«Оптика атмосферы и океана», **9**, N 3 (1996)

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИКИ АТМОСФЕРЫ И ОКЕАНА

УДК 621.396.965.8

С.М. Чернявский

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ОПТИЧЕСКОГО СИГНАЛА МЕТОДАМИ ВЫПУКЛОГО АНАЛИЗА

Рассматриваются две обратные задачи оптики с позиций выпуклого анализа: восстановление фазовой составляющей оптического сигнала по известному модулю и модулю его преобразования Фурье в заданной области и восстановление некогерентного источника по его зашумленному изображению. Решение каждой задачи сводится к нахождению граничной точки выпуклого множества с заданным экстремальным свойством.

Восстановление оптического сигнала по его изображению относится к числу плохо обусловленных задач. Одним из методов ее регуляризации является ограничение множества решений. Метод нахождения решений обратных задач оптики на заданных выпуклых множествах оказался эффективным, и ему посвящено много публикаций. К ним относится и работа [1], в которой задача восстановления сигнала рассматривается как задача нахождения точки пересечения заданных выпуклых множеств и решается итерационным методом последовательного проектирования на эти множества. В [2] строится итерационный алгоритм нахождения источника по его зашумленному изображению при условии, что величины источника и шума ограничены пределами заданных выпуклых множеств. В данной статье рассматривается метод восстановления сигнала на выпуклом множестве с заданным экстремальным свойством. В двойственной форме это условие состоит в том, что данная точка еще не может быть отделена гиперплоскостью от выпуклого множества. Двойственное условие позволяет исследовать свойства искомого решения и строить приближенные методы его нахождения. В частности, тихоновская регуляризация [3] решения уравнения путем нахождения решения с минимальной нормой при заданной величине нормы невязки может рассматриваться как задача нахождения на выпуклом множестве заданной граничной точки.

Восстановление фазы функции зрачка по известной функции рассеивания точки в заданной области

Функция зрачка $G(\xi, \eta) = A(\xi, \eta)\exp(i\Phi(\xi, \eta))$ имеет носитель Ω в плоскости $0\xi\eta$. Предполагаются известными амплитуда $A(\xi, \eta)$ и функция рассеивания точки $h(x, y) = |g(x, y)|^2$ на области ω плоскости изображения $0xy$, где $g = F(G)$ – преобразование Фурье от G. При этих условиях требуется найти фазовую функцию $\Phi(\xi, \eta)$. Под решением фазовой задачи будем понимать нахождение любой функции $\Phi(\xi, \eta)$, удовлетворяющей условию

$$|F(G)|^2 = h(x, y) \quad \text{при} \quad (x, y) \in \omega. \qquad (1)$$

На множестве функций, заданных на $0xy$, зададим две нормы

$$\|g\|^2 = \iint_{-\infty}^{\infty} |g(x, y)|^2 dxdy \quad \text{и} \quad J(g) = ((\|g\|_{2/p})^2 + (\|g\|_2)^2)^{1/2},$$

где полунормы

$$(\|g\|_{2/p})^{2/p} = \iint_{\omega} |g(x,y)|^{2/p} d\mu(x,y), \; (\|g\|_2)^2 = \iint_{\omega'} |g(x,y)|^2 dxdy,$$

$$\omega + \omega' = 0xy, \; 2/p > 1, \; p^{-1} + q^{-1} = 1,$$

$$d\mu = \rho(x, y)dxdy,\ \ \rho = h^{1/q}(x, y)/M^{1/q},\ \ M = \iint_{\omega} h(x, y)dxdy.$$

Для дальнейшего нам важно следующее непосредственно проверяемое неравенство

$$\| g \| \geq J(g). \tag{2}$$

Л е м м а 1 . На функциях g, удовлетворяющих условию

$$| g(x,y) |^2 = ch(x, y),\ \ c > 0,\ \ (x, y) \in \omega, \tag{3}$$

и только на них, неравенство (2) переходит в равенство.

Достаточность условия (3) проверяется непосредственной его подстановкой в (2). Необходимость: из определения норм $\| g \|$ и $J(g)$ неравенство (2) переходит в равенство на функциях g, для которых

$$\min_g \left[\iint_{\omega} | g(x, y) |^2 dxdy - \left(\iint_{\omega} | g(x, y) |^{2/p} d\mu(x, y) \right)^p \right] = 0.$$

Вычисляя производную от функционала и приравнивая ее нулю, найдем, что

$$2 | g | - p(\| g \|_{2/p})^{2/q}\, 2p^{-1} | g |^{2/p-1}\, \rho = 0,$$

откуда, считая $g \neq 0$, $| g(x,y) |^2 = h(x,y)(\| g \|_{2/p})^2/M$, что равносильно (3).

Обозначим через B_1 и B_2 два банаховых пространства функций на плоскости $0xy$ с соответствующими нормами $\| g \|$ и $J(g)$. Из неравенства (2) следует, что $B_1 \subset B_2$. Для функции $g = F(G) \in B_1$ справедливо равенство Планшерона:

$$\| g \|^2 = \iint_{\Omega} | G(\xi, \eta) |^2 d\xi d\eta = \iint_{\Omega} \mathrm{A}^2(\xi, \eta) d\xi d\eta = l^2,$$

где величина l известна, так как известна амплитуда А.

Пусть S_1 и S_2 – замкнутые шары радиуса l в пространствах B_1 и B_2 и ∂S_1 и ∂S_2 их сферы. Из неравенства (2) и леммы 1 заключаем, что $S_1 \subset S_2$ и $\partial S_1 \cap \partial S_2 \neq \varnothing$. Таким образом, шар S_1 представляет собой сплюснутое образование в шаре S_2, вытянутое в направлении граничных точек, у которых не происходит изменения нормы при тождественном преобразовании из точек пространства B_1 в точки пространства B_2.

Рассмотрим выпуклое замкнутое и ограниченное множество в B_1 (множество достижимости): $V = \{g\colon g = F(G),\ \ | G(\xi, \eta) | \leq \mathrm{A}(\xi, \eta)\} \subset S_1 \subset S_2$, для которого в силу предыдущего справедлива следующая лемма.

Л е м м а 2 . Для существования решения фазовой задачи, удовлетворяющего условию (1), необходимо выполнение условия

$$V \cap \partial S_2 \neq \varnothing \tag{4}$$

и достаточно, чтобы фазовая задача имела решение, удовлетворяющее условию (3). Если ω совпадает с $0xy$, то в (3) $c = 1$.

Запишем условие (4) в двойственной форме. Линейный функционал λ из сопряженного пространства B_2^* задается равенством

$$\lambda(g) = \iint_{\omega} g(x, y)\lambda^*(x, y)d\mu(x, y) + \iint_{\omega'} g(x, y)\lambda^*(x, y)dxdy,$$

где * – символ комплексного сопряжения, имеющий норму

$$((\| g \|_{2/q'})^2 + (\| g \|_2)^2)^{1/2},\ \ q' + p = 2.$$

Включение $V \subset S_2$ эквивалентно неравенству

$$\max_{g \in V} \mathrm{Re}\lambda(g) \leq \max_{g \in S_2} \mathrm{Re}\lambda(g) = l \| \lambda \| \ \text{ для любых }\ \lambda \in B_2^*,$$

которое в силу его однородности равносильно неравенству

$$\sup_{\|\lambda\|=1} \max_{g\in V} \mathrm{Re}\lambda(g) \le l. \tag{5}$$

Для любого $g_0 \in B_2$ справедливо неравенство Re $\lambda(g) \le J(g)\|\lambda\|$ при всех λ, но существует единственный функционал λ_0 (экстремальный), для которого $\|\lambda\| = 1$ и Re $\lambda_0(g_0) = \lambda_0(g_0) = J(g_0)\|\lambda\| = J(g_0)$. Экстремальный функционал функции $g = |g(x, y)|\exp(i\varphi(x, y))$ имеет вид

$$\lambda(x, y) = J^{-1}(g)(\|g\|_{2/p})^{2/q'}|g(x, y)|^{q'/p}\exp(i\varphi(x, y)) \quad \text{при} \quad (x, y) \in \omega$$

и

$$\lambda(x, y) = J^{-1}(g)\ |g(x, y)|\exp(i\varphi(x, y)) \quad \text{при} \quad (x, y) \in \omega'.$$

Пусть $g_0 \in V \cap \partial S_2$ и λ_0 – экстремальный функционал g_0, тогда

$$\mathrm{Re}\lambda_0(g_0) = J(g_0) = l. \tag{6}$$

Из (5) и (6) следует, что функция $g \in V$ с максимальной нормой $J(g) = l$ является решением экстремальной задачи

$$\max_{\|\lambda\|=1} \max_{g\in V} \mathrm{Re}\lambda(g) = l. \tag{7}$$

Выражение $\lambda(F(G)) = \Lambda(G)$ задает линейный функционал Λ в пространстве L_2 на плоскости $0\xi\eta$. Здесь $\Lambda = F^{-1}(\lambda\rho')$, где $\rho' = \rho$ на ω и 1 на ω'. Если ввести множество $U = \{G: |G(\xi, \eta)| \le \mathrm{A}(\xi, \eta)\}$, то уравнение (7) запишется в виде

$$\max_{\|\lambda\|=1} \max_{G\in U} \mathrm{Re}\Lambda(G) = l. \tag{8}$$

Если λ^0 и G^0 – решение задачи (8) и $\Lambda^0 = F^{-1}(\lambda^0\rho')$, то G^0 удовлетворяет условию максимума

$$\mathrm{Re}\Lambda^0(G^0) = \max_{G\in U}\mathrm{Re}\Lambda^0(G) = \iint_{\Omega} \mathrm{A}(\xi, \eta)\,|\Lambda^0(\xi, \eta)|\,d\xi d\eta$$

при

$$G^0 = \mathrm{A}(\xi, \eta)\Lambda^0(\xi, \eta)/|\Lambda^0(\xi, \eta)|. \tag{9}$$

Функция G^0 удовлетворяет условию $|G^0(\xi, \eta)| = \mathrm{A}(\xi, \eta)$, поэтому она может рассматриваться как допустимая функция зрачка, для нее выполняется условие (4), а следовательно и (3). Если при этом $c = 1$, то G^0 есть решение фазовой задачи.

Методы построения максимизирующей последовательности

1. В задаче

$$\max_{\|\lambda\|=1} f(\lambda) = l,$$

где

$$f(\lambda) = \max_{g\in V}\mathrm{Re}\lambda(g), \tag{10}$$

требуется построить максимизирующую последовательность λ_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$\|\lambda_k\| = 1, \quad f(\lambda_k) < f(\lambda_{k+1}), \quad \lim_{k\to\infty} f(\lambda_k) = l.$$

Пусть G_k есть допустимая функция зрачка, $g_k = F(G_k)$, λ_k – экстремальный функционал g_k, $\Lambda_k = F^{-1}(\lambda_k\rho')$, G_{k+1} – функция, удовлетворяющая условию максимума (9) на λ_k и $g_{k+1} = F(G_{k+1})$, λ_{k+1} – экстремальный функционал g_{k+1}. Справедлива цепочка неравенств

$J(g_k) = \mathrm{Re}\,\lambda_k(g_k) \le f(\lambda_k) = \mathrm{Re}\lambda_k(g_{k+1}) \le J(g_{k+1}) = \mathrm{Re}\lambda_{k+1}(g_{k+1}) \le f(\lambda_{k+1})$. Если $g_k \ne g_{k+1}$, то 2-е неравенство является строгим в силу единственности экстремального функционала для g, поэтому $J(g_k) < J(g_{k+1})$ и $f(\lambda_k) < f(\lambda_{k+1})$. Здесь возможны две ситуации: 1) λ_k – максимизирующая последовательность; 2) $g_k = g_{k+1}$ при некотором k. Если при этом $f(\lambda_k) = l$, то λ_k – решение задачи (10). Если $f(\lambda_k) \ne l$, то необходимо пробовать новые $g \in V$ с большей нормой, чем $J(g_k)$.

2. Метод чередующихся проекций. Пусть g – точка и V – замкнутое множество в B_2. Точку $g_1 \in V$ назовем проекцией g на V, если

$$J(g_1 - g) = \min_{g' \in V} J(g' - g), \tag{11}$$

и обозначим $g_1 = P_V g$, где P_V – операция проектирования (11).

Фазовая задача сведена в соответствии с леммой 2 к нахождению точки $g \in V \cap S_2$. Максимизирующую норму последовательность определим итерационным соотношением

$$g_k \in V, \quad g_{k+1} = P_V P_{S_2} g_k, \quad k = 0, 1, 2, ..., \quad P_{S_2} g = lg/J(g), \tag{12}$$

где $P_V g$ – решение задачи выпуклого программирования (11).

Справедливы следующие три соотношения:

$$J(P_{S_2} g_k - g_k) \ge J(P_{S_2} g_k - g_{k+1}), \tag{13}$$

$J(P_{S_2} g_k) = J(P_{S_2} g_k - g_k) + J(g_k)$, $J(P_{S_2} g_k) \le J(P_{S_2} g_k - g_{k+1}) + J(g_{k+1})$, вытекающие из определения проекции, оператора P_{S_2} и неравенства треугольника для нормы. Из 2-го и 3-го соотношений получаем, что

$$J(g_k) + [J(P_{S_2} g_k - g_k) - J(P_{S_2} g_k - g_{k+1})] \le J(g_{k+1}). \tag{14}$$

Возможны два случая:

1. $g_k \ne g_{k+1}$. Тогда в силу единственности проекции в B_2 в (13) будет строгое неравенство, с учетом которого из (14) $J(g_k) < J(g_{k+1})$. Если $J(g_k) \to l$, то последовательность (12) максимизирующая.

2. При некотором k $g_k = g_{k+1}$. Если $J(g_k) = l$, то g_k – решение. Иначе g_k является промежуточной «вершиной» множества V. Необходимо подобрать новую точку g_{k+1} такую, что $J(g_{k+1}) > J(g_k)$.

Восстановление некогерентного источника по известной функции рассеивания точки $h(x, y; x_0, y_0)$ и зашумленному изображению

Пусть распределение интенсивности источника и его зашумленного изображения описывается функциями $I_0(x_0, y_0)$ и $I(x, y)$. Необходимо восстановить I_0 в области E_0 по известной I в области $E \subset E_0$ и по известной функции $h(x, y; x_0, y_0)$.

Рассматриваемые функции связаны интегралом суперпозиции

$$I(x, y) = \iint_{E_0} h(x, y; x_0, y_0)\, I_0(x_0, y_0) dx_0 dv_0 + z(x, y), \quad (x, y) \in E, \tag{15}$$

где функция $z(x, y)$ характеризует влияние шума и неточность решения уравнения (15). Будем предполагать, что $I_0 \in L_{p_0}(E_0)$, а $I, z \in L_p(E, \mu)$, $p_0, p > 1$. Мера $\mu = \mu(I)$ зависит от I и отражает определенным образом назначение функции z. Пару функций $I_0 \in L_{p_0}(E_0)$ и $z \in L_p(E, \mu)$, удовлетворяющую уравнению (15), будем называть решением этого уравнения. В дальнейшем уравнение (15) будем писать в операторной форме $I = hI_0 + z$.

Выберем средний уровень интенсивности $I_{0\text{ср}}(x_0, y_0)$ так, чтобы в выражении $I_0 = I_{0\text{ср}} + u$ функция $u(x_0, y_0)$ имела произвольный знак. Полагая $a = I - hI_{0\text{ср}}$, уравнение (15) примет вид

$$a = hu + z. \tag{16}$$

Чтобы сузить множество возможных решений, введем два выпуклых замкнутых и ограниченных множества $U \in L_{p_0}(E_0)$ и $Z \in L_p(E, \mu)$, зависящих в общем случае от I, причем $0 \in \operatorname{int} Z$. Решение (u, z) назовем допустимым, если $u \in \alpha U$ и $z \in \delta Z$, где α и δ – параметры, позволяющие деформировать множества. Выбором множеств U и Z можно учесть информацию о решении и шумах и добиться, чтобы решение было единственным и корректным. Задача восстановления источника свелась к нахождению допустимого решения уравнения (16).

Рассмотрим множество $V = \{g\colon\ g = hu + z,\ u \in \alpha U,\ z \in \delta Z\}$, которое является выпуклым, замкнутым, ограниченным и $\operatorname{int} V \neq \varnothing$. Существование допустимого решения уравнения (16) означает, что точка $a \in V$ или, в равносильной двойственной форме, для всех $\lambda \in L_q(E, \mu)$ имеет место неравенство

$$\lambda(a) \leq \max_{g \in V} \lambda(g) = \max_{u \in \alpha U} u(h^*\lambda) + \max_{z \in \delta Z} \lambda(z). \tag{17}$$

Здесь h^* – оператор, сопряженный h. Выбором параметров α^0 и δ^0 можно добиться, чтобы точка a была граничной для множества V. Тогда на некотором функционале λ^0 в (17) достигается равенство. С учетом этого и однородности по λ неравенства (17) его можно записать в виде

$$\delta \geq \delta^0 = \max_{p(\lambda)=1} \{\lambda(a) - R(\alpha^0, \lambda)\}; \tag{18}$$

$$R(\alpha, \lambda) = \max_{u \in \alpha U} u(h^*\lambda); \quad p(\lambda) = \max_{z \in Z} \lambda(z).$$

Условие (18) является необходимым и достаточным для существования допустимого решения уравнения (16), удовлетворяющего $u \in \alpha^0 U$, $z \in \delta Z$. Связь решения вариационной задачи (18) с решением уравнения (16) дает следующее предложение.

П р е д л о ж е н и е . Если λ^0 и δ^0 – решение вариационной задачи, то функции u^0 и z^0, удовлетворяющие условию максимума

$$u^0(h^*\lambda^0) = \max_{u \in \alpha^0 U} u(h^*\lambda^0), \quad \lambda^0(z^0) = \max_{z \in \delta^0 Z} \lambda^0(z),$$

являются решением уравнения (16).

Условие разрешимости уравнения (16), записанное в виде (18), позволяет установить условия, при которых решение уравнения (16) имеет заданные свойства. Предположим, что функционал $p(\lambda)$ – строго выпуклый. Таковым он будет, например, если $Z = Z_1 = \{\,\|z\| \leq 1\}$. Введем обобщенный параметр $B = \{a, \alpha\}$, $\|B\| = \|a\| + |\alpha|$, от которого зависит максимизируемый функционал в (18).

Свойства решений вариационной задачи (18) и допустимых решений уравнения (16) определяются приведенными ниже леммами.

Л е м м а 1 . $\delta^0(B)$ – непрерывная функция.

Л е м м а 2 . При $\delta^0 > 0$ вариационная задача (18) имеет единственное решение.

Доказательство. Предположим противное, что существуют два решения λ_1 и λ_2. Тогда для них справедливы равенства $\delta^0 = \lambda_i(a) - R(\alpha, \lambda_i)$, $i = 1, 2$. Сложим эти два равенства и учтем, что функционал $R(\alpha, \lambda_i)$ – выпуклый по λ,

$$2\delta^0 \leq (\lambda_1 + \lambda_2)(a) - R(\alpha, \lambda_1 + \lambda_2). \tag{19}$$

Левая часть в (19) однородна по λ, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, иначе нарушится условие $\delta^0 > 0$. Разделим обе части в (19) на число $\beta = p(\lambda_1 + \lambda_2) < p(\lambda_1) + {} + p(\lambda_2) = 2$: $(2/\beta)\delta^0 \leq ((\lambda_1 + \lambda_2)/\beta)(a) - R(\alpha, (\lambda_1 + \lambda_2)/\beta)$. Так как $2/\beta > 1$ и $\lambda = (\lambda_1 + \lambda_2)/\beta$ удовлетворяет условию $p(\lambda) = 1$, то приходим к противоречию определения δ^0: $\delta^0 < \lambda(a) - R(\alpha, \lambda)$.

Л е м м а 3 . Если последовательность параметров B_i сходится по норме к B' и $\delta^0(B') > 0$, то последовательность решений вариационной задачи (18) $\lambda(B_i)$ имеет слабо сходящуюся подпоследовательность к $\lambda B'$.

Доказательство. Последовательность $\lambda(B_i)$ принадлежит слабо компактному множеству $\{p(\lambda) \le 1\}$. Она содержит подпоследовательность $\lambda(B_{ik})$, слабо сходящуюся к λ'. Докажем, что $\lambda' = \lambda^0(B')$. Предположим, что это не так, тогда по лемме 2 справедливо неравенство

$$[\lambda'(a) - R(\alpha, \lambda')] < \delta^0(B'). \tag{20}$$

Функционал в (18) непрерывный и вогнутый по λ, поэтому он слабо полунепрерывный сверху [4], но тогда имеет место неравенство

$$\delta^0(B_{ik}) = [\lambda_{ik}(a_{ik}) - R(\alpha_{ik}, \lambda_{ik})] = [\lambda_{ik}(a_{ik}) - R(\alpha_{ik}, \lambda_{ik})] - [\lambda_{ik}(a') - R(\alpha', \lambda_{ik})] + [\lambda_{ik}(a') - R(\alpha', \lambda_{ik})] \le c \, \| a_{ik} - a' \| -$$

$$- [R(\alpha_{ik}, \lambda_{ik}) - R(\alpha', \lambda_{ik})] + [\lambda'(a') - R(\alpha', \lambda')] \le c \, \| a_{ik} - a' \| + c_1 \| \alpha_{ik} - \alpha' \| + [\lambda'(a') - R(\alpha', \lambda')],$$

из которого в пределе получаем противоречие неравенству (20)

$$\delta^0(B') \le [\lambda'(a') - R(\alpha', \lambda')].$$

С л е д с т в и е 1. Пусть $Z = Z_1$. Тогда в области $\{B\}$, где $\delta^0(B) > 0$, решение вариационной задачи (18) $\lambda^0(B)$ непрерывно зависит от B. Если условие максимума определяет u как непрерывную функцию от $h^*\lambda$, то u непрерывно зависит от B.

Доказательство. Слабая сходимость подпоследовательности $\lambda(B_{ik})$ к $\lambda^0(B')$ при условии $\| \lambda(B_{ik}) \| = \| \lambda^0(B') \|$ обеспечивает сходимость по норме. Но тогда и сама последовательность $\lambda(B_i)$ сходится по норме к $\lambda^0(B')$, так как B_i – произвольная сходящаяся последовательность к B'.

С л е д с т в и е 2. Пусть h – компактный оператор и условие максимума определяет u как непрерывную функцию от $h^*\lambda$. Тогда в области $\{B\}$, где $\delta^0(B) > 0$, u непрерывно зависит от B.

Рассмотрим максимизирующую последовательность λ_i в задаче (18), u_i-функции, определяемые условием максимума при λ_i, $z_i = a - h^*u_i$ и $\delta_i = \min\delta$, при которых $z_i \in \delta Z$. Пусть условие максимума определяет u как непрерывную функцию от $h^*\lambda$, тогда справедлива

Л е м м а 4. Если $Z = Z_1$ или h – компактный оператор, то в области $\{B\}$, где $\delta^0(B) > 0$, справедлива двусторонняя оценка

$$\delta_i \ge \delta^0 \ge \lambda_i(a) - R(\alpha, \lambda_i),$$

в которых крайние значения стремятся к δ^0. Доказательства 1-й и 4-й лемм опущены, так как они аналогичны доказательствам приведенных здесь лемм.

1. Ю л а Д. К. Математическая теория восстановления изображений методом выпуклых проекций // Реконструкция изображений / Под ред. Г. Старка. М.: Мир, 1992. 635 с.
2. К а в к я н о в С. И., С а м о й л о в а С. В. Об учете области изменения решения при восстановлении изображения // 1-й межреспубл. симпозиум «Оптика атмосферы и океана». (Тезисы докл.). Томск: СО РАН, 1994. С. 120–121.
3. Т и х о н о в А. Н., А р с е н и н В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974. 222 с.
4. П о л я к Б. Т. // ДАН СССР. 1966. Т. 166. N 2. С. 287–290.

Казанский государственный технический университет
им. А.Н. Туполева

Поступила в редакцию
7 июля 1995 г.

S. M. C h e r n y a v s k i i. **Reconstruction of Optical Signal by Convex Analysis Method.**

Two inverse problems of optics are examined by the convex analysis methods: reconstruction of phase component of an optical signal through the known module and the module of its Fourier transform within given region as well as reconstruction of incoherent source from its noised image. The solution of each problem is reduced to finding the boundary point of the convex set with given extreme property.