

Е.А. Иванова, В.И. Кислов, С.А. Четкин

**СТАТИСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ АДАПТИВНОЙ ОПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ
ФАЗОВОГО СОПРЯЖЕНИЯ С УЧЕТОМ ШУМОВ ИЗМЕРЕНИЙ**

В рамках статистического подхода на основе методов вариационного и матричного исчисления разработаны алгоритмы восстановления волнового фронта и компенсации фазовых искажений поля адаптивной оптической системой фазового сопряжения в присутствии шумов измерений и ошибок управления фазовым корректором. При расчетах восстанавливаемого и компенсирующего фазовых распределений используется априорная информация о статистических характеристиках измеряемого волнового фронта, шумов измерений и ошибок управления. Получены и исследованы управления для ортогональных мод типа мод Карунена—Лоэва, обеспечивающих наименьшую ошибку компенсации фазовых искажений поля при заданном числе мод и реализуемых без ошибки аппроксимации фазовым корректором с заданными функциями откликов. Представлены и обсуждены результаты расчетов остаточных ошибок восстановления и компенсации при числе каналов измерения датчиком Гартмана и числе актюаторов 3, 7, 19 в зависимости от величины шумов измерения и ошибок управления.

Введение

Алгоритм управления исполнительным устройством (фазовым корректором) адаптивной оптической системы (АОС) определяет эффективность компенсации фазовых искажений (ФИ) поля и зависит от целевого назначения и показателей качества АОС [1, 2], характера ФИ [1, 3] и способов их измерения, алгоритма обработки измеренной информации [1], типа используемого фазового корректора. Существенное влияние на качество компенсации ФИ оказывают случайные (шумовые) и/или детерминированные неточности оценки величины компенсируемых ФИ и ошибки в реализации управляющих воздействий корректором фазовых искажений. Влияние шумов можно уменьшить путем оптимизации алгоритма управления [1, 4, 5]. При этом величины управляющих фазовых воздействий будут зависеть от дисперсии, радиуса корреляции и других статистических характеристик ФИ и шумов поля в АОС. Поэтому при реализации такого типа алгоритмов необходимо проводить либо прямые измерения этих характеристик, либо использовать априорно известную о них информацию.

Различают зональный и модальный алгоритмы управления АОС [1]. Для первого типа алгоритмов управляющие воздействия находятся и реализуются для каждого исполнительного канала (актюатора) фазового корректора в отдельности, в случае второго типа алгоритмов — для каждой из нескольких групп актюаторов, которым соответствует несколько линейных комбинаций (мод) функций отклика актюаторов. Модальные алгоритмы предпочтительны в медленных АОС, не успевающих организовать управление каждым актюатором в отдельности, либо в поисковых оптических системах, при условии независимости откликов целевой функции АОС на воздействие различных мод (т. е. используется свойство ортогональности мод).

В связи с этим актуальна задача поиска мод типа Карунена—Лоэва [6, 7], реализуемых фазовым корректором без ошибки аппроксимации, т. е. представимых в базисе функций отклика актюаторов и обеспечивающих наискорейшее убывание ошибки компенсации ФИ поля в зависимости от числа используемых в АОС мод.

В настоящей статье исследуются алгоритмы управления фазовым корректором (в том числе деформируемым зеркалом) АОС фазового сопряжения, обеспечивающие минимальную ошибку компенсации ФИ с учетом шумов измерений ФИ и ошибок реализации управляющих фазовым корректором воздействий. Рассмотрена также задача восстановления с минимальной остаточной ошибкой ФИ по результатам измерений датчика волнового фронта в присутствии шумов измерений.

Постановка задачи и исходные соотношения

Пусть подлежащие компенсации АОС ФИ поля описываются случайной функцией $\varphi(\mathbf{P}, t)$ с известной статистикой. В результате измерения датчиком волнового фронта в АОС вводится набор отсчетов, которые представим в виде

$$M_m = S_m + N_{am} + N_{pm}, \quad (1)$$

где $M_m = M(\xi_m)$, $\xi_m = (p_i, t_j, k)$; p_i — радиусы-векторы точек, в которых осуществляются измерения, $I = 1, 2 \dots$; t_j — время, соответствующее моменту измерения, $j = 1, 2 \dots$; k — номер измеряемой характеристики волнового фронта (к примеру, при $k = 1$ измеряются локальные наклоны волнового

фронта по оси x , при $k = 2$ — по оси y); векторы m пронумерованы от $m = 1$ до L по какому-либо правилу; L — полное число пространственно-временных отсчетов; величина S_m соответствует функции φ , а величина M_{pm} — функции $\varphi_p(\mathbf{p}, t)$, описывающей случайные ФИ поля в приемном оптическом тракте АОС, которые отсутствуют в ее передающем тракте и не могут быть исключены из M_m путем предварительных измерений; вектор N_{am} учитывает шумы датчика ФИ поля (например, электронные шумы приемника излучения). Характер шумов N_{am} и зависимость отсчетов M_m от функций φ и φ_p конкретизируются с учетом типа датчика волнового фронта.

В АОС фазового сопряжения с зональным алгоритмом управления реализуемое с помощью фазового корректора компенсирующее ФИ фазовое распределение в момент времени t представим в виде линейной комбинации функций отклика R_n фазового корректора:

$$\varphi_c(\mathbf{p}, t) = \sum_1^L (R_n(\mathbf{p}) + \delta R_n(\mathbf{p})) u_n(t); \quad (2)$$

$$u_n = (1 + v_n) \sum_1^L H_{nm} M_m, \quad (3)$$

где $u_n(t)$ — управляющие воздействия, подаваемые на актюаторы фазового корректора с номерами $n = 1, 2, \dots, N$; v_n — ошибка формирования управляющего воздействия, связанная с шумами в электронном блоке управления фазового корректора, H_{nm} — детерминированные весовые коэффициенты ($n = 1 \dots N, m = 1 \dots L$), позволяющие осуществлять процесс реализации $u_n(t)$ с учетом пространственно-временных статистических характеристик ФИ; R_n — функция отклика фазового корректора на действие n -го актюатора, δR_n — ошибка реализаций функции отклика фазовым корректором АОС.

Таким образом, задача исследования алгоритма управления АОС сводится к определению коэффициентов H_{nm} , гарантирующих экстремальность целевой функции АОС (которая может состоять, например, в получении поля с расходимостью, близкой к дифракционной, или в максимизации осевой яркости пучка и т.д.), в предположении, что для величин $v_n, \delta R_n, S_m, N_{pm}, N_{am}$ и функции $\varphi(\mathbf{p}, t)$ и их произведений известны среднестатистические значения.

При использовании модального алгоритма компенсации ФИ каждая мода $F_n(\mathbf{p}, t)$ должна реализовываться фазовым корректором без ошибки аппроксимации, поэтому

$$F_n(\mathbf{p}, t) = \sum A_{nm}(t) (R_m(\mathbf{p}) + \delta R_m) (1 + v_m), \quad (4)$$

где искомые весовые коэффициенты A_{nm} , образующие матрицу $A = |A_{nm}|$, определяют вклад функции отклика фазового корректора на действие m -го актюатора при формировании моды номер n . Весовые коэффициенты A_{nm} находятся из условий ортогональности мод и наискорейшего убывания ошибки компенсации ФИ в зависимости от числа используемых для компенсации мод. Реализуемое корректором компенсирующее фазовое распределение при модальном управлении представляется в виде линейной комбинации мод $F_m(\mathbf{p}, t)$:

$$\varphi_c(\mathbf{p}, t) = \sum_1^L v_m F_m(\mathbf{p}, t), \quad (5)$$

где весовые коэффициенты v_m образуют матрицу $V = |v_n|$ управляющих модовых воздействий. Так как при использовании модального и зонального алгоритмов управления АОС компенсирующие ФИ функции $\varphi_c(\mathbf{p}, t)$ формируются в виде суперпозиции одних и тех же функций отклика фазового корректора, то между матрицами управляющих воздействий для этих алгоритмов существует связь

$$V = A^{-T} H M, \quad (6)$$

где $|\cdot \cdot|^T = (|\cdot \cdot|^{-1})^T$, $|\cdot \cdot|^T$ — транспонированная матрица; $|\cdot \cdot|^{-1}$ — обратная матрица; $M = |M_n|$ — матрица-столбец отсчетов датчика волнового фронта, определенных выражением (1); H — матрица весовых коэффициентов, связанных с величиной управляющих фазовым корректором воздействий при использовании зонального алгоритма управления (2, 3).

При решении задачи восстановления ФИ ошибки управления фазовым корректором АОС не рассматриваются. Представим восстанавливаемое ФИ в виде суммы

$$\varphi_c(\mathbf{p}, t) = \sum_1^L M_m R_m(\mathbf{p}, t), \quad (7)$$

где весовые коэффициенты – функции $R_m(\mathbf{p}, t)$ необходимо определять из условия экстремальности целевой функции АОС. Функции $R_m(\mathbf{p}, t)$ можно рассматривать как наилучшие функции отклика корректора АОС в том смысле, что при совпадении функций отклика корректора с функциями $R_m(\mathbf{p}, t)$ (или их линейными комбинациями) гарантируется реализуемость теоретического экстремума целевой функции АОС в отсутствие ошибок управления фазовым корректором.

Показателями качества работы АОС приняты величины среднестатистических квадратов остаточных ошибок компенсации ФИ δ_φ^2 и градиента ФИ δ_g^2 . Они определяют число Штреля и расходимость формируемого АОС пучка [1, 2] и рассчитываются по формулам:

$$\delta_\varphi^2 = \langle \varphi - \varphi_c - \langle \varphi - \varphi_c \rangle \rangle^2; \quad (8)$$

$$\delta_g^2 = \overline{\langle \nabla \varphi - \nabla \varphi_c \rangle^2}, \quad (9)$$

где черта над формулой означает статистическое усреднение по реализациям, а угловые скобки – пространственное усреднение по правилу: $\langle U \rangle = \int A(\mathbf{p})U(\mathbf{p})d\mathbf{p} / \int A(\mathbf{p})d\mathbf{p}$ – в случае (8) и $\langle \nabla U \rangle = \int A^2(\mathbf{p})(\nabla U(\mathbf{p}))d\mathbf{p} / \int A^2(\mathbf{p})d\mathbf{p}$ – в случае (9) ($U(\mathbf{p})$ – произвольная функция); $A(\mathbf{p})$ – амплитудное распределение поля в пучке; ∇ – оператор градиента, который действует по поперечным координатам пучка. Алгоритмы восстановления и компенсации ФИ должны минимизировать значения (8), (9).

Соотношения (1)–(9) являются исходными при исследовании зонального и модального алгоритмов уравнения АОС фазового сопряжения и алгоритма восстановления ФИ.

Алгоритм восстановления ФИ

Задача нахождения алгоритма восстановления ФИ состоит в определении весовых функций $R_m(\mathbf{p}, t)$, обеспечивающих восстановление ФИ поля с минимальными ошибками (8) или (9). Подставляя (7) в (8) или (9) и варьируя либо δ_φ^2 , либо δ_g^2 как функционал от R_n , с использованием методов вариационного исчисления [8] для оптимальных весовых функций R_n находим

$$|R_n(\mathbf{p}, t)| = \overline{|M_n M_m|}^{-1} |K_m|; \quad n, m = 1, \dots, L; \quad (10)$$

$$K_m = K_m(\mathbf{p}, t; \xi) = \overline{\varphi(\mathbf{p}, t) M_m},$$

где $|R_n(\mathbf{p}, t)|$ и $|K_m|$ – матрицы-столбцы. Соотношение (10) предлагает линейную независимость функций K_m .

Выражения (7), (10) описывают алгоритм оптимального восстановления [9] и градиентов ФИ по дискретным отсчетам датчика волнового фронта. Остаточные ошибки восстановления при этом минимизируются одновременно для обоих показателей качества (8) и (9) и рассчитываются по формулам

$$\delta_\varphi^2 = \sigma_\varphi^2 - \text{Sp} [| \langle K_m K_n \rangle - \langle K_m \rangle \langle K_n \rangle | \overline{|M_n M_n|}^{-1}], \quad (11)$$

$$\delta_g^2 = \sigma_g^2 - \text{Sp} [| \langle \nabla K_m \nabla K_n \rangle | \overline{|M_n M_n|}^{-1}], \quad (12)$$

где $\sigma_\varphi^2 = \overline{\langle \varphi^2 \rangle} - \langle \overline{\varphi} \rangle^2$; $\sigma_g^2 = \overline{\langle (\nabla \varphi(\mathbf{p}))^2 \rangle}$ – средние квадраты ФИ и градиента ФИ поля соответственно; символ Sp означает операцию нахождения следа матрицы.

Найдем функции Карунена–Лозва, использование которых позволяет минимизировать объем вычислений при восстановлении ФИ с заданной ошибкой восстановления. Используем матричный способ построения мод Карунена–Лозва. Так как они должны быть пространственно ортогональными и иметь представление в базе $R_m - \langle R_m \rangle$, построим ортонормированную с весом $A(\mathbf{p})$ систему функций $F_n - \langle F_n \rangle = \sum A_{nm} (R_m - \langle R_m \rangle)$, где коэффициенты A_{nm} являются искомыми. В матричном виде условие ортонормированности функций принимает форму уравнения

$$A^{-T} | \langle R_n R_m \rangle - \langle R_n \rangle \langle R_m \rangle |^{-1} A^{-1} = E, \quad (13)$$

где E – единичная матрица. Уравнение (13) соответствует показателю качества (8). При определении мод АОС с показателем качества коррекции ФИ (9) ортонормируются функции $\nabla F_n(\mathbf{p})$ с весом $A^2(\mathbf{p})$, а матрица перекрытия $| \langle R_n R_m \rangle - \langle R_n \rangle \langle R_m \rangle |$ заменяется на $| \langle \nabla R_n(\mathbf{p}) \nabla R_m(\mathbf{p}) \rangle |$. Поскольку уравнение (13) имеет бесконечно много решений, то потребуем, чтобы входящая в (11), (12) матрица-произведение была диагональной в базе функций F_n , т.е.

$$A^{-T} |M_n M_m| A^{-1} = |\delta_{nm} \lambda_n^2|, \quad (14)$$

где λ_n^2 – характеристические числа [9]; δ_{nm} – символ Кронекера – Капелли. Система уравнений (13), (14) соответствует задаче приведения двух симметрических квадратичных форм к каноническому виду. Определяемые при этом моды F_n характеризуются следующим свойством экстремальности [10]: пусть характеристические числа занумерованы так, что образуют невозрастающую последовательность $\lambda_{n+1}^2 \leq \lambda_n^2$. Допустим, что имеется отличная от F_n система ортогональных мод W_n , которая, как и F_n , построена в базисе функций $R_m - \langle R_m \rangle$; тогда первые $m \leq N$ мод (F_1, \dots, F_m) всегда обеспечивают меньшую ошибку восстановления ФИ, чем моды (W_1, \dots, W_m); при этом средний квадрат восстановленной функции ФИ равен $\sum_1^m \lambda_n^2$ и средний квадрат ошибки восстановления рассчитывается по формуле

$$\delta_{\varphi, g}^2 = \sigma_{\varphi, g}^2 - \sum_1^m \lambda_n^2. \quad (15)$$

Таким образом система матричных уравнений (13), (14) определяет моды Карунена – Лоэва при восстановлении ФИ по дискретным пространственно-временным отсчетам с учетом шумов измерений.

Моды Карунена – Лоэва могут быть найдены также на основе метода, описанного в работе [6]. При этом получаются совпадающие по своему содержанию с соотношениями (13), (14) интегральные уравнения:

$$\lambda_i^2 (F_i(\mathbf{p}) - \langle F_i \rangle) = \int A(\mathbf{p}_1) (F_i(\mathbf{p}_1) - \langle F_i \rangle) \sum_{n=1}^L \sum_{m=1}^L (R_n(\mathbf{p}_1) - \langle R_n \rangle) (R_m(\mathbf{p}) - \langle R_m \rangle) \overline{M_n M_m} d\mathbf{p}_1; \quad (16)$$

$$\lambda_i^2 (F_i(\mathbf{p}) - \langle F_i \rangle) = \int A^2(\mathbf{p}_1) (\nabla F_i(\mathbf{p}_1)) \sum_{n=1}^L \sum_{m=1}^L (\nabla R_n(\mathbf{p}_1) R_m(\mathbf{p})) \overline{M_n M_m} d\mathbf{p}_1, \quad (17)$$

$i = 1, \dots, M$. Первое из уравнений соответствует показателю качества (8), ядро уравнения пропорционально корреляционной функции $(\varphi_c(\mathbf{p}) - \langle \varphi_c \rangle)(\varphi_c(\mathbf{p}_1) - \langle \varphi_c \rangle)$; второе – показателю (9), и его ядро пропорционально $(\varphi_c(\mathbf{p}) \nabla \varphi_c(\mathbf{p}_1))$. Эквивалентность системы (13), (14) и уравнения (16) устанавливается путем подстановки выражения $F_n = \sum A_{nm} R_m$ в формулу (16).

Таким образом, выражения (7), (10) определяют алгоритм оптимального восстановления ФИ по результатам дискретных пространственно-временных отсчетов датчика волнового фронта в присутствии шумов измерений, а выражения (13), (14) или (16), (17) – моды Карунена – Лоэва, по которым целесообразно осуществлять модальное восстановление ФИ. При этом остаточные ошибки восстановления ФИ определяются по формулам (11), (12), (15).

Для АОС, в которой пространственно-временные измерения ФИ осуществляются непрерывно (к примеру, в качестве измерителя ФИ в АОС используется интерференционный датчик волнового фронта), выражение (7) для восстанавливаемой функции ФИ принимает вид интеграла

$$\varphi_c(\mathbf{p}, t) = \int R(\mathbf{p}, t; \xi) M(\xi) d\xi \quad (18)$$

а сама задача восстановления в данной постановке (в отличие от задачи восстановления ФИ по дискретным отсчетам) состоит в выделении в общем случае статистической функции ФИ из измеренной и минимизирующей ошибку восстановления функции $R(\mathbf{p}, t; \xi)$. В формуле (18) $M(\xi)$ – функция измеренных величин; ξ – вектор, введенный ранее при описании соотношения (1). Отметим, что в случае дискретных измерений уравнение, определяющее оптимальные весовые функции R_n , получается путем представления отсчетов (1) в виде функции $\sum \delta(\xi - \xi_m) M_m$.

Из соотношений (8), (9) с учетом (18) методом вариации [8] находим интегральное уравнение для определения оптимальной весовой функции $R(\mathbf{p}, t; \xi)$:

$$\overline{\varphi(\mathbf{p}, t) M(\xi)} = \int R(\mathbf{p}, t; \xi_1) \overline{M(\xi) M(\xi_1)} d\xi_1 \quad (19)$$

Уравнение (19) суть пространственно-временное уравнение Винера – Хопфа [11]. Исходя из (19), найдем выражение для $R(\mathbf{p}, t; \xi)$. Пусть известны решения уравнения

$$\gamma_n Q_n(\xi) = \int Q_n(\xi_1) \overline{M(\xi) M(\xi_1)} d\xi_1 \quad (20)$$

где Q_n – полная система ортонормированных функций, $n = 1, 2, \dots$; γ_n – соответствующий спектр собственных значений, $|\gamma_{n+1}| \leq |\gamma_n|$. Раскладывая $R(\mathbf{p}, t; \xi)$ в ряд по функциям $Q_n(\xi)$ и подставляя его в (19), находим

$$R(\mathbf{p}, t; \xi) = \int \overline{\varphi(\mathbf{p}, t) M(\xi_1)} Q(\xi, \xi_1) d\xi_1; \quad (21)$$

$$Q(\xi, \xi_1) = \sum Q_n(\xi) Q_n(\xi_1) / \gamma_n.$$

Таким образом, соотношение (18) является решением задачи оптимального восстановления ФИ и градиента ФИ при непрерывных измерениях. Используемая в выражении (18) весовая функция $R(\mathbf{p}, t; \xi)$ определяется выражением (21). Определив весовую функцию $R(\mathbf{p}, t; \xi)$, можно рассчитать величины остаточной ошибки восстановления и градиентов ФИ. Выражения для их определения получаются после подстановки (18), (19) соответственно в (8), (9):

$$\delta_\varphi^2 = \sigma_\varphi^2 - \int A(\mathbf{p}) R(\mathbf{p}, t, \xi) \overline{(\varphi(\mathbf{p}, t) - \langle \varphi(\mathbf{p}, t \rangle) M(\xi))} dp d\xi / \int A(\mathbf{p}) dp;$$

$$\delta_g^2 = \sigma_g^2 - \int A^2(\mathbf{p}) \nabla R(\mathbf{p}, t, \xi) \overline{(\nabla \varphi(\mathbf{p}, t)) M(\xi)} dp d\xi / \int A^2(\mathbf{p}) dp. \quad (22)$$

Выпишем интегральные уравнения для определения мод Карунена – Лозва в случае непрерывных измерений ФИ в присутствии шумов измерений. С учетом уравнения Винера – Хопфа (19) и алгоритма восстановления (18) искомые интегральные уравнения соответственно для показателей качества (8), (9) принимают вид

$$\lambda_i^2 (F_i(\mathbf{p}, t) - \langle F_i \rangle) = \int A(\mathbf{p}_1) (F_i(\mathbf{p}_1, t) - \langle F_i \rangle) R(\mathbf{p}_1, t, \xi) \overline{(\varphi(\mathbf{p}, t) - \langle \varphi \rangle) M(\xi)} dp_1 d\xi, \quad (23)$$

$$\lambda_i^2 F_i(\mathbf{p}, t) = \int A^2(\mathbf{p}_1) \nabla F_i(\mathbf{p}_1, t) \overline{(\varphi(\mathbf{p}, t)) M(\xi)} \nabla R(\mathbf{p}_1, t, \xi) dp_1 d\xi. \quad (24)$$

Ошибка восстановления ФИ, как и в случае дискретных отсчетов, рассчитывается по формуле (15).

Представленные в данном разделе соотношения описывают алгоритмы восстановления ФИ при дискретных и непрерывных измерениях ФИ с учетом шумов измерений. Исследование эффективности использования развитых алгоритмов восстановления ФИ в АОС применительно к решению практических задач прикладной оптики требует конкретизации статистических свойств ФИ и шумов.

Алгоритм управления фазовым корректором

Определение алгоритма управления фазовым корректором АОС состоит в установлении коэффициентов H_{nm} и расчете по ним (с учетом отсчетов датчика волнового фронта M_m) управляющих фазовым корректором воздействий u_n (2), (3), обеспечивающих минимизацию показателей качества функционирования АОС (8), (9).

Уравнение, определяющее коэффициенты H_{nm} матрицы H , находится из условия минимума остаточной ошибки компенсации ФИ δ_φ^2 (8) и градиентов ФИ δ_g^2 (9) как функций H_{nm} :

$$H = |RR|^{-1} |R\varphi M| \overline{|M_n M_m|}^{-1}, \quad (25)$$

в котором в случае показателя качества компенсации ФИ (8) $|RR| = \left| \overline{\langle \check{R}_n \check{R}_m \rangle} - \langle \check{R}_n \rangle \langle \check{R}_m \rangle \right|$;

$|R\varphi M| = \left| \overline{\langle \check{R}_n \varphi M_m \rangle} - \langle \check{R}_n \rangle \langle \varphi M_m \rangle \right|$, а в случае показателя качества компенсации ФИ (9)

$$|RR| = | \langle \nabla \check{R}_n(\mathbf{p}) \nabla \check{R}_m(\mathbf{p}) \rangle |; |R\varphi M| = | \langle \nabla \check{R}_n(\mathbf{p}) \overline{(\nabla \varphi M_m)} \rangle |$$

и введено обозначение $\check{R}_n(\mathbf{p}) = (R_n(\mathbf{p}) + \delta R_n)(1 + v_n)$. При выводе соотношения (25) принято, что случайные величины v_n , δR_n статистически независимы от M_n , φ .

Выражения (2), (3), (25) определяют алгоритм оптимального управления фазовым корректором АОС, использование которого обеспечивает коррекцию ФИ с минимальной величиной остаточной ошибки δ_φ^2 (8) или ее градиента δ_g^2 (9). При этом предполагается, что измерение пространственного распределения ФИ проводится датчиком волнового фронта в дискретном наборе точек и в отсчетах присутствует шумовая компонента в соответствии с (1), а корректирующие фазовые воздействия обрабатываются фазовым корректором с ошибкой управления, содержащей составляющие δR_n и v_n соответственно.

Ошибка компенсации ФИ поля в АОС при этом рассчитывается по формуле

$$\delta_{\varphi,g}^2 = \sigma_{\varphi,g}^2 - \text{Sp}[|R\varphi M| |M_n M_m|^{-1} |R\varphi M|^T |RR|^{-1}], \quad (26)$$

в которой величины $\sigma_{\varphi,g}^2$ определены в (8), (9).

Реализуемое при оптимальном управлении АОС по показателю качества (8) компенсирующее фазовое распределение не совпадает с тем, которое оптимально при использовании показателя качества (9), поскольку удовлетворение показателя качества (8) гарантирует максимизацию осевой интенсивности пучка, тогда как показатель (9) — минимизацию его угловой расходимости. В отсутствие шумовой компоненты при идеальном функционировании АОС таким, что в результате ее действия восстанавливается идеальная плоская или сферическая форма волнового фронта излучения, алгоритм управления АОС обеспечит минимизацию показателей качества и (8), и (9), то есть в отсутствие шумов при увеличении числа каналов управления АОС и измерения ФИ алгоритм (2), (3), (25) обеспечивает стремящиеся к нулю ошибки компенсации ФИ при использовании любого из показателей качества (8) или (9).

Так же как и при решении задачи восстановления ФИ, строятся моды Карунена—Лоэва для исследования алгоритма оптимального управления корректором АОС фазового сопряжения модального типа. Система уравнений для определения весовых коэффициентов A_{nm} , необходимых для построения этих мод $F_n(\mathbf{p})$, имеет следующий вид:

$$A^{-T} |RR|^{-1} A^{-1} = E; \quad (27)$$

$$A^{-T} H |M_n M_m|^{-1} H^T A^{-1} = |\lambda_n^2 \delta_{nm}|. \quad (28)$$

Ошибка компенсации ФИ рассчитывается по формуле (15), а управляющие модовые воздействия — с учетом (6).

Следует отметить, что в отсутствие ошибок управления моды $F_n(\mathbf{p}) - \langle F_n \rangle$ пространственно ортогональны в смысле требования: $\langle (F_n - \langle F_n \rangle)(F_m - \langle F_m \rangle) \rangle = \delta_{nm}$. При наличии ошибок управления в АОС моды $F_n(\mathbf{p})$, определяемые уравнениями (4) с учетом (27), (28), пространственно ортогональны в «статистическом» смысле $\langle (F_n - \langle F_n \rangle)(F_m - \langle F_m \rangle) \rangle = \delta_{nm}$.

В фазовом корректоре АОС среднестатистические ортогональные моды F_n технически реализуемы с нулевой ошибкой аппроксимации в силу условия (4), поэтому использование алгоритма (5), (6) в АОС фазового сопряжения модального типа обеспечит реализацию компенсации ФИ с теоретически предельно минимальной остаточной ошибкой.

Таким образом, соотношения (2), (3), (25) и (5), (6), (27), (28) определяют соответственно зональный и модальный алгоритмы оптимального управления фазовым корректором АОС при дискретных пространственно-временных измерениях с учетом шумов измерений и ошибок в реализации управляющих воздействий. Ошибки компенсации рассчитываются по формулам (26) и (15).

$$u_n(t) = \int H_n(t; \xi) M(\xi) d\xi, \quad n = 1, \dots, N, \quad (29)$$

в которой оптимизируемыми являются функции H_n . Осуществляя вариацию функций H_n в выражениях (8), (9), с учетом (29) приходим к следующим соотношениям для их определения:

$$\left| \int H_n(t; \xi_1) \overline{M(\xi) M(\xi_1)} d\xi_1 \right| = \left| \overline{\langle \check{R}_n \check{R}_m \rangle} - \overline{\langle \check{R}_n \rangle \langle \check{R}_m \rangle} \right|^{-1} \left| \overline{\langle \check{R}_m \varphi M(\xi) \rangle} - \overline{\langle \check{R}_m \rangle \langle \varphi M(\xi) \rangle} \right|; \quad (30)$$

$$\left| \int H_n(t; \xi_1) \overline{M(\xi) M(\xi_1)} d\xi_1 \right| = \left| \overline{\langle \nabla \check{R}_n(\mathbf{p}) \nabla \check{R}_m(\mathbf{p}) \rangle} \right|^{-1} \left| \overline{\langle \check{R}_m(\mathbf{p}) (\nabla \varphi(\mathbf{p}) M(\xi)) \rangle} \right|. \quad (31)$$

Интегральные уравнения (30), (31) суть уравнения Винера—Хопфа относительно фильтрующих функций $H_n(t; \xi)$ для АОС фазового сопряжения с заданными функциями отклика на действие актюаторов при наличии шумов измерения ФИ и ошибок управления АОС. Выражение (30) соответствует показателю качества (8), выражение (31) — показателю (9). Если известны решения вспомогательного интегрального уравнения (20), то решения уравнений (30), (31) представляются в явном виде:

$$|H_n(t; \xi)| = |RR|^{-1} |R_{\varphi}M(\xi)|, \quad (32)$$

где в случае показателя (8)

$$|R_{\varphi}M(\xi)| = \left| \int \{ \overline{\langle \check{R}_n(\mathbf{p}) \overline{\varphi(\mathbf{p}, t)M(\xi_1)} \rangle} - \overline{\langle \check{R}_n(\mathbf{p}) \rangle} \overline{\langle \varphi M(\xi_1) \rangle} \} Q(\xi, \xi_1) d\xi_1 \right|$$

и в случае показателя (9)

$$|R_{\varphi}M(\xi)| = \left| \int \{ \overline{\langle \check{R}_n(\mathbf{p}) \overline{(\nabla_{\varphi}(\mathbf{p})M(\xi_1))} \rangle} \} Q(\xi, \xi_1) d\xi_1 \right|,$$

здесь функция Q определена соотношением (21). Ошибка компенсации рассчитывается по формуле

$$\delta_{\varphi, g}^2 = \sigma_{\varphi, g}^2 - \text{Sp}[|RR| |HH|],$$

где

$$|HH| = \left| \int \int H_n(t; \xi) H_m(t; \xi_2) \overline{M(\xi_1) M(\xi_2)} d\xi_1 d\xi_2 \right|.$$

Уравнения для определения функций Карунена—Лоэва аналогичны системе уравнений (27), (28) и находятся с учетом (29):

$$A^{-T} |RR|^{-1} A^{-1} = E; \quad (33)$$

$$A^{-T} |HH| A^{-1} = |\lambda_n^2 \delta_{nm}|. \quad (34)$$

Таким образом, соотношения (2), (29) — (32) и (4), (33), (34) описывают соответственно зональный и модальный алгоритмы управления АОС фазового сопряжения, осуществляющие измерения ФИ непрерывно и гарантирующие при их использовании компенсацию ФИ с минимальной остаточной ошибкой при наличии в АОС шумов измерений ФИ и ошибок управления. При этом в случае модального алгоритма управления формируемые фазовым корректором моды среднестатистически ортогональны и обеспечивают наискорейшее убывание ошибки компенсации при увеличении числа используемых в АОС мод.

Известен подход к разработке алгоритма управления фазовым j корректором АОС, состоящий в определении управляющих фазовых воздействий, обеспечивающих оптимизацию целевой функции АОС ! (являющейся функцией показателей качества (8), (9), непосредственно регистрируемой системой, без промежуточного этапа измерения и обработки результатов измерений ФИ [1]). Поиск экстремума целевой функции может осуществляться с помощью поискового модального алгоритма управления корректором — путем последовательной поисковой оптимизации значений целевой функции АОС для каждой из нескольких мод, число и вид которых необходимо определить в соответствии с условиями задачи применения АОС. В этом случае требования к модам АОС практически повторяют требования к модам Карунена—Лоэва для АОС фазового сопряжения, а именно: моды должны быть пространственно ортогональными для обеспечения независимости каналов управления АОС и достижения ею значения глобального экстремума целевой функции; ошибка компенсации при поочередной реализации мод должна быстро убывать с ростом номера моды для обеспечения быстрейшего действия АОС при заданном качестве компенсации; моды должны формироваться фазовым корректором АОС без ошибки аппроксимации, наличие которой будет приводить к ухудшению сходимости алгоритма и увеличению ошибки компенсации. Чтобы применить полученные выше соотношения для определения оптимальных мод к АОС с поисковым алгоритмом управления, в формуле (29)—(34) достаточно принять, что шумы измерения ФИ равны нулю. Соответствующая модификация выражений (29)—(34) приводит к следующей системе уравнений:

$$A^{-T} |RR|^{-1} A^{-1} = E; \quad (35)$$

$$A^{-T} G A^{-1} = |\lambda_n^2 \delta_{nm}|, \quad (36)$$

где

$$G = |RR|^{-1} \left| \int \int A(\mathbf{p}_1) A(\mathbf{p}) \overline{(\varphi(\mathbf{p}_1, t) - \langle \varphi(\mathbf{p}_1, t \rangle) (\varphi(\mathbf{p}, t) - \langle \varphi(\mathbf{p}, t \rangle))} \overline{R_n^\vee(\mathbf{p}_1) R_m^\vee(\mathbf{p})} d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p} / \right. \\ \left. / \left(\int A(\mathbf{p}) d\mathbf{p} \right)^2 \right| |RR|^{-1};$$

$$G = |RR|^{-1} \left| \int \int A^2(\mathbf{p}_1) A^2(\mathbf{p}) \overline{(\nabla R_n^\vee(\mathbf{p}_1) \nabla \varphi(\mathbf{p}_1, t)) (\nabla R_m^\vee(\mathbf{p}) \nabla \varphi(\mathbf{p}, t))} \times \right. \\ \left. \times \left(\int A^2(\mathbf{p}) d\mathbf{p} \right)^{-2} d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p} \right| |RR|^{-1}$$

в случае показателей качества (8) и (9) соответственно. Таким образом, соотношения (35), (36) определяют моды Карунена–Лоэва для поискового модального алгоритма компенсации ФИ, при этом остаточная ошибка компенсации рассчитывается по формуле (15).

Для АОС модального управления представляют интерес пространственно ортогональные моды, обеспечивающие минимизацию одновременно обоих показателей качества (8), (9). В этом случае первое уравнение системы (28), (29) (или (24), (25), (35), (36)) заменяется на два – условия ортогональности функций $(F_n - \langle F_n \rangle)$ и (∇F_n) , то есть задача определения алгоритма управления АОС сводится к решению системы трех уравнений. Построенные для этой задачи моды $(F_n - \langle F_n \rangle)$ будут среднестатистически пространственно-ортогональными при управлении АОС по обоим энергетическим критериям качества, то есть такой алгоритм управления будет гарантировать формирование АОС потоков излучения минимальной расходимости и максимальной пиковой интенсивности. Однако доказательство существования решений описанной системы уравнений требует специальных исследований.

Исследование алгоритмов восстановления и компенсации ФИ

Развитая теория была использована для исследования эффективности зонального и модального алгоритмов управления фазовым корректором – деформируемым зеркалом (ДЗ) АОС фазового сопряжения, имеющим детерминированные функции отклика, при условии что в АОС в измеренных ФИ присутствует шумовая компонента. С этой целью была определена ошибка компенсации ФИ в зависимости от числа каналов управления фазовым корректором АОС, величины отношения сигнал/шум при проведении каждого отсчета ФИ датчиком волнового фронта гартмановского типа, радиуса корреляции ФИ, и проведено сравнение с минимальной ее величиной, получающейся при осуществлении развитой процедуры оптимального восстановления ФИ.

Численные расчеты мод Карунена–Лоэва проводились на основе матричных уравнений (13), (14) и (27), (28), поскольку они требовали существенно меньших ресурсов ЭВМ в сравнении с расчетами на основе интегральных уравнений.

При проведении расчетов предполагалось, что актюаторы круглого ДЗ расположены в узлах гексагональной решетки. Функции отклика круглого ДЗ были приняты в виде [12]:

$R_n(\mathbf{p}) = \exp[\ln 0,15 ((\mathbf{p} - \mathbf{p}_n)/b)^2]$, b – расстояние между приводами; \mathbf{p}_n – координаты узлов гексагональной решетки. Количество каналов датчика волнового фронта гартмановского типа принималось равным 3, 7, 19 и равнялось числу актюаторов ДЗ.

Вектор измеренных значений ФИ в этих допущениях имел вид

$$M_n = \partial \varphi(\mathbf{p}_n, t - \tau) / \partial \omega_n + N_{aw}(\mathbf{p}_n); \quad n = 1, 2, \dots, 2N,$$

где τ – временной интервал между моментами измерения ФИ и реализации управления ДЗ; $\omega = x$ при $n = 1, 2, \dots, N$ и $\omega = y$ при $n = N+1, \dots, 2N$; $\partial \varphi / \partial x$, $\partial \varphi / \partial y$ – наклоны функции восстанавливаемых или компенсируемых ФИ поля; N_{ax} , N_{ay} – ошибки их измерения (шумы измерений). Статистические характеристики ФИ и шума при этом задавались следующими соотношениями:

$$\overline{\varphi(\mathbf{p}_1, t_1) \varphi(\mathbf{p}_2, t_2)} = \sigma^2 B_t(|t_1 - t_2|) \exp(-|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2|^2 / R_c^2); \quad \overline{N_{ax}(\mathbf{p}_n) N_{ay}(\mathbf{p}_m)} = 0;$$

$$\overline{N_{ax,y}(\mathbf{p}_n) d\varphi(\mathbf{p}_m) / d\omega} = 0; \quad \overline{N_{ax,y}(\mathbf{p}_n) \varphi(\mathbf{p}_m)} = 0; \quad \overline{N_{ax}(\mathbf{p}_n) N_{ax}(\mathbf{p}_m)} = \overline{N_{ay}(\mathbf{p}_n) N_{ay}(\mathbf{p}_m)} = N_a^2 \delta_{nm} / 2,$$

в которых $B_t(|t_1 - t_2|)$ — коэффициент временной корреляции $\varphi(\mathbf{p}, t)$; σ^2 , R_c — соответственно дисперсия и радиус корреляции восстанавливаемых ФИ, N_a^2 — дисперсия шума. Расчеты остаточных ошибок компенсации ФИ проводились по формуле (26), а ошибок восстановления — по (11); оптимальные моды для модального алгоритма управления находились из матричных систем (13), (14) и (27), (28).

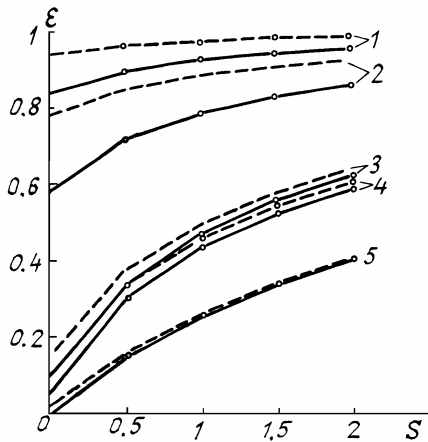


Рис. 1. Зависимость относительной остаточной ошибки восстановления (сплошные линии) и компенсации (штриховые) ФИ от величины шума S . Кривые 1, 2, 3 соответствуют $N = 3, 7, 19$ при $C = 0,5$. Кривые 4, 5 — $N = 7$ при $C = 1, 2$

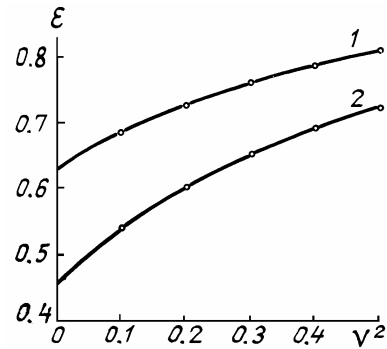


Рис. 2. Зависимость относительной остаточной ошибки компенсации от дисперсии ошибки управления. Кривые 1, 2 соответствуют $S = 0,0, S = 0,5$ для $N = 7, C = 0,5, b = 0,5$

На рис. 1 для АОС без задержки управления ($\tau = 0$) приведено семейство зависимостей относительной остаточной ошибки компенсации ФИ $\varepsilon(S) = \delta_\varphi^2 / (\langle \varphi^2 \rangle - \overline{\langle \varphi \rangle^2})$ от величины относительного уровня шума $S = N_a^2 / g^2$ в которой $g^2 = 4\sigma^2 / c^2$ — средний квадрат градиента ФИ, $c = R_c / R_3$ — относительный радиус корреляции ФИ, R_3 — радиус зеркала. Кривые 1, 2, 3 на рис. 1 получены для АОС с числом каналов управления $N = 3, 7, 19$ соответственно при относительном радиусе корреляции ФИ $c = 0,5$. Кривые 4, 5 на рис. 1 соответствуют величинам $c = 1, 2$ для АОС с числом каналов управления $N = 7$. Сплошные линии соответствуют ошибке восстановления, штриховые — ошибке компенсации ФИ.

Сравнение зависимостей показывает, что ошибка оптимального восстановления ФИ в АОС всегда меньше ошибки их компенсации. Относительное различие между ошибками компенсации и восстановления в рассматриваемом диапазоне изменения параметров возрастает с ростом числа каналов управления АОС и достигает 5–8 раз при $N = 19$. Уменьшение их относительного различия при уменьшении числа каналов управления АОС N объясняется общим снижением эффективности компенсации и восстановления ФИ. При этом значения ε близки к 1 для обоих случаев. Увеличение уровня шумов в АОС приводит к увеличению ошибок компенсации и восстановления ФИ и, как следствие, к уменьшению относительного различия между ними, которое при $S \geq 0,5 \dots 1,0$ составляет $< 10\%$. Абсолютная разница между ошибками компенсации и восстановления в области $S = 0 \dots 0,3$ остается приблизительно постоянной и равной ее величине в отсутствие шумов. Таким образом, полученные зависимости позволяют определять эффективность восстановления и компенсации ФИ в АОС фазового сопряжения и обосновать выбор рациональных параметров АОС, предназначенной для решения практических задач коррекции ФИ.

Рис. 1 может использоваться для оценки эффективности АОС, в которой управляемые компенсирующие фазовые воздействия обрабатываются с временной задержкой τ . В этом случае ошибки компенсации (и восстановления) $\varepsilon(\tau, S)$ связаны с $\varepsilon(S)$ ($\varepsilon(0, S) = \varepsilon(S)$, при $\tau = 0$) соотношением, следующим из (8), (9), (17):

$$\varepsilon(\tau, S) = 1 - B_t^2(\tau) * [1 - \varepsilon(S)] .$$

Полученное выражение позволяет оценить величину допустимого для АОС времени задержки τ_0 в обработке компенсирующего ФИ управляемого фазового воздействия. Будем исходить из условия, что для временных задержек $\tau < \tau_0$ динамическая часть ошибки компенсации ФИ ($\varepsilon(\tau, S) - \varepsilon(S)$) не превышает ее статического значения ($\varepsilon(S)$). В случае близкого к гауссовскому коэффициента корреляции ($B_t(\tau) = \exp(-\tau/\tau_c/q)$, τ_c — время корреляции, $q > 0$) принятое условие выполняется при $\tau_c \approx \tau_c [\varepsilon(S)/2]^{1/q}$. Большим значениям q соответствуют менее жесткие требования на быстродействие.

На рис. 2 приведена зависимость ошибки компенсации ФИ от дисперсии ошибки управления v^2 при $\tau = 0$. Статистические характеристики ошибок управления принимались в виде $\overline{v_n v_m} = v^2 \delta_{nm}$. Относительная ошибка компенсации $\varepsilon(v, S)$ увеличивается с ростом v^2 и оценивается величиной $\varepsilon(v, S) \approx 1 - (1 - \varepsilon(S))/(1 + v^2)$.

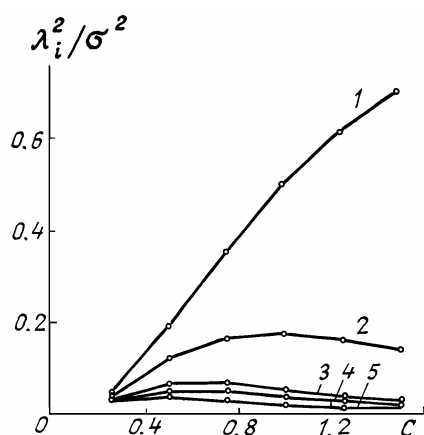


Рис. 3. Зависимость относительного вклада мод Карунена—Лоэва в средний квадрат компенсирующей фазы от радиуса корреляции C при $N = 7$; $S = 0$; $b = 0,5$. Кривая 1 соответствует моде номер 1; 2 — модам 2 и 3; 3 — модам 4 и 5; кривая 4 — моде 6; 5 — моде 7

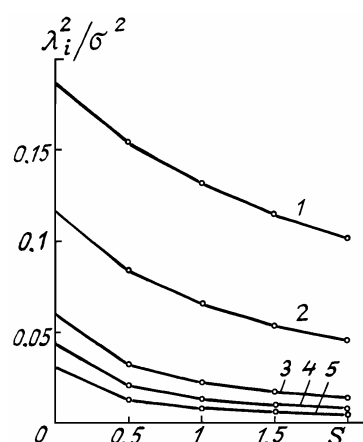


Рис. 4. Зависимость относительного вклада мод Карунена—Лоэва в средний квадрат компенсирующей фазы от уровня шума S при $C = 0,5$; $N = 7$; $b = 0,5$. Кривая 1 соответствует моде номер 1; 2 — модам 2 и 3; 3 — модам 4 и 5; кривая 4 — моде 6; 5 — моде 7

На рис. 3 представлена зависимость от радиуса корреляции ФИ величин λ_i^2 / σ^2 относительного вклада ортогональных мод Карунена—Лоэва в величину среднего квадрата компенсирующей фазы $\sigma_\varphi^2 = \overline{\varphi_c} - \langle \varphi_c \rangle^2$ при $N = 7$. Данные рис. 3 позволяют оценить число мод АОС, необходимое для компенсации ФИ с заданной точностью в присутствии шумов заданной интенсивности. Анализ зависимостей показывает, что вклады различных мод в величину среднего квадрата компенсирующей фазы, существенно различны при больших радиусах корреляции ФИ, выравниваются при его уменьшении. Каждая мода характеризуется соответствующей ей пространственной частотой. Когда радиус корреляции ФИ достаточно мал, то пространственные частоты мод оказываются в области постоянной плотности мощности спектра частот компенсируемой фазы, в связи с чем вклад различных мод в компенсацию не зависит от частоты и номера моды.

Из рис. 3 следует, что вклад каждой моды в зависимости от радиуса корреляции имеет максимум, величина и положение которого зависят от номера моды. При увеличении номера моды положение максимума смещается в сторону меньших радиусов корреляции. Наличие максимума связано с тем, что вклад каждой моды уменьшается до нуля как при $c \rightarrow 0$, так и при $c \rightarrow \infty$: при стремлении радиуса корреляции ФИ к нулю приходящаяся на моду плотность мощности ФИ уменьшается за счет уширения спектра ФИ, а при увеличении радиуса корреляции — за счет концентрации спектра вокруг нулевой частоты. Максимум вклада низших мод приходится на область радиусов корреляции $c \sim 1$.

На рис. 4 приведены графики относительного вклада λ_i^2 / σ^2 мод, используемых для компенсации ФИ, в средний квадрат компенсирующего фазового распределения в зависимости от относительной интенсивности шумов измерений S при $N = 7$ и $c = 0,5$. Вклад каждой из мод уменьшается с ростом шума S .

Таким образом, результаты расчетов в рамках развитых модельных представлений позволяют прогнозировать эффективность и определять условия оптимального использования АОС фазового сопряжения при решении практических задач атмосферной и лазерной оптики.

1. Адаптивная оптика /Под ред.Д. Фрида. Сборник статей. М.: Мир, 1980. 482 с.
2. Кислов В. И., Тараненко В. Г. //Радиотехника и электроника. 1986. Т. 31. № 11. С. 2187—2190.
3. Лукин В. П., Чарноцкий М. И. //Оптика атмосферы. 1990. Т. 3. № 12. С. 1294—1299.
4. Wallner E. P. //JOSA of Am. 1983. V. 73. P. 1771—1776.
5. Welsh V. M., Gardner C. S. //JOSA of Am. 1991. V. 8. № 1. P. 69—80.
6. Wang J. Y., Markey J. K. //JOSA of Am. 1978. V. 68. № 1. P. 78.
7. Шишаков К. В., Шмальгаузен В. И. //Оптика атмосферы. 1990. Т. 3. № 12. С. 1244—1247.
8. Буслаев В. С. Вариационное исчисление. Л.: Изд-во ЛГУ, 1980.
9. Татарский В. И. //Изв. вузов. Сер. Радиофизика. 1981. Т. 24. С. 861—872.
10. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988. 575 с.
11. Вайнштейн Л. А., Зубаков В. Д. Выделение сигналов на фоне случайных помех. М.: Сов. радио, 1960.
12. Garcia H. R., Brooks L. D. //SPIE. 1978. V. 141. P. 74—81.

E. A. Ivanova, V. I. Kislov, S. A. Chetkin. Statistical model of Phase Conjugation Adaptive Optical Systems with Measurement Noises.

Algorithms of wave front reconstruction and compensation for phase distortions by adaptive optical system of phase conjugation in presence of measurement noises and errors of phase corrector control developed within the framework statistical approach based on the variational and matrix methods are presented. The reconstructed and compensating phase distributions use information about statistical characteristics of wave front, measurement noises and control errors. Equations for the orthogonal modes of Karhunen–Loeve type, providing minimum error of phase distortion compensation at a fixed number of modes and performed without an approximation error by a phase corrector, are obtained and studied. Results of calculations of residual error of reconstruction and compensation when the number of Hartmann sensor channels and number of actuators is equal to 3, 7 and 19 as a function of measurement noises and control errors are presented.