

К.А. Шаповалов

Рассеяние света цилиндром конечной длины в приближении Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна.

3. Индикатриса светорассеяния

Красноярская государственная медицинская академия

Поступила в редакцию 27.09.2007 г.

Получены выражения для расчета малоугловой индикатрисы (или элемента матрицы рассеяния f_{11}) и малоугловой амплитуды светорассеяния оптически «мягким» круговым цилиндром конечной длины при падении света перпендикулярно оси симметрии цилиндра в приближении Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна (ВКБ). Приведено уточненное общее выражение для амплитуды светорассеяния оптически «мягким» круговым цилиндром конечной длины при падении света перпендикулярно оси симметрии цилиндра в приближении ВКБ.

Исследование рассеяния света несферическими частицами, входящими в состав естественных и антропогенных аэрозолей, взвешьями гидрозолей, ледяными кристаллами, имеет большое практическое значение для мониторинга состояния атмосферы и океана, в коллоидной химии и др. [1].

Для оптически «мягких» ($|m - 1| \ll 1$, где m — относительный показатель преломления частицы) светорассеивающих частиц несферической формы удобно использовать приближения Рэля–Ганса–Дебая (РГД), аномальной дифракции (АД) [2] и Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна (ВКБ).

Причем обычно для оптически «мягких» частиц, имеющих размер больше длины волны, основная доля рассеянной энергии сосредоточена в малых углах рассеяния [3]. В настоящей статье приводится анализ индикатрисы светорассеяния в малоугловой области конечным круговым цилиндром в приближении Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна для света, падающего перпендикулярно оси симметрии цилиндра.

1. Общее выражение для амплитуды светорассеяния

Чтобы корректно учесть светорассеяние в пространстве, необходимо ввести два угла во взаимно перпендикулярных плоскостях: угол рассеяния β , отсчитываемый от направления рассеяния вперед (вдоль оси y), и дополнительно азимутальный угол рассеяния α , отсчитываемый от направления оси z (рис. 1).

Используя интегральное представление амплитуды светорассеяния, в приближении ВКБ [4, 5], получим более сложное, чем в [4], выражение в скалярном виде:

$$f(\alpha, \beta) = \frac{\rho^2 H (m - 1)}{2\pi} \left[\frac{\sin\left(\frac{kH}{2} \cos \alpha\right)}{\frac{kH}{2} \cos \alpha} \right] \times \int_0^{2\pi} \int_0^1 \exp\left[i\left(\rho\psi_1(\alpha, \beta, t, \varphi) + \frac{\Delta}{2}\psi_2(t, \varphi)\right)\right] d\varphi dt, \quad (1)$$

где $\psi_1(\alpha, \beta, t, \varphi) = t(\sin\alpha \sin\beta \cos\varphi + [m - \sin\alpha \cos\beta] \sin\varphi)$, $\psi_2(t, \varphi) = \sqrt{1 - t^2} \cos^2 \varphi$; a — радиус цилиндра; H — высота цилиндра; $\Delta = 2\rho(m - 1)$ — фазовый сдвиг, $\rho = ka$ — дифракционный параметр цилиндра; $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число; λ — длина волны в дисперсионной среде.

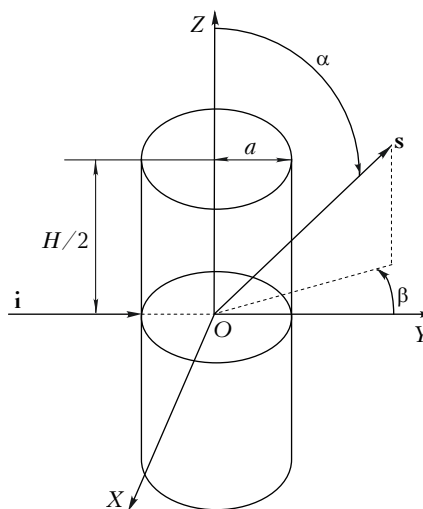


Рис. 1. Геометрия рассеяния света на круговом цилиндре радиусом a и высотой H (i, s — направления единичных векторов падающего и рассеянного света соответственно)

Однако если азимутальный угол рассеяния близок к направлению вперед, т.е. $\alpha \rightarrow \pi/2$, то выражение для амплитуды светорассеяния (1) полностью переходит в полученное нами в [4].

Далее, по-прежнему ограничимся случаем, когда азимутальный угол рассеяния $\alpha = \pi/2$, что значительно упрощает дальнейшие выражения, но несколько снижает их общность.

2. Малоугловая амплитуда светорассеяния

При малых углах рассеяния $\beta \ll 1$ и при $\alpha = \pi/2$ имеем $\sin\beta \approx \beta$, $\cos\beta \approx 1$ и $\sin\alpha = 1$, $\cos\alpha = 0$, т.е. $\rho\psi_1(\alpha, \beta, t, \varphi) = t[\rho\beta\cos\varphi + \Delta\sin\varphi/2]$, следовательно, из (1) получим

$$f\left(\frac{\pi}{2}, \beta\right) = \frac{\rho H}{2} \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (\rho\beta)^{2s}}{2^s s!} \left[\frac{J_{s+1}(\Delta)}{\Delta^s} + i \frac{H_{s+1}(\Delta)}{\Delta^s} \right] \right\}, \quad (2)$$

где $J_s(x)$ и $H_s(x)$ — функции Бесселя 1-го рода и функции Струве порядка s .

3. Малоугловая индикатриса светорассеяния

Индикатриса светорассеяния (или элемент матрицы рассеяния f_{11}) для естественного света (поляризация хаотична) рассчитывалась по формуле

$$f_{11}(\beta) = k^2 |f(\beta)|^2 \frac{1 + \cos^2(\beta)}{2}, \quad (3)$$

где $|f(\beta)|^2$ — квадрат модуля амплитуды светорассеяния.

Используя (2) и (3), получим малоугловую индикатрису светорассеяния:

$$\frac{f_{11}(\beta)}{f_{11}(0)} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j c_j(\Delta)}{(2\Delta)^j [J_1^2(\Delta) + H_1^2(\Delta)]} (\rho\beta)^{2j}, \quad (4)$$

где

$$c_j(\Delta) = \begin{cases} \frac{J_{n+1}^2(\Delta) + H_{n+1}^2(\Delta)}{[(n)!]^2} + \\ + 2 \sum_{s=0}^{n-1} \frac{J_{s+1}(\Delta)J_{j-s+1}(\Delta) + H_{s+1}(\Delta)H_{j-s+1}(\Delta)}{s!(j-s)!} \\ \text{при четном } j, j = 2n, \\ 2 \sum_{s=0}^n \frac{J_{s+1}(\Delta)J_{j-s+1}(\Delta) + H_{s+1}(\Delta)H_{j-s+1}(\Delta)}{s!(j-s)!} \\ \text{при нечетном } j, j = 2n + 1, \end{cases}$$

причем $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Ряд в (4) достаточно быстро сходится. Например, при $m = 1,03$ и $\rho\beta \leq 1$ для относительной погрешности менее 5% необходимо иметь 4 члена ряда, а при $\rho\beta \leq 2$ необходимо 7 членов. Но для коррект-

ного расчета малоугловой индикатрисы в (4) следует использовать большие дифракционные параметры $\rho > 5 \div 10$.

При малых фазовых сдвигах $\Delta < 1$ в амплитуде светорассеяния (2) можно полностью пренебречь значением мнимой части по сравнению с реальной, поэтому индикатриса (4) несколько упростится:

$$\frac{f_{11}(\beta)}{f_{11}(0)} = 1 - \left[\frac{J_2(\Delta)}{\Delta J_1(\Delta)} \right] (\rho\beta)^2 + \left[\frac{J_1(\Delta)J_3(\Delta) + J_2^2(\Delta)}{4\Delta^2 J_1^2(\Delta)} \right] (\rho\beta)^4 + O((\rho\beta)^6). \quad (5)$$

Затем, разлагая в ряд функции Бесселя при малых фазовых сдвигах $\Delta < 1$ в (5), получим выражение вида

$$\frac{f_{11}(\beta)}{f_{11}(0)} = 1 - \left[\frac{1}{4} \right] (\rho\beta)^2 + \left[\frac{5}{192} \right] (\rho\beta)^4 + O((\rho\beta)^6) = \left[\frac{2J_1(\rho\beta)}{\rho\beta} \right]^2, \quad (6)$$

что совпадает с выражением для индикатрисы в приближении РГД при больших дифракционных параметрах $\rho > 1$ [5, 6].

Наоборот, при больших фазовых сдвигах $\Delta > 10$ в амплитуде светорассеяния (2) можно полностью пренебречь значением реальной части по сравнению с мнимой, что дает

$$\frac{f_{11}(\beta)}{f_{11}(0)} = 1 - \left[\frac{H_2(\Delta)}{\Delta H_1(\Delta)} \right] (\rho\beta)^2 + \left[\frac{H_1(\Delta)H_3(\Delta) + H_2^2(\Delta)}{4\Delta^2 H_1^2(\Delta)} \right] (\rho\beta)^4 + O((\rho\beta)^6). \quad (7)$$

Далее, разлагая в ряд по Δ функции Струве при фазовых сдвигах $\Delta \rightarrow \infty$ в (7), получим

$$\frac{f_{11}(\beta)}{f_{11}(0)} = 1 - \left[\frac{1}{3} \right] (\rho\beta)^2 + \left[\frac{2}{45} \right] (\rho\beta)^4 + O((\rho\beta)^6) = \left(\frac{\sin(\rho\beta)}{\rho\beta} \right)^2. \quad (8)$$

Отметим, что (8) совпадает с индикатрисой для дифракции Фраунгофера на длинной щели шириной 2ρ [7].

Зависимость нормированной малоугловой индикатрисы светорассеяния $f_{11}(\beta)/f_{11}(0)$ от $\rho\beta$ для бесконечно длинного цилиндра (строгое решение) и конечного кругового цилиндра в приближении ВКБ с показателем преломления $m = 1,03$ при нескольких фазовых сдвигах показана на рис. 2.

Расчеты для бесконечно длинного цилиндра велись по алгоритму, указанному в [8], для конечного кругового цилиндра в приближении ВКБ — по формуле (4) при семи членах ряда, в приближении РГД и для дифракции Фраунгофера — по формулам (6) и (8) соответственно.

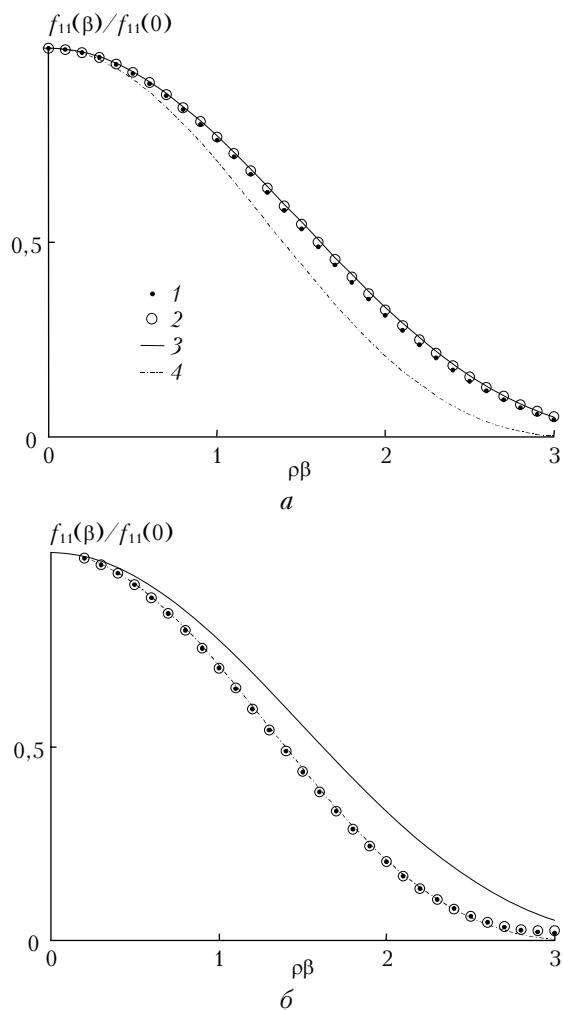


Рис. 2. Зависимость нормированной малоугловой индикатрисы светорассеяния $f_{11}(\beta)/f_{11}(0)$ от $\rho\beta$ для бесконечно длинного (1) и конечного кругового цилиндров в приближениях ВКБ (2), РГД (3), для дифракции Фраунгофера (4) с показателем преломления $m = 1,03$ и при фазовых сдвигах: $a - \Delta = 0,72$; $b - \Delta = 90$

Очевидно, что при малых фазовых сдвигах малоугловая индикатриса ВКБ (4) переходит в соответствующую индикатрису РГД (6) (рис. 2, а), а при больших фазовых сдвигах асимптотически стремится к выражению для дифракции Фраунгофера

(8) (рис. 2, б). Следует отметить, что при увеличении фазового сдвига аналогично интегральной индикатрисе светорассеяния сферических частиц [9] наблюдаются характерные затухающие осцилляции малоугловой индикатрисы.

Заключение

Представлено уточненное общее выражение для амплитуды светорассеяния оптически «мягким» круговым цилиндром конечной длины при падении света перпендикулярно оси симметрии цилиндра в приближении Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна. Получены выражения для расчета малоугловой индикатрисы и амплитуды светорассеяния оптически «мягким» цилиндром конечной длины при различных фазовых сдвигах Δ для света, падающего перпендикулярно оси симметрии цилиндра. Указаны асимптотические выражения малоугловой индикатрисы светорассеяния оптически «мягким» цилиндром конечной длины при малых ($\Delta < 1$) и больших ($\Delta \rightarrow \infty$) фазовых сдвигах.

1. Волковицкий О.А., Павлова Л.Н., Петрушин А.Г. Оптические свойства кристаллических облаков. Л.: Гидрометеониздат, 1984. 200 с.
2. Петрушин А.Г. Рассеяние и ослабление излучения «мягкими» цилиндрами конечной длины // Оптика и спектроскопия. 1983. Т. 54. Вып. 5. С. 882–884.
3. Bohren C.F., Koh G. Forward-scattering corrected extinction by nonspherical particles // Appl. Opt. 1985. V. 24. N 7. P. 1023–1029.
4. Шаповалов К.А. Рассеяние света цилиндром конечной длины в приближении Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна. 1. Амплитуда светорассеяния // Оптика атмосф. и океана. 2007. Т. 20. № 1. С. 18–20.
5. Исмаиру А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. Т. 1 / Пер. с англ. М.: Мир, 1981. 280 с.
6. Ван де Хюлст Г. Рассеяние света малыми частицами. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1961. 536 с.
7. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1970. 856 с.
8. Борен К., Хафмен Д. Поглощение и рассеяние света малыми частицами / Пер. с англ. М.: Мир, 1986. 660 с.
9. Лопатин В.Н., Шаповалов К.А. Интегральная индикатриса светорассеяния «мягких» сферических частиц в малоугловой области // Оптика и спектроскопия. 1995. Т. 78. № 5. С. 817–821.

K.A. Shapovalov. Light scattering by finite length cylinder in Wentzel–Kramers–Brillouin approximation. 3. Light scattering phase function.

The expressions for calculation of small-angle phase function (or element of scattering matrix f_{11}) and small-angle light scattering amplitude by optically «soft» circular cylinder of finite length for incident light direction perpendicular to the axis of cylinder in Wentzel–Kramers–Brillouin approximation are obtained. The more precise general expression for light scattering amplitude by optically «soft» circular cylinder of finite length for incident light direction perpendicular to the axis of cylinder in Wentzel–Kramers–Brillouin approximation is given.