

Г.Л. Дегтярев, А.В. Маханько, А.С. Чернявский

## ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ВОССТАНОВЛЕНИЯ И КОМПЕНСАЦИИ МОД ВОЛНОВОГО ФРОНТА

Предлагаются два итерационных метода восстановления и компенсации мод волнового фронта по изображению, которые инвариантны к источнику изображения. Приведены результаты численного моделирования, когда модами являются полиномы Цернике.

Рассматривается адаптивная оптическая система, в которой функция зрачка представлена конечным отрезком ряда по линейно-независимой системе функций

$$\Phi(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^n \zeta_k \Phi_k(\xi, \eta), \quad (1)$$

где  $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$  – неизвестный вектор мод. В качестве такой независимой системы функций могут быть использованы, например, функции отклика приводов для гибкого адаптивного зеркала и кусочно-линейные функции для сегментированного зеркала.

Предполагается, что адаптивная оптическая система осуществляет компенсацию мод, используя вектор управления  $\zeta'' = (\zeta''_1, \zeta''_2, \dots, \zeta''_n)$ :

$$\Phi(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^n (\zeta_k - \zeta''_k) \Phi_k(\xi, \eta). \quad (2)$$

Рассмотрим две различные постановки задачи восстановления и компенсации мод по изображению источника. В первой постановке предлагается аппаратное решение уравнения относительно вектора управления, которое для точечного источника имеет вид

$$H(f, z, \zeta - \zeta_u) = H(f, z, 0), \quad (3)$$

где  $H(f, z, \zeta)$  – оптическая передаточная функция на пространственной частоте  $f$  при заданной расфокусировке  $z$  и неизвестном векторе мод  $\zeta$ .

Если источник некогерентного излучения произвольный, то для его исключения требуется два измерения, соответствующие двум плоскостям  $z_1 = 0$  и  $z_2 = z$ . Тогда вместо уравнения (3) получаем

$$\frac{H(f, z, \zeta - \zeta_u)}{H(f, 0, \zeta - \zeta_u)} = \frac{H(f, z, 0)}{H(f, 0, 0)}. \quad (4)$$

Левая часть уравнений (3), (4) измеряется в процессе формирования оптической системы вектора невязки  $\zeta - \zeta_u$ . Решение предполагается искать итерационными методами, при которых  $\zeta_u \rightarrow \zeta$ .

Другая постановка задачи восстановления мод предполагает численное решение уравнения

$$H(f, z, \zeta) = H(f, z, \zeta^*) \quad (5)$$

относительно вектора мод  $\zeta$ , которое для произвольного источника примет вид

$$\frac{H(f; z, \zeta)}{H(f; 0, \zeta)} = \frac{H(f; z, \zeta^*)}{H(f; 0, \zeta^*)} \quad (6)$$

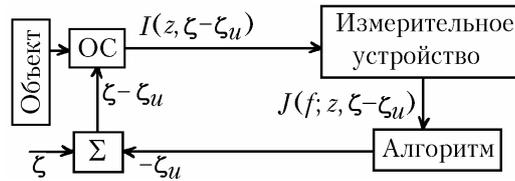
Решение этих уравнений также предполагается искать итеративными методами, но уже используя результаты только одного измерения при векторе мод, равном  $\zeta^*$ .

Рассмотрим подробнее решение уравнения (3) с использованием итерационной схемы по модифицированному методу Ньютона. Уравнение для такой схемы относительно невязки имеет вид

$$P(f; z, \zeta - \zeta_u) = H'(f; z, 0)(\zeta - \zeta_u), \quad (7)$$

где

$$P(f; z, \zeta - \zeta_u) = H(f; z, \zeta - \zeta_u) - H(f; z, 0).$$



Работа итерационной схемы показана на рисунке, где  $I(z, \zeta)$  – распределение интенсивности в плоскости, смещенной от фокальной на величину известной расфокусировки  $z$ ,  $J(f; z, \zeta)$  – Фурье-преобразование интенсивности на пространственной частоте  $f$ .

Порядок вычислений по схеме Ньютона для уравнения (7) следующий:

1. Задается нулевое приближение для вектора управления  $\zeta_u$ , которое всегда полагается равным нулю.
2. Измеряется функция  $H(f; z, \zeta)$ , которая формирует левую часть уравнения (7).
3. В соответствии с решением уравнения (7) алгоритм формирует управление  $\zeta_u$ , переводящее оптическую систему (ОС) в новое состояние, при котором  $\zeta_u \rightarrow \zeta$ .
4. Нулевое приближение полагается равным  $\zeta_u$ .
5. Переход на пункт 2 алгоритма до тех пор, пока управление  $\zeta_u$  не стабилизируется до необходимой точности.

В работе [1] даны результаты решения уравнений (3), (4) методом Ньютона для сегментного зеркала, когда в качестве независимой системы функций для (1) являются кусочно-линейные функции. В данной работе показаны осуществимость и сходимость метода Ньютона для уравнений (3), (4) в случае гибкого зеркала, что существенно расширяет применение такой постановки задачи.

Возьмем в качестве независимой системы функций полиномы Цернике, соответствующие расфокусировке, сферической абберации, общему наклону волнового фронта, коме и астигматизму, которые в полярных координатах имеют вид

$$\begin{aligned} \Phi_1(\rho) &= 2\rho^2 - 1, \quad \Phi_2(\rho) = 6\rho^4 - 6\rho^2 + 1, \quad \Phi_3(\rho, \theta) = \rho \cos(\theta), \quad \Phi_4(\rho, \theta) = \rho \sin(\theta), \\ \Phi_5(\rho, \theta) &= (3\rho^3 - 2\rho) \cos(\theta), \quad \Phi_6(\rho, \theta) = (3\rho^3 - 2\rho) \sin(\theta), \quad \Phi_7(\rho, \theta) = \rho^2 \cos(2\theta), \\ \Phi_8(\rho, \theta) &= \rho^2 \sin(2\theta). \end{aligned} \quad (8)$$

Рассмотрим функцию  $H(f; z, \zeta)$  на конечном числе частот  $f_k = (r, \psi_k)$ , ( $k=1, \dots, n$ ), в полярных координатах и введем вектор частот  $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$ . Тогда вместо уравнения (7) можно рассматривать систему уравнений

$$P(r, \psi_k; z, \zeta - \zeta_u) = H'(r, \psi_k; z, 0)(\zeta - \zeta_u). \quad (7a)$$

Оптическая передаточная функция с точностью до постоянного множителя на частотах  $f = (\xi, \eta)$  имеет вид [2]

$$H(f; z, \zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(\xi + \xi', \eta + \eta') G_0(\xi + \xi', \eta + \eta') G^*(\xi', \eta') G_0^*(\xi', \eta') d\xi' d\eta', \quad (9)$$

где  $G_0(\xi, \eta) = \exp(-iz(\xi^2 + \eta^2/2))$  – функция зрачка, содержащая aberrации, соответствующие заданной расфокусировке  $z$ ;  $G(\xi, \eta) = \exp(-i2\pi\Phi(\xi, \eta))$  – функция зрачка с неизвестной функцией aberrаций (1) ( $i$  – мнимая единица).

Итерационная схема для системы уравнений (7а) осуществима, если выбором частот  $f_k = (r, \psi_k)$  образовать из вектора производных  $H'(r, \psi; z, 0)$  неособенную матрицу. Используя (9), получено выражение для вектора производных в полярных координатах:

$$H'(r, \psi; z, 0) = \sum_{j=1,2} \varphi_j(r) \zeta_j + i \sum_{j=3,5} \varphi_j(r) \zeta_j \cos(\psi) + i \sum_{j=3,5} \varphi_j(r) \zeta_{j+1} \sin(\psi) + \varphi_7(r) \zeta_7 \cos(2\psi) + \varphi_7(r) \zeta_8 \sin(2\psi), \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_1(r) &= 16\pi^2(r/b) [J_0(b) - 2J_1(b)/b]; \quad \varphi_2(r) = 48\pi^2(r/b) [J_0(b) - 6J_1(b)/b + 16J_2(b)/b^2]; \\ \varphi_3(r) &= 4\pi^2 r J_1(b)/b; \\ \varphi_5(r) &= 4\pi^2 r [4J_1(b)/b - 12J_2(b)/b^2 - J_3(b)/b]; \quad \varphi_7(r) = -8\pi^2 r b J_2(b)/b^2. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь  $J_s(b)$  – функция Бесселя порядка  $s$ , а параметр  $b = rz$ . Примем  $\psi_k = (2/3)\pi k$  и получим следующие величины:

$$\begin{aligned} M_0 &= \sum_{k=0}^2 P(r, \psi_k; z, \zeta - \zeta_u), \quad M_1 = \sum_{k=0}^2 P(r, \psi_k; z, \zeta - \zeta_u) \exp(i\psi_k), \\ M_2 &= \sum_{k=0}^2 P(r, \psi_k; z, \zeta - \zeta_u) \exp(i 2\psi_k). \end{aligned} \quad (12)$$

Тогда уравнения относительно невязок имеют вид

$$\begin{aligned} \text{Re}(M)/3 &= \sum_{j=1,2} \varphi_j(r) \zeta_j; \\ \text{Im}(M_1 + M_2)/3 &= \sum_{j=3,5} \varphi_j(r) \zeta_j, \quad \text{Re}(M_1 - M_2)/3 = \sum_{j=3,5} \varphi_j(r) \zeta_{j+1}; \\ \text{Re}(M_1 + M_2)/3 &= \varphi_7(r) \zeta_7, \quad \text{Im}(M_1 - M_2)/3 = \varphi_7(r) \zeta_8 \end{aligned} \quad (13)$$

и система уравнений (7а) разбивается на три системы второго порядка и два уравнения с помощью шести измерений функции  $P(r, \psi_k; z, \zeta - \zeta_u)$  при  $f_k = (r_1, \psi_k), f_k = (r_2, \psi_k), k = 0, 1, 2$ .

Таблица 1

Номер	1	2	3	4	5	6
$\zeta_1 - Z_1^u$	0,1500	0,2000	0,1705	0,1205	0,0705	0,0216
$\zeta_2 - Z_2^u$	0,0500	0,0000	-0,0500	-0,0539	-0,0117	-0,0218
$\zeta_3 - Z_3^u$	0,1375	0,0964	0,0464	0,0194	0,0078	0,0042
$\zeta_4 - Z_4^u$	0,0500	0,0187	0,0048	-0,0004	0,0006	-0,0001
$\zeta_5 - Z_5^u$	0,0500	0,0021	0,0142	0,0148	0,0108	0,0060
$\zeta_6 - Z_6^u$	0,0500	0,0173	0,0081	0,0057	0,0021	0,0015
$\zeta_7 - Z_7^u$	0,0500	0,0000	-0,0234	-0,0124	-0,0089	-0,0030
$\zeta_8 - Z_8^u$	0,0500	0,0000	-0,0225	-0,0121	-0,0089	-0,0025
$ \zeta - \zeta_u $	0,2375	0,2235	0,1873	0,1355	0,0738	0,0319

Решение системы (13) проводилось на относительных частотах  $r_1 = 0,05$  и  $r_2 = 0,1$ , величина которых имеет смысл относительного смещения в плоскости зрачка на вектор

$f = -(r_1 \cos \psi_k, r_2 \sin \psi_k)$  в формуле для оптической передаточной функции (9). Первоначальные значения координат вектора мод в (1) соответствуют большим aberrациям. При  $\zeta_k = 0,1$  aberrации достигают на краях круглого зрачка величины  $0,8\lambda$  ( $\lambda$  – длина волны). В табл. 1 показаны значения вектора невязки  $\zeta - \zeta''$  на первых шести итерациях при введении ограничения на модуль величины управления  $|\zeta''| = 0,05$ . Такое ограничение является естественным для системы управления и, кроме того, исключает забросы на первой итерации. Кроме невязок в таблице показан обобщенный результат – норма вектора невязок на каждой итерации.

Т а б л и ц а 2

Номер	1	2	3	4	5	6
$\zeta_1 - z_1''$	0,1500	0,2000	0,1500	0,1000	0,0500	0,0168
$\zeta_2 - z_2''$	0,0500	0,0000	-0,0500	-0,0074	0,0069	-0,0095
$\zeta_3 - z_3''$	0,1335	0,0987	0,0487	0,0173	0,0078	0,0056
$\zeta_4 - z_4''$	0,0500	0,0203	-0,0039	0,0012	-0,0055	0,0015
$\zeta_5 - z_5''$	0,0500	0,0000	0,0155	0,0171	0,0107	0,0036
$\zeta_6 - z_6''$	0,0500	0,0118	0,0083	0,0015	0,0067	-0,001
$\zeta_7 - z_7''$	0,0500	0,0000	-0,0051	-0,0207	-0,0290	-0,0349
$\zeta_8 - z_8''$	0,0500	0,0000	-0,0315	-0,0186	-0,0068	0,0092
$ \zeta - \zeta'' $	0,2352	0,2224	0,1694	0,1069	0,0607	0,0415

В табл. 2 показан результат работы алгоритма при введении ошибки измерения, равной 3% от максимальной величины измерения. Из таблицы видно, что алгоритм уже на шестом шаге имеет хорошую сходимость.

1. Дегтярев Г.Л., Маханько А.В., Чернявский А.С. // Оптика атмосферы и океана. 1995. Т. 8. N 3. С. 388–392.
2. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1970. 527 с.

Казанский государственный технический университет  
им. А.Н. Туполева

Поступила в редакцию  
7 июля 1995 г.

G. L. Degtyarev, A. V. Makhan'ko, A. S. Chernyavskii. **Iteration Techniques for Restoration and Compensation of Wave Front Modes.**

Two iteration techniques are proposed for restoration and compensation of wave front modes, which are image source invariant, using the image. The results of numerical simulation for the case, when the Zernike polynomials are the modes, are presented.