

Флуктуации плотности газа в потоках с пространственной неоднородностью внутренней энергии

Д.А. Маракасов*

*Институт оптики атмосферы им. В.Е. Зуева СО РАН
634021, г. Томск, пл. Академика Зуева, 1*

Поступила в редакцию 27.05.2009 г.

Рассматриваются особенности турбулентных флуктуаций плотности газа, развивающихся при наличии градиента средней плотности внутренней энергии. Показано, что в выражении для структурной функции плотности появляется анизотропная составляющая, возрастающая с увеличением линейного размера быстрее, чем изотропная компонента. Предложена двухкомпонентная модель структурной функции показателя преломления в инерционном интервале. Приведены результаты анализа экспериментальных данных по просвечиванию лазерным пучком потока нагретого воздуха, свидетельствующие о наличии анизотропных флуктуаций показателя преломления.

Ключевые слова: турбулентность, газовая струя, анизотропия, структурная функция, просвечивание; *turbulence, gas flow, anisotropy, structural function, transillumination.*

Введение

В задачах оптического мониторинга газовых потоков большое значение имеет информация об особенностях флуктуаций показателя преломления среды. Большинство известных подходов к описанию пространственных спектров плотности газа основано на изотропной степенной модели Колмогорова—Обухова [1]. В ряде работ рассматривались анизотропные эффекты, возникающие вследствие воздействия внешних сил, например гравитационных [2, 3]. В газовых потоках, в особенности сверхзвуковых, флуктуации плотности развиваются в условиях сильной пространственной неоднородности параметров, что не может не отражаться на их пространственной структуре.

В статье рассматривается влияние неоднородности средней плотности внутренней энергии на развитие флуктуаций плотности газа. Предложена модель структурной функции плотности, содержащая наряду с изотропной компонентой, подчиняющейся степенному закону Колмогорова, анизотропную составляющую. Дан анализ результатов экспериментов по лазерному просвечиванию потока нагретого воздуха, подтверждающих наличие крупномасштабной анизотропной составляющей в спектре флуктуаций плотности в потоке.

Модель структурной функции плотности газа

Пусть поток газа характеризуется достаточно большими значениями числа Рейнольдса, так что в некотором интервале масштабов вихрей формиру-

ется развитая турбулентность. Будем считать, что выполняется гипотеза Морковина [4], позволяющая пренебречь эффектами сжимаемости при рассмотрении флуктуаций параметров потока. При этом флуктуации температуры и плотности газа невелики по сравнению с их средними значениями [5], а характерные скорости вихрей в инерционном интервале масштабов можно описывать изотропной моделью Колмогорова [1]. Это позволяет выполнить линеаризацию уравнений Навье—Стокса и рассматривать развитие турбулентных вихрей под действием внешних сил, роль которых играет пространственная неоднородность средних значений параметров среды.

Пусть вихрь с характерным радиусом R и угловой скоростью Ω развивается в среде с неоднородной в пространстве средней плотностью внутренней энергии. Малый объем газа, участвующий в турбулентном вихре, будет получать энергию от потока в течение одной половины периода $t \sim 1/\Omega$ и отдавать ее за другую половину. Следствием этого станет периодическое расширение и сжатие противоположных участков вихря, т.е. будут развиваться неоднородности плотности газа. Полагая, что на размерах вихря можно ограничиться линейным по пространственному разному слагаемым в разложении средних параметров потока газа (скорость, температура, плотность) в ряд Тейлора в окрестности центра вихря, можно записать:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \begin{pmatrix} \rho_e \\ T_e \end{pmatrix} = \Omega^{-1} \overline{A} \begin{pmatrix} r |\nabla \rho_0 \times \mathbf{n}_\Omega| \cos(\theta - \theta_\rho) - \rho_e \\ r |\nabla T_0 \times \mathbf{n}_\Omega| \cos(\theta - \theta_T) - T_e \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где ρ_e , T_e — поправки к плотности и температуре в вихре; \mathbf{n}_Ω — единичный вектор, направленный вдоль оси вращения вихря, в плоскости вихря введены

* Дмитрий Анатольевич Маракасов (mda@iao.ru).

полярные координаты (r, θ) ; градиенты осредненных плотности и температуры $\nabla\rho_0, \nabla T_0$ вычисляются в центре вихря; $\theta_{p,T}$ – полярные углы их проекций на плоскость вихря; $\bar{A} = \begin{pmatrix} A_{pp} & A_{pT} \\ A_{Tp} & A_{TT} \end{pmatrix}$ – матрица,

состоящая из обратных характерных времен, описывающих процесс обмена плотностью и температурой (т.е. внутренней энергией) между вихрем и средой. Имея в виду, что скорость обмена энергией пропорциональна количеству вещества, вовлеченного в вихревое движение, будем считать, что ее компоненты пропорциональны $\rho(\mathbf{r})$ – случайной поправке к плотности газа, связанной с переносом вихрем консервативной примеси (флуктуации температуры, влажности и т.д.).

Решение системы (1), соответствующее вынужденному движению, можно представить в виде

$$\begin{pmatrix} \rho_e \\ T_e \end{pmatrix} = \frac{r}{\Omega} \text{Re} \left\{ \left(i\bar{I} + \Omega^{-1}\bar{A} \right)^{-1} \bar{A} \begin{pmatrix} |\nabla\rho_0 \times \mathbf{n}_\Omega| \exp(i\theta - i\theta_p) \\ |\nabla T_0 \times \mathbf{n}_\Omega| \exp(i\theta - i\theta_T) \end{pmatrix} \right\}. \quad (2)$$

Предполагая, что обмен энергией происходит достаточно медленно, можно пренебречь вторым слагаемым в круглой скобке в (2). В результате получим следующее выражение для поправки к плотности в вихре:

$$\rho_e = \rho(\mathbf{r})\Omega^{-1}(\mathbf{n}_\Omega \cdot \mathbf{M}\mathbf{r}), \quad (3)$$

где \mathbf{r} – радиус-вектор текущей точки, круглыми скобками обозначено смешанное произведение векторов, а вектор

$$\mathbf{M} = \rho(\mathbf{r})^{-1}(A_{pp}\nabla\rho_0 + A_{pT}\nabla T_0) \quad (4)$$

определяется исключительно осредненными параметрами потока.

Поскольку величина ρ_e нечетна по направлению \mathbf{n}_Ω , а все ориентации этого вектора равновероятны вследствие изотропности флуктуаций скорости, то как среднее значение $\langle \rho_e \rangle$, так и взаимные корреляции этих поправок в разных вихрях обращаются в нуль. Это позволяет представить поправку к структурной функции плотности, связанную с градиентами средних температуры и плотности газа, как результат последовательного усреднения квадрата разности величин (3), относящихся к одному и тому же вихрю, по направлению вектора угловой скорости, радиус-вектору центра вихря \mathbf{r}_0 , плотности газа, увлеченного вихрем, и характерному размеру вихря. При усреднении будем считать, что плотность в вихре убывает по гауссоиду $\rho(\mathbf{r}) = \rho_1(R)\exp(-\mathbf{r}^2/R^2)$. Для амплитуды $\rho_1(R)$ и характерной скорости вихря V воспользуемся моделью Колмогорова, т.е.

$$\langle \rho_1^2 \rangle \sim R^{2/3}, \quad \Omega \sim \frac{V}{R} \sim R^{-2/3}. \quad (5)$$

Усреднение по направлениям \mathbf{n}_Ω проведем, имея в виду соотношение $\langle (\mathbf{n}_\Omega \cdot \mathbf{a})^2 \rangle_{\mathbf{n}_\Omega} = \frac{1}{3}|\mathbf{a}|^2$, где \mathbf{a} – произвольный вектор, не зависящий от \mathbf{n}_Ω :

$$\begin{aligned} & \left\langle (\rho_e(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) - \rho_e(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0))^2 \right\rangle_{\mathbf{n}_\Omega} = \\ & = \frac{1}{3\Omega^2} (\mathbf{M} \times [(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)\rho(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) - (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0)\rho(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0)])^2. \quad (6) \end{aligned}$$

При усреднении по положению центра вихря, воспользовавшись соотношением $\langle (\mathbf{n} \times \mathbf{a})^2 \rangle_{\mathbf{n}} = \frac{2}{3}|\mathbf{a}|^2$, где \mathbf{n} – единичный вектор, получим

$$\begin{aligned} & \left\langle (\rho_e(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) - \rho_e(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0))^2 \right\rangle_{\mathbf{n}_\Omega, \mathbf{r}_0} = \frac{\sqrt{\pi/2}}{48\Omega^2} R^3 \rho_1^2(R) \times \\ & \times \left[2R^2 M^2 \left(1 - e^{-\frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2}{2R^2}} \right) + |\mathbf{M} \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)|^2 e^{-\frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2}{2R^2}} \right]. \quad (7) \end{aligned}$$

Усреднение по линейному размеру вихрей будем проводить с учетом того, что концентрация вихрей $n(R)$ в инерционном интервале обратно пропорциональна кубу их линейного размера R , т.е.

$$n(R) \sim R^{-3}f(R), \quad (8)$$

где $f(R) \sim 1$ в инерционном интервале и быстро убывает при переходе в энергетический интервал. В результате получим следующее выражение для компоненты структурной функции плотности, соответствующей колебаниям плотности газа в вихрях, вследствие пространственной неоднородности средней внутренней энергии в потоке газа:

$$\begin{aligned} D_e(\mathbf{r}) = C & \left[2M^2 \int_0^\infty f(R)R^4 \left(1 - e^{-\frac{r^2}{2R^2}} \right) dR + \right. \\ & \left. + |\mathbf{M} \times \mathbf{r}|^2 \int_0^\infty f(R)R^2 e^{-\frac{r^2}{2R^2}} dR \right], \quad (9) \end{aligned}$$

где C – константа. Структурная функция (9) анизотропна, причем наименьшие значения она принимает в направлении вектора \mathbf{M} , который играет роль вынуждающей силы для колебаний плотности в вихре.

Для оптических приложений важное значение имеют корреляционная функция показателя преломления и ее спектр. Основываясь на выражении (9), вычислим спектр анизотропной компоненты корреляционной функции в инерционном интервале, где можно положить $f(R) = 1$, что дает

$$\begin{aligned} \tilde{B}_e(\mathbf{k}) & = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} (D_e(\infty) - D_e(\mathbf{r})) \exp(-2\pi i\mathbf{k}\mathbf{r}) = \\ & = \frac{3C}{2\pi^6 \sqrt{2\pi}} \frac{|\mathbf{M} \times \mathbf{k}|^2}{\kappa^{10}}. \quad (10) \end{aligned}$$

Окончательно получим выражение для спектра корреляционной функции плотности газа в инерционном интервале

$$\tilde{B}(\mathbf{k}) = C_1 \kappa^{-11/3} + C_2 \frac{|\mathbf{m} \times \mathbf{k}|^2}{\kappa^{10}}, \quad (11)$$

где первое слагаемое соответствует степенной модели Колмогорова; $\mathbf{m} = \mathbf{M}/M$; $C_{1,2}$ – некоторые постоянные. Анизотропная составляющая спектра имеет выделенную ось и может определять его поведение при достаточно малых κ .

Результаты анализа экспериментальных данных по просвечиванию лазерным пучком нагретого воздуха

Для проверки изложенной выше модели турбулентности была проведена обработка сырых данных, полученных авторами [6] в ходе экспериментов по просвечиванию искусственного локального турбулентного потока лазерным пучком.

Для проведения эксперимента [6] была использована оптическая трасса длиной 140 м в закрытом помещении. Схема эксперимента представлена на рис. 1.

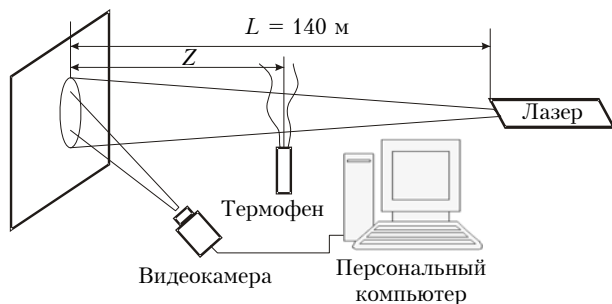


Рис. 1. Схема эксперимента

Искусственный слой движущейся поперек трассы турбулентной среды создавался при помощи термофена (теповентилятора). В качестве оптического источника был использован твердотельный лазер с длиной волны $\lambda = 532$ нм и средней мощностью 30 мВт. Диаметр пучка на выходе лазера составлял 0,4 мм, угловая расходимость 1,2 мрад. Термофен устанавливался на определенной дальности Z от плоскости приема, на расстоянии 0,5 м от центра пучка. Тепловая струя ориентировалась перпендикулярно пучку. Скорость потока равнялась 1,2 м/с на расстоянии 0,5 м от сопла. Для визуализации распределения интенсивности в поперечном сечении пучка использовался экран, установленный в конце трассы. Изображение пучка на экране регистрировалось скоростной видеокамерой с размером кадра 544×512 пикселей и средней скоростью съемки 212 кадр./с. Информация с видеокамеры записывалась в виде бинарного файла на жесткий диск компьютера.

Основная цель этих экспериментов заключалась в изучении возможности локализации потока и определении его скорости, полученные результаты представлены в [6]. В рамках задачи, рассматриваемой в настоящей статье, представляют интерес двумерные пространственные спектры флуктуаций интенсивности лазерного пучка. Эти флуктуации

вызываются, в основном, неоднородностями плотности воздуха в струе термофена, где есть значительный градиент средней внутренней энергии в направлении, перпендикулярном оси струи. Известно, что для слабых мерцаний спектры флуктуаций интенсивности прямо пропорциональны спектрам флуктуаций показателя преломления [7], вследствие чего анизотропия неоднородностей плотности должна отразиться в структуре спектров интенсивности пучка.

Спектры интенсивности рассчитывались по следующей формуле:

$$F_I(\kappa_{ij}) = \left| \text{FFT} \left(\frac{I(\mathbf{r}_{lm})}{\langle I(\mathbf{r}_{lm}) \rangle} - 1 \right) \right|^2 \frac{1}{N^2 d^2}, \quad (12)$$

где $I(\mathbf{r})$ – принимаемая интенсивность; угловыми скобками обозначена процедура усреднения по 1000 отсчетов; массивы значений интенсивности обрезались до размера $N \times N$, $N = 512$, $d = 4,5 \cdot 10^{-4}$ м – шаг оцифровки интенсивности; индексы i, j, l, m принимают значения от 0 до $N - 1$;

$$\mathbf{r}_{lm} = d(l - N/2)\mathbf{e}_x + d(m - N/2)\mathbf{e}_y;$$

$$\kappa_{ij} = \frac{(i - N/2)}{Nd}\mathbf{e}_x + \frac{(j - N/2)}{Nd}\mathbf{e}_y; \quad (13)$$

в плоскости, перпендикулярной оптической оси, введены орты $\mathbf{e}_{x,y}$, ориентированные, соответственно, вдоль и поперек оси струи.

На рис. 2 представлены результаты расчета спектра (11) для термофена с температурой струи $T = 80$ °С, расположенного на расстоянии $Z = 60$ м от экрана.

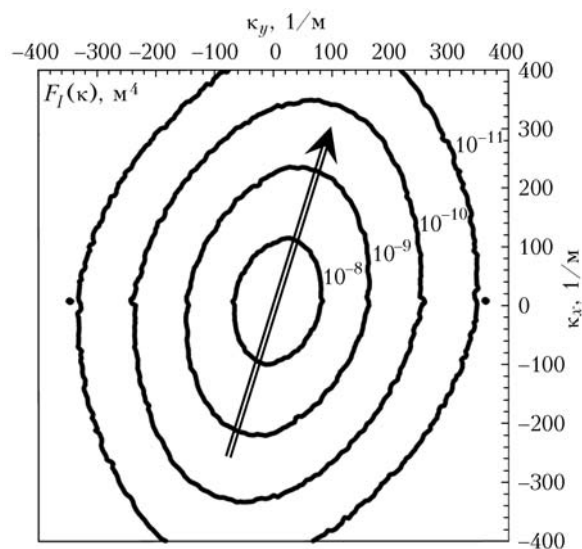


Рис. 2. Изолинии спектра флуктуаций интенсивности. Отмечена выделенная ось его анизотропной составляющей

Спектр обладает ярко выраженной анизотропией, выделенная ось отмечена стрелкой. Коэффициент анизотропии составляет $\sim 1,5$. В отличие от спектров флуктуаций интенсивности в атмосфере,

в низкочастотной области инерционного интервала спектры подчиняются степенному закону с показателем меньше $-11/3$. Его значения заметно варьируются в зависимости от температуры струи, расстояния между феном и осью пучка и других параметров и лежат в диапазоне $-6 \dots -8$. Это иллюстрирует рис. 3, на котором показано поведение спектров (11) на оси x ($\kappa_y = 0$) для фена, находящегося на расстоянии $Z = 95$ м от экрана и в атмосфере при тех же условиях регистрации. Отмечены участки со степенной зависимостью спектра.

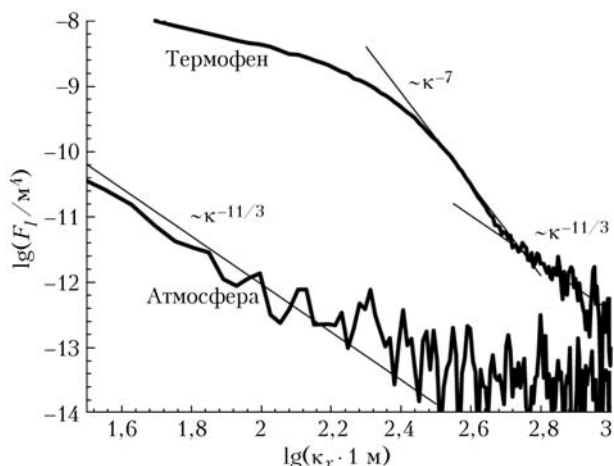


Рис. 3. Характерный вид спектров интенсивности для возмущений, вызванных струей нагретого воздуха, и распределенными вдоль трассы неоднородностями плотности в атмосфере

Указанные особенности спектров однозначно связаны с флуктуациями плотности в струе термофена. Это следует из изменения спектров интенсивности при перемещении фена вдоль оптической трассы. Поскольку лазерный пучок был расходящимся, должно было происходить масштабирование спектров по пространственным частотам, что подтверждается результатами экспериментов (рис. 4).

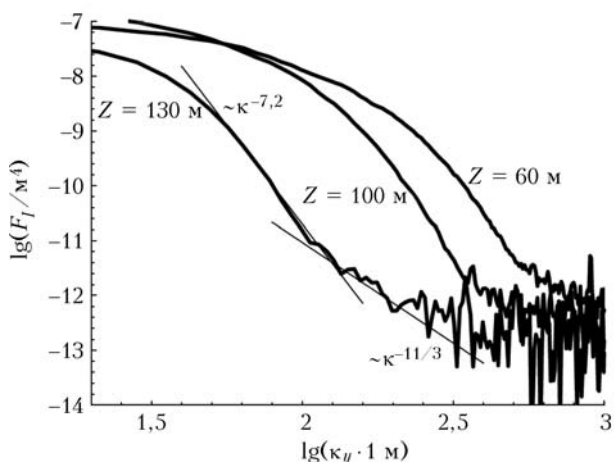


Рис. 4. Спектры флуктуаций интенсивности при различных расстояниях между термофеном и экраном (указаны рядом с кривыми)

Видно, что с увеличением расстояния между феном и приемным экраном флуктуации интенсивности становятся все более крупномасштабными, спектры сжимаются к началу координат. Необходимо отметить, что в этом процессе участвуют как крупномасштабная составляющая спектра с показателем примерно -7 , так и его мелкомасштабная изотропная компонента с показателем $-11/3$, чего не было бы, если бы они порождались неоднородностями плотности, распределенными вдоль всей трассы.

Таким образом, результаты лазерного просвечивания потока нагретого воздуха находятся в хорошем согласии с предложенной моделью. Все основные особенности спектров, рассчитанных по экспериментальным данным, соответствуют модели (11).

Заключение

В настоящей статье предложена модель структурной функции флуктуаций плотности газа в потоках с пространственно-неоднородным распределением внутренней энергии. Показано, что в области больших масштабов структурная функция становится анизотропной с выделенной осью, направление которой определяется градиентом средней плотности и внутренней энергии.

Особенности спектров интенсивности лазерного пучка, просвечивающего искусственный локальный турбулентный поток нагретого воздуха, соответствующие предложенной модели, были обнаружены в низкочастотной области. Выделяются две области спектров со степенной зависимостью от пространственной частоты: 1) мелкомасштабная с показателем $-11/3$, соответствующим модели Обухова, и 2) крупномасштабная анизотропная с показателем $-6 \dots -8$, существование которого, по-видимому, связано с наличием радиальной компоненты градиента средней температуры в струе.

Автор выражает искреннюю признательность сотрудникам ИОА СО РАН В.А. Бануху, А.П. Ростову и А.Л. Афанасьеву за любезно предоставленные экспериментальные данные.

Статья подготовлена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 08-08-00315).

1. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Т. 2. М.: Наука, 1967. 720 с.
2. Smith S.A., Fritts D.C., VanZandt T.E. Evidence of a saturation spectrum of atmospheric gravity waves // J. Atmos. Sci. 1987. V. 44, N 10. P. 1404–1410.
3. Gurvich A.S., Brekhovskikh V.L. Study of the turbulence and inner waves in the stratosphere based on the observations of stellar scintillations from space: a model of scintillation spectra // Waves Random Media. 2001. V. 11, N 3. P. 163–181.
4. Morkovin M.V. Effects of compressibility on turbulent flows // Mécanique de la Turbulence / Ed. by A.J. Favre. CNRS, 1962.

5. *Smits A.J., Dussauge J.-P.* Turbulent shear layers in supersonic flow. NY: AIP Press, 1996. 357 p.

6. *Афанасьев А.Л., Банах В.А., Ростов А.П.* Локализация турбулентных потоков по флуктуациям интенсив-

ности просвечивающего лазерного излучения // Оптика атмосф. и океана. 2008. Т. 21, № 7. С. 640–647.

7. *Исмаири А.* Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. Т. 2. М.: Мир, 1981. 317 с.

D.A. Marakasov. **Density fluctuations in gas flows with spatial inhomogeneity of mean internal energy.**

The turbulent fluctuations of gas density, developing in flows with spatial inhomogeneity of mean internal energy, are considered. Two-component model of density structure function with large-scale anisotropic component and small-scale isotropic one is proposed. In inertial subrange, both components obey power-law distance dependence. Experiments of laser beam propagation through hot air flow show the presence of anisotropic refraction index fluctuations within the flow. The peculiarities of intensity fluctuation spectra are in a good agreement with the density structure function of the model proposed.