infty} \{ [c_k J_{2k} J_{2l+1} L_1(2k) - \\
& - c_l J_{2l} J_{2k+1} L_1(2k+1)] \sin(2k+1+2l)\Omega t + [c_k J_{2l} J_{2k+1} L_2(2k+1) - \\
& - c_k J_{2k} J_{2l+1} L_2(2k)] \cos(2k+1+2l)\Omega t - c_l J_{2l} J_{2k+1} L_1(2k+1) \sin(2k+1 - \\
& - 2l)\Omega t + c_l J_{2l} J_{2k+1} L_2 \cos(2k+1-2l)\Omega t + c_k J_{2k} J_{2l+1} L_1(2k) \sin(2l+1 - \\
& - 2)\Omega t + c_k J_{2k} J_{2l+1} L_2(2k) \cos(2l+1-2k)\Omega t \}; \quad (8)
\end{aligned}$$

$$n(t) = n_0 e^{-\Gamma t} \left\{ \left[1 - 2\Gamma \sum_{k=0}^{\infty} c_k J_{2k} L_1(2k) \right] 2 \sum_{l=0}^{\infty} c_l J_{2l} \cos 2l\Omega t + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + 2\Gamma \sum_{k,l=0}^{\infty} J_{2k+1} J_{2l+1} L_2(2k+1) \sin(2l+1)\Omega t \Big\} + 2n_0 \Gamma \sum_{k,l=0}^{\infty} \{c_k c_l J_{2k} J_{2l} L_2(2k) \times \\
& \times \sin 2(k+1)\Omega t + c_k c_l J_{2k} J_{2l} L_1(2k) \cos 2(k+1)\Omega t + [c_k c_l J_{2k} J_{2l} L_2(2k) + \\
& + J_{2k+1} J_{2l+1} L_2(2k+1)] \sin 2(k-1)\Omega t + [c_k c_l J_{2k} J_{2l} L_1(2k) + \\
& + J_{2k+1} J_{2l+1} L_1(2k+1)] \cos 2(k-1)\Omega t - J_{2k+1} J_{2l+1} L_2(2k+1) \times \\
& \times \sin 2(k+1+l)\Omega t - J_{2k+1} J_{2l+1} L_1(2k+1) \cos 2(k+1+l)\Omega t \}, \tag{9}
\end{aligned}$$

где

$$L_1(m) = \Gamma / (\Gamma^2 + m^2 \Omega^2); L_2(m) = m \Omega / (\Gamma^2 + m^2 \Omega^2). \tag{10}$$

Здесь следует отметить, что аналогичное решение для бихроматического возбуждающего поля (случай так называемого полностью модулированного по амплитуде возбуждения) в виде разложения по функциям Бесселя получено в [8]. Однако эти решения представлены в явном виде лишь для двух предельных случаев – очень слабого поля и очень сильного поля возбуждения, когда можно пренебречь релаксацией по сравнению с частотой Раби (т. е. в приближении $\Gamma \ll \Omega_R$). Полученные нами решения (8) – (9) справедливы для любой интенсивности возбуждающего поля, а в случае $\Gamma \rightarrow 0$ они совпадают с решениями из [8].

Сравнивая решения (5) – (6) и (8) – (9), легко можно увидеть, что спектр незатухающих осцилляций компонент вектора Блоха в случае бихроматического возбуждения содержит бесконечный набор гармоник межмодовой частоты Ω , причем для $n(t)$ это набор четных гармоник, а для $v(t)$ – нечетных. В случае трихроматического возбуждающего поля как $v(t)$, так и $n(t)$ содержит бесконечный набор и четных, и нечетных гармоник Ω . Следующее существенное отличие трихроматического возбуждения от бихроматического состоит в том, что (как видно из (7)), в первом случае амплитуды гармоник резонансно возрастают при $\Omega_R = \pm m\Omega$ (условия так называемого Раби-резонанса), а в случае бихроматического возбуждения эти резонансы отсутствуют.

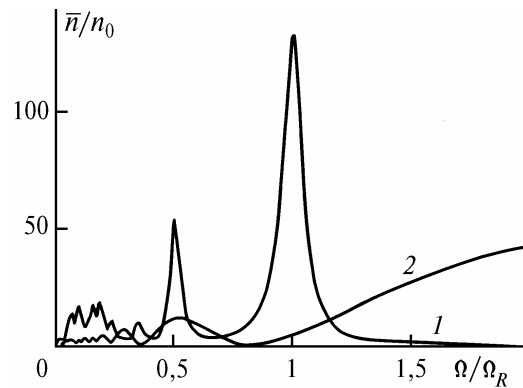


Рис. 1. Зависимость средней по времени разности населенностей уровней \bar{n} от межмодового расстояния Ω для трихроматического (1) и бихроматического (2) возбуждений

На рис. 1 показана зависимость средней по времени разности населенностей уровней \bar{n} от межмодового расстояния Ω , рассчитанная численно из (6) и (9). Трихроматическое возбуждение (кривая 1) в отличие от бихроматического (кривая 2), приводит к Раби-резонансам в спектре \bar{n} . Общим же для этих решений является то, что $\bar{n}(\Omega)$ ни при каких значениях отстройки Ω не принимает отрицательных значений, т.е. усиления этого поля получить невозможно. Такое

отрицательное поглощение (усиление) в 2-уровневой среде может возникать лишь для слабого пробного поля при насыщении резонансного перехода сильным полем.

В [3] получено аналитическое выражение для поляризации среды слабым пробным полем с переменной частотой при одновременном возбуждении ее сильным трихроматическим полем на фиксированных частотах, рассчитан коэффициент этого пробного поля, определены частотные интервалы, в которых это поглощение становится отрицательным. В настоящей статье мы показываем, что бихроматическая накачка приводит к существенным отличиям по сравнению с трихроматической в спектре коэффициента поглощения пробного поля. Для поля вида $\varepsilon(t) = 2E_0 \cos \Omega t \cos \omega t + \varepsilon_0 \cos(\omega + \delta)t$, где $\varepsilon_0 \ll E_0$, $|\delta| \ll \omega$ – отстройка слабого поля от резонанса, с помощью методики, примененной в [3], нетрудно получить аналитическое выражение для компонент вектора Блоха, а следовательно, и для поляризации среды под действием этого поля.

Полученные выражения слишком громоздки, и мы приведем лишь рассчитанные с помощью этих решений спектры коэффициента поглощения пробного поля при двух значениях амплитуды сильной бихроматической накачки: $\Omega_R = 10\Gamma$ и 20Γ (кривые 1 и 2 на рис. 2 соответственно).

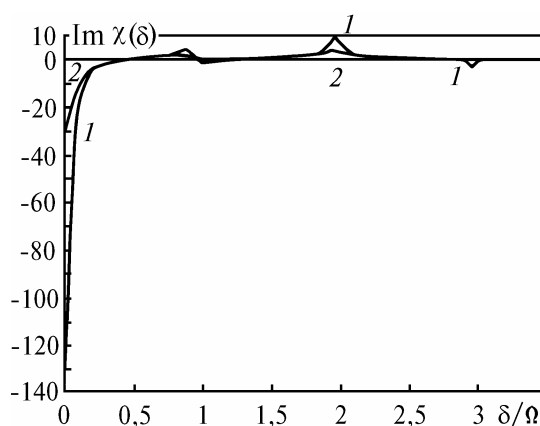


Рис. 2. Мнимая часть поляризуемости среды пробным полем при бихроматической накачке для $\Omega_R = 10\Gamma$ (1) и $\Omega_R = 20\Gamma$ (2)

Мнимая часть поляризуемости среды пробным полем $\text{Im}\chi(\delta)$, которая, как известно, прямо пропорциональна коэффициенту поглощения внешнего поля (см., например, [6], где коэффициент поглощения $\kappa(\delta) = \omega \text{Im}\chi(\delta)/(ncN)$; n – показатель преломления среды; c – скорость света в вакууме, N – плотность поглощающих атомов), при трихроматическом насыщении перехода приведена на рис. 3 для $\Omega_R = 10\Gamma = \Omega$.

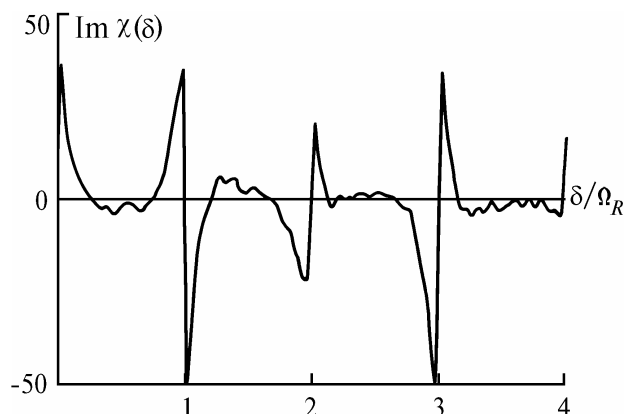


Рис. 3. Мнимая часть поляризуемости среды пробным полем при трихроматической накачке для $\Omega_R = 10\Gamma$. Сопоставляя эти графики, можно сделать следующие выводы.

1. В случае бихроматической накачки (без резонансной компоненты) спектр мнимой части поляризуемости среды $\text{Im}\chi(\delta)$, определяющей поглощение пробного поля, содержит резонансы в окрестности расстройок $\delta = m\Omega$, $m = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$ (межмодовые резонансы). В окрестности $\delta = \Omega$ поглощение имеет дисперсионный характер, а для всех остальных m поглощение имеет обычную лоренцевскую форму. При этом $\text{Im}\chi(\delta)$, а следовательно, и поглощение отрицательны в окрестности $\delta = 0$ и $\delta = \pm\Omega$. Наибольшие по абсолютной величине значения отрицательное поглощение принимает в окрестности точного резонанса, причем чем сильнее накачка, тем меньше величина отрицательного поглощения. Это объясняется тем, что при точном резонансе слабое поле, складываясь с накачкой, дополнительно способствует насыщению перехода. Чем сильнее накачка, тем ближе среда к состоянию насыщения, а следовательно, меньше поглощение внешнего поля.

2. Зависимость спектра мнимой части поляризуемости среды пробным полем от расстройки при трихроматической накачке носит более сложный характер. Во-первых, резонансный характер этой зависимости проявляется при $\delta = m\Omega = m\Omega_R$, т. е. межмодовые резонансы в этом случае совпадают с Раби-резонансами, причем эти Раби-резонансы имеют место при совпадении δ с гармониками частоты Раби Ω_R , в то время как Раби-резонансы в компонентах вектора Блоха среды, возбуждаемой трихроматическим полем (без пробного), наблюдаются при совпадении межмодовой частоты Ω с субгармониками частоты Ω_R (см. [7]). Спектр имеет дисперсионный характер в окрестности всех резонансных значений δ (как это и должно быть при сильной трихроматической накачке (см. [7])). Области отрицательных значений $\text{Im}\chi(\delta)$, т. е. области отрицательного поглощения, существенны в окрестностях Раби-резонансов. В случае точного резонанса ($\delta = 0$) слабое поле складывается с резонансной компонентой накачки, также способствуя насыщению перехода. Отрицательного поглощения при этом нет. Ширина всех резонансных линий одинакова и превышает ширину линий при трихроматической накачке при одних и тех же значениях параметров.

При отстройках $\delta > 3\Omega$ пробное поле перестает вызывать переходы между уровнями, и система просто находится в состоянии насыщения, вызванного сильной накачкой.

Итак, наибольшее усиление поля с периодически модулированной амплитудой должно происходить при насыщении двухуровневой среды (например, внутри резонатора лазера) полихроматическим полем в случае, когда частота перехода между уровнями среды лежит посередине, между соседними спектральными компонентами поля.

1. Топтыгина Г.И., Фрадкин Э.Е. // ЖЭТФ. 1990. Т. 97. С. 766 – 774.

2. Топтыгина Г.И., Фрадкин Э.Е. // ЖЭТФ. 1982. Т. 82. С. 429 – 440.

3. Alekseev A.V., Davydov A.V., Sushilov N.V., Zinin Yu.A. // J. de Phys. 1990. V. 51. P. 723 – 734.

4. Алексеев А.В., Зинин Ю.А., Сушилов Н.В. // Оптика и спектроскопия. 1990. Т. 69. С. 1245 – 1250.

5. Шумейкер Р. // Лазерная и когерентная спектроскопия / Под ред. Стейнфилда. М.: Мир, 1982. 629 с.

6. Макомбер Дж. // Динамика спектроскопических переходов. М.: Мир, 1979. 110 с.

7. Boyd R.W., Raymer M.G., Narum P., Harter D.J. // Phys. Rev. A. 1981. V. 24. P. 411 – 420.

8. Feneuille S., Schweighofer M.-G., Oliver G. // J. Phys. B: Atom. Mol. Phys. 1976. V. 9. P. 2003 – 2009.

Тихоокеанский океанологический институт
Дальневосточного отделения РАН

Поступила в редакцию
19 июля 1993 г.

N.V. Sushilov, E.D. Kholodkevich. **Oscillations of Mean Difference of Populations and Absorption of a Probe Field in a Dual Level Medium Placed into a Strong Field with a Periodic Amplitude Modulation.**

In this paper we present analytical solutions of Bloch equations for the case of a dual level medium excited by a strong resonant field with a periodic amplitude modulation obtained using the technique of matrix exponent that enables one to avoid operations with continued fractions. Using this approach we calculated absorption coefficients of the medium for a probe field in two particular cases of a bichromatic and a trichromatic pumping. It is shown in the paper that in contrast to the trichromatic pumping the spectrum of the absorption coefficient for a probe field in the bichromatic case has no Rabi resonances while having resonances at frequencies proportional to the intermode interval of the pump field. Conditions and frequency regions for negative absorption (amplification) of the probe field to occur are determined in this paper for both versions of the medium pumping.