

А.В. Лячин, Б.Н. Пойзнер

Моделирование преобразования лазерного пучка в кольцевом интерферометре: фрактальная геометрия хаотического аттрактора в плане обработки информации

Томский государственный университет

Поступила в редакцию 6.01.2004 г.

Исследуется пространственный детерминированный хаос в модели процессов в нелинейном кольцевом интерферометре, функционирующем в статическом режиме. Используется аппарат дискретных отображений применительно к случаям одно- и двухчастотного излучения. Количественной характеристикой пространственного детерминированного хаоса служит фрактальная размерность D_0 . Построены серии карт размерности аттракторов в моделях на основе дискретного отображения для различных условий.

В последние годы интенсивно ведется поиск принципов и элементной базы нелинейно-оптических средств обработки информации. В частности, обсуждаются возможности защиты информации с помощью режимов динамического и пространственно-детерминированного хаоса [1, 2]. Так, разработка устройств скрытой передачи информации в радиодиапазоне предполагает режим хаотических колебаний в шифраторе [3]. Как правило, хаотическим колебаниям (режимам) соответствуют *странные* (т.е. с дробной размерностью) аттракторы.

При решении задачи защиты и обработки информации в оптическом диапазоне волн одним из возможных прототипов шифратора является нелинейный кольцевой интерферометр (НКИ) [2, 4]. НКИ представляет собой кольцевую открытую динамическую систему, через которую проходит оптическое излучение. В контуре обратной связи НКИ возможны различные крупномасштабные преобразования оптического поля (фокусировка лазерного пучка, сдвиг и/или поворот в поперечной плоскости пучка). Поэтому НКИ способен генерировать в поперечном сечении светового пучка регулярные либо хаотические пространственно-временные структуры. Но до сих пор не проводились исследования процессов в модели НКИ с точки зрения оценки размерности ее аттрактора в контексте анализа режимов, бифуркаций, пригодности НКИ для решения задач обработки информации.

Схема интерферометра и математическая модель процессов в нем

Оптическая схема НКИ изображена на рис. 1, где $E_{вх}$ и $E_{вых}$ — поля на входе и выходе НКИ; НС — нелинейная среда (например, жидкий кристалл) протяженностью L ; G — элемент крупномасштабно-

го преобразования светового поля (растяжения, сдвига, поворота поля); M_1, M_2, M_3, M_4 — зеркала (M_1 и M_2 — полупрозрачные, с коэффициентом отражения по интенсивности R). Для M_3 и M_4 коэффициент отражения равен 1.

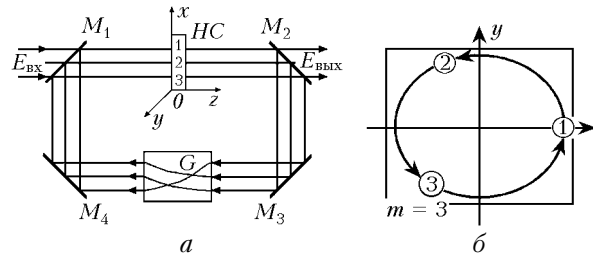


Рис. 1. Ход лучей в НКИ при повороте светового поля на $\Delta = 120^\circ$ в плоскости xOy : а — траектории лучей 1, 2, 3, замыкающиеся после трех обходов; б — проекция траекторий лучей 1, 2, 3 на плоскость xOy

Пусть на вход НКИ поступает сумма двух квазимонохроматических полей с амплитудами $a(\mathbf{r}, t)$, $b(\mathbf{r}, t)$ и с частотами $\omega \pm \Omega$ круговой поляризации различных (при $\omega > \Omega$) либо одинаковых (при $\omega < \Omega$) направлений вращения:

$$E_x(\mathbf{r}, t) = a(\mathbf{r}, t) \cos [(\omega + \Omega)t + \varphi(\mathbf{r}, t) + \psi(\mathbf{r}, t)] + b(\mathbf{r}, t) \cos [(\omega - \Omega)t + \varphi(\mathbf{r}, t) - \psi(\mathbf{r}, t)],$$

$$E_y(\mathbf{r}, t) = a(\mathbf{r}, t) \sin [(\omega + \Omega)t + \varphi(\mathbf{r}, t) + \psi(\mathbf{r}, t)] - b(\mathbf{r}, t) \sin [(\omega - \Omega)t + \varphi(\mathbf{r}, t) - \psi(\mathbf{r}, t)],$$

где ω (либо Ω — при $\omega < \Omega$) имеет смысл средней частоты, а 2Ω (2ω — при $\omega < \Omega$) — частотный интервал между составляющими поля. Чтобы отразить специфику рассматриваемого оптического поля, мы оперируем параметром бихроматичности $q \equiv \Omega/\omega$ [5].

В пренебрежении диффузией молекул НС из модели, предложенной в [5], можно получить

описание динамики нелинейного фазового набегга U в НС НКИ в точечном приближении. Термин «точечное приближение» означает, что все множество точек поперечного сечения лазерного пучка в НКИ — в зависимости от вида крупномасштабного преобразования поля элементом G в контуре обратной связи — разбивается на бесконечное число независимых (в смысле отсутствия физического взаимодействия между полями, нелинейными фазовыми набеггами) друг от друга подмножеств. Но эти подмножества представляют собой цепочки точек, в которых последовательно осуществляется взаимодействие между световыми полями и нелинейными фазовыми набеггами (рис. 1, б).

Иными словами, луч света, проходя через НС и контур обратной связи НКИ в точке i (например, на рис. 1, б $i = 1, 2, 3$), приобретает фазовый набег U_i и испытывает временную задержку t_{ei} . Из-за наличия элемента G луч попадает в точку $i+1$. Здесь, «складываясь» с одним из входных лучей интерферометра, он, согласно модели [5], воздействует на темп изменения величины нелинейного фазового набегга U_{i+1} . Отметим, что в силу замыкания лучей на рис. 1 значение индекса $i+1 = 4$ следует положить равным $i+1 = 1$. Именно так набег U_i в точке i влияет на набег U_{i+1} в точке $i+1$. В итоге траектория луча замыкается после m обходов НКИ. Согласно принятому способу нумерации под запись $[(i+1) \bmod m] + 1$, где символ $(i+1) \bmod m$ означает остаток от деления $i+1$ на m . Физически это означает, что луч из m -й точки попадает в первую.

Таким образом, в точечном приближении из общих соотношений в [5] получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ):

$$\begin{aligned} \tau_{ni} dU_i(t)/dt &= -U_i(t) + f_i, \\ f_i \equiv f_i(t) &= Kab_{i,i}(t) + pKab_{i-1,i}(t - \tau) + [\gamma_{i-1}(t)/\sigma] \times \\ &\times \{Ka_{i,i-1}(t, t - \tau) \cos[(1+q)\omega t + \varphi_i(t) - \varphi_{i-1}(t - \tau) + \\ &+ \psi_i(t) - \psi_{i-1}(t - \tau)] + Kb_{i,i-1}(t, t - \tau) \times \\ &\times \cos[(1-q)\omega t + \varphi_i(t) - \varphi_{i-1}(t - \tau) - \\ &- \psi_i(t) + \psi_{i-1}(t - \tau)]\}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\tau \equiv \tau_{i-1}(t) = t_{e\ i-1}(t) + U_{i-1}(t - t_{e\ i-1}(t))/\omega$; $\gamma_{i-1}(t)$ — удвоенный коэффициент потерь излучения за один проход через НКИ; $p = 0$ в случае приближения больших потерь, но $p = [\gamma_{i-1}(t)/\sigma/2]^2$ в приближении одного прохода; «смешанный» (Kab) и «парциальные» (Ka, Kb) параметры нелинейности:

$$\begin{aligned} Kab_{i,j}(t) &\equiv (1-R) n_{2j} l k [a_i^2(t) + b_i^2(t)], \\ Ka_{i,i-1}(t, t - \tau) &\equiv (1-R) n_{2i} l k a_i(t) a_{i-1}(t - \tau), \\ Kb_{i,i-1}(t, t - \tau) &\equiv (1-R) n_{2i} l k b_i(t) b_{i-1}(t - \tau), \\ k &= \omega/c, \end{aligned}$$

где l — длина нелинейной среды; n — показатель преломления; σ — коэффициент расширения (сжатия) светового пучка.

В статическом режиме работы НКИ, т.е. при отсутствии изменений во времени фазового набегга ($dU/dt = 0$), модель (1) сводится к рекуррентному соотношению. Будем считать, что статический режим осуществляется при постоянстве величин $a_i, b_i, \varphi_i, \psi_i, \gamma_i, t_{ei}$ во времени. Тогда из (1) имеем

$$\begin{aligned} U_i &= Kab_{i,i} + pKab_{i-1,i} + [\gamma_{i-1}/\sigma] \times \\ &\times \{Ka_{i,i-1} \cos[(1+q)(\Phi_{i-1} + U_{i-1}) + \varphi_i - \varphi_{i-1} + \psi_i - \psi_{i-1}] + \\ &+ Kb_{i,i-1} \cos[(1-q)(\Phi_{i-1} + U_{i-1}) + \varphi_i - \varphi_{i-1} - \psi_i + \psi_{i-1}]\}, \end{aligned}$$

где фазовая задержка в контуре обратной связи

$$\begin{aligned} \Phi_i &\equiv \omega t_{ei}, \quad Kab_{i,j} \equiv (1-R) n_{2j} l k [a_i^2 + b_i^2], \quad Ka_{i,i-1} \equiv \\ &\equiv (1-R) n_{2i} l k a_i a_{i-1}, \quad Kb_{i,i-1} \equiv (1-R) n_{2i} l k b_i b_{i-1}. \end{aligned}$$

Предыдущее выражение согласно [6, с. 15–20] есть одномерное дискретное отображение (ДО).

В случае однородности оптических свойств нелинейной среды НКИ ($n_2 = n_{2i}$) и амплитуд входного поля ($a = a_i, b = b_i$) выполняется соотношение $Kab = Ka + Kb$. Удобно ввести суммарный параметр нелинейности K и долю Q_a мощности компоненты с частотой $(1+q)\omega$ по правилу: $K \equiv Kab = (Ka + Kb)$, $Q_a \equiv Ka/K$, тогда $Ka = K Q_a$, $Kb = K(1 - Q_a)$. В случае однородности остальных оптических свойств НКИ ($\Phi = \Phi_i, \gamma = \gamma_i$) и входного поля ($\psi_i = 0, \varphi_i = 0$) нетрудно получить ДО для случая двухчастотного излучения:

$$\begin{aligned} U_{i+1} &= K \{1 + p + \gamma \{Q_a \cos[(1+q)(\Phi + U_i)] + \\ &+ (1 - Q_a) \cos[(1-q)(\Phi + U_i)]\} / \sigma\}, \end{aligned} \quad (2)$$

где значение $p = 0$ соответствует приближению больших потерь, $p = (\gamma/\sigma/2)^2$ — приближению одного прохода.

В случае одночастотного излучения на входе НКИ ($q = 0$) и при $p = 0, \sigma = 1$ из (2) получим

$$U_{i+1} = K [1 + \gamma \cos(U_i + \Phi)]. \quad (3)$$

Рассмотрим особенности функционирования НКИ в статическом режиме. Интерес к нему обусловлен тем, что ранее была продемонстрирована возможность шифрации и, соответственно, дешифрации двумерного изображения в статическом режиме НКИ [4]. Данный режим предпочтителен, когда лимитирующим фактором оказывается пропускная способность оптического канала связи либо когда требуется хранение информации в зашифрованном виде. При этом степень скрытности передачи сообщения зависит от характеристик статического режима, в свою очередь определяемого комбинацией параметров светового поля, НС и интерферометра.

Указанные возможности связаны с тем, что из-за нелинейности системы статический режим способен обеспечить хаотизацию пространственных распределений амплитуды, фазы оптического поля и показателя преломления НС в поперечной плоскости xOy . Подобное явление, обнаруженное при

моделировании процессов в НКИ, названо *пространственным детерминированным хаосом* (ПДХ) [4]. Он представляет собой статическое детерминированное, но неупорядоченное распределение в пространстве амплитуды, фазы, показателя преломления НС.

Как известно, эффективным способом исследования свойств динамических систем служит построение распределений некоторой характеристики сложной динамики на плоскости параметров, т.е. так называемых карт [6]. Одной из показательных характеристик статического режима в модели НКИ является дробная (фрактальная) размерность аттрактора, соответствующего явлению ПДХ.

Карты фрактальной размерности аттрактора в модели на основе дискретного отображения

Построение карт размерности аттрактора в математической модели способно помочь решению задачи оптимизации параметров и(или) режимов, обеспечивающих наибольшую степень скрытности передачи сообщения, замаскированного ПДХ.

Для построения карт рассчитаны размерности D аттрактора в модели (3), в частности размерность Хаусдорфа–Безиковича:

$$D_0 = -\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln M(r)}{\ln r},$$

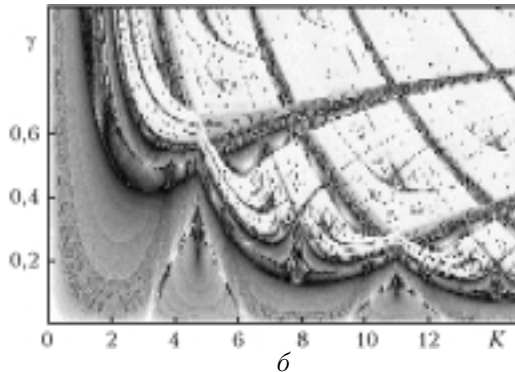
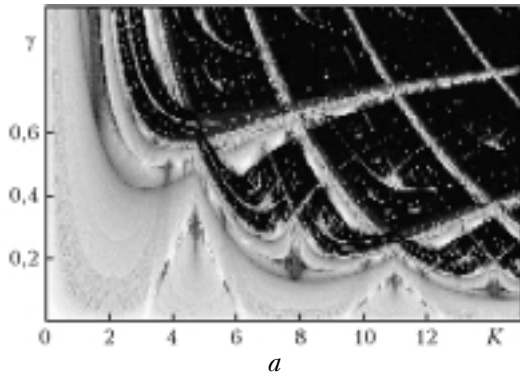


Рис. 2. Карты фрактальной размерности $D_0(K, \gamma)$ аттрактора в модели (3)

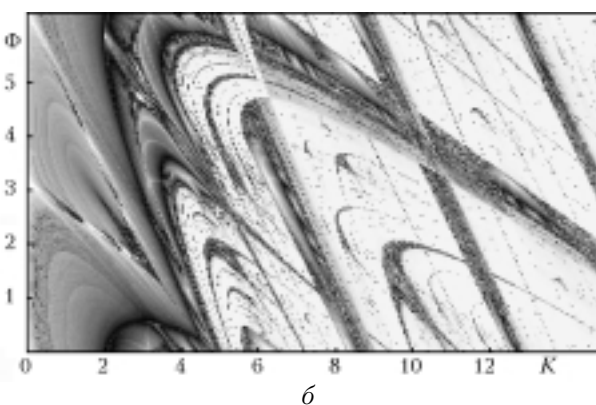
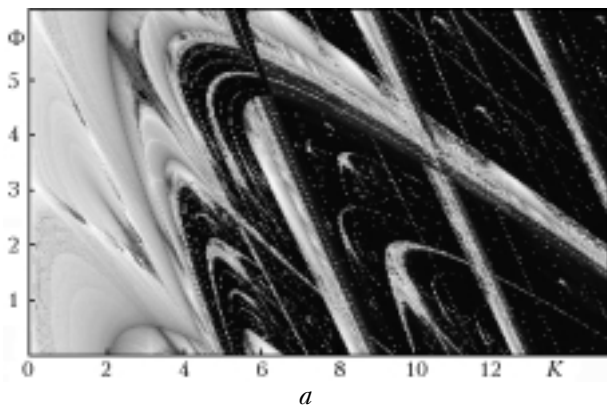


Рис. 3. Карты фрактальной размерности $D_0(K, \Phi)$ аттрактора в модели (3)

где r – размер кубика; $M(r)$ – число кубиков, необходимых для того, чтобы построить покрытие аттрактора в фазовом пространстве [6].

На рис. 2–4 показаны карты размерности $D_0(K, \gamma)$, $D_0(K, \Phi)$, $D_0(\gamma, \Phi)$ соответственно для начального условия $U_1 = K$. Темные участки на картах отвечают максимуму значения: $D_0(a)$, модуля отклонения D_0 от ближайшего целого, т.е. 0 или 1 (б). Процедура верификации алгоритмов построения этих карт для случая монохроматического излучения, т.е. модели (3), описана в [7].

В качестве дополнительного верификационного сюжета может служить совпадение структур карт дробной размерности (рис. 2, а и 3, а) и карт ляпуновского характеристического показателя (ЛХП) для того же дискретного отображения, построенных в тех же координатах в [8] на рис. 4, а и б.

Такое совпадение структур имеет наряду с верификационным и содержательный смысл. Он заключается в том, что для рассматриваемого дискретного отображения (3), моделирующего процессы в НКИ, как выяснилось, выполняется фундаментальная гипотеза Каплана–Йорке. Согласно гипотезе возможно определить величину фрактальной размерности D_0 по спектру значений ЛХП. Гипотеза доказана строго только для хаотических аттракторов двумерных обратимых отображений [6, С. 190]. Но отображение (3) является одномерным, поэтому справедливость для него гипотезы Каплана–Йорке *a priori* неочевидна.

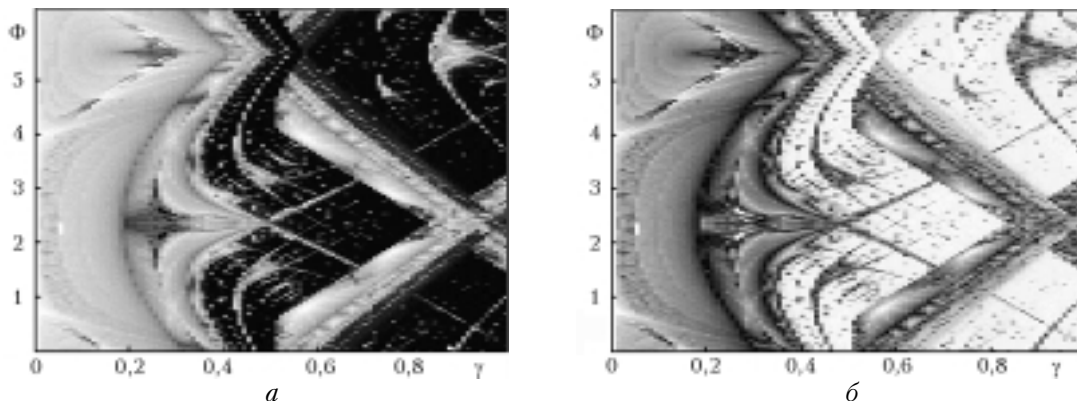


Рис. 4. Карты фрактальной размерности $D_0(\gamma, \Phi)$ аттрактора в модели (3)

Для проверки корректности построения карт размерности D_0 аттрактора в модели (2) был выбран предельный случай равенства нулю расстройки компонентов спектра, т.е. $q = 0$. Построенная карта (рис. 5) имеет ту же структуру, что и карта, соответствующая монохроматическому излучению [модель (3)], приведенная на рис. 2.

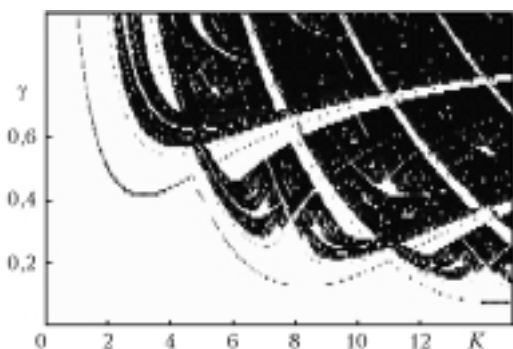


Рис. 5. Карта размерности D_0 аттрактора в модели (2) в предельном случае, когда расстройка частот в спектре отсутствует, т.е. $q = 0$

Рис. 6 и 7 демонстрируют степень влияния расстройки частот q компонентов спектра и доли мощности Q_a высокочастотного компонента на структуру карт фрактальной размерности D_0 . При достаточно малой расстройке частот компонентов спектра $q = 0,01$ (рис. 6) форма карты D_0 для двухчастотного излучения становится неотличимой от случая $q = 0$ (см. рис. 5), который равноценен одночастотному излучению.

Судя по тенденции, выражаемой рис. 6, заметное изменение структуры карты D_0 происходит, начиная с величины расстройки частот $q = 0,05$.

Интерпретируя результаты расчетов в случае заданной расстройки частот ($q = 0,1$), следует обратить внимание, что рис. 7,б соответствует равенству (по мощности) вкладов компонентов спектра в нелинейные эффекты. Неравенство этих вкладов влечет заметную трансформацию строения карты фрактальной размерности (рис. 7,а и в), приближая их вид к случаю одночастотного спектра (см. рис. 5). Тем не менее влияние вклада низкочастотного и высокочастотного компонентов спектра на структуру карт D_0 несимметрично. Физически это можно объ-

яснить тем, что значение нелинейного фазового набега U по-разному зависит от частоты излучения, как это видно из (1). В свою очередь, это отличие проявляется в характере нелинейной динамики.

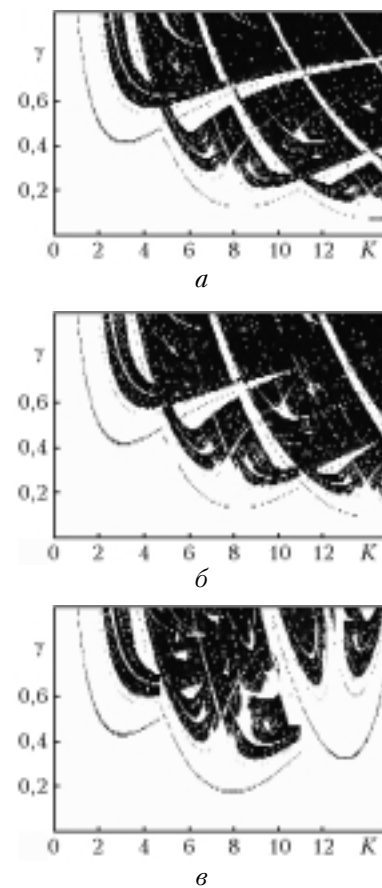


Рис. 6. Зависимость структуры карты размерности D_0 от расстройки частот q в спектре излучения: а — $q = 0,01$; б — $0,05$; в — $0,1$. Мощности компонентов спектра равны: $Q_a = 0,5$

Сопоставление строения карт D_0 (см. рис. 6, 7) и карт ЛХП [8, рис. 10] свидетельствует о некотором их сходстве. Это стимулирует проведение отдельного исследования, направленного на проверку применимости гипотезы Каплана—Йорке в случае дискретного отображения (2), соответствующего двухчастотному случаю.

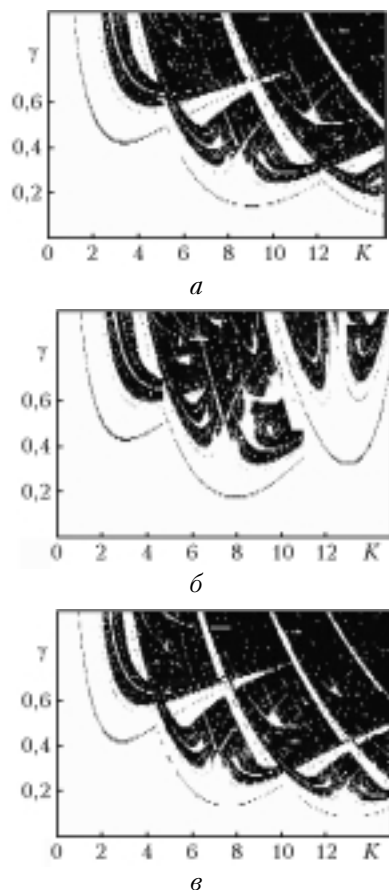


Рис. 7. Зависимость структуры карты размерности D_0 от доли Q_a мощности высокочастотного компонента в спектре излучения: $a - Q_a = 0,1$; $б - 0,5$; $в - 0,9$. Расстройка частот $q = 0,1$

В случае одночастотного излучения [модель (3)] опыт совместного построения и исследования карт фрактальной размерности и линий бифуркаций свидетельствует о продуктивности интерпретации структур карт и линий [7]. Поэтому правомерно ожидать, что и для бихроматического излучения интерпретацию карт можно осуществить, опираясь на построение линий бифуркаций для модели (2). Но последняя задача имеет самостоятельное значение и выходит за рамки данной статьи.

Выводы

Рассмотрены модели процессов в НКИ в приближении больших потерь, использующие аппарат

A.V. Lyachin, B.N. Poizner. Simulation of laser beam transformation in a ring interferometer: fractal geometry of a chaotic attractor in the problem of information processing.

The spatially determined chaos in the model of the processes in a nonlinear ring interferometer is studied. The interferometer operates in the static mode. Discrete mapping is used in the case of single- and two-frequency optical radiation. The fractal dimension D_0 serves a quantitative characteristic of spatially determined chaos. The families of fractal dimensions maps of an attractor in the models based on discrete mapping under various conditions are constructed.

ДО, применительно к случаям одно- и двухчастотного излучения на входе. Для определения областей параметров, соответствующих странным либо простым аттракторам в моделях, предложено строить в форме карт и анализировать зависимости дробной размерности от параметров НКИ.

В виде количественной характеристики явления ПДХ, реализующегося в статическом режиме НКИ, выбрана размерность Хаусдорфа–Безиковича D_0 . Построены серии карт D_0 на плоскостях: параметр нелинейности K – удвоенный коэффициент потерь излучения γ ; параметр нелинейности – фазовая задержка в контуре обратной связи Φ ; $\gamma - \Phi$. Показана зависимость строения карт D_0 от расстройки частот бихроматического излучения q и от доли Q_a мощности высокочастотного компонента в его спектре (см. рис. 6, 7). Поставлена задача построения линий бифуркаций для двухчастотного случая как основы интерпретации структуры соответствующих карт D_0 .

Авторы благодарны В.А. Погодаеву за полезные замечания по тексту статьи.

1. *Дмитриев А.С.* Динамический хаос как носитель информации // Новое в синергетике: Взгляд в третье тысячелетие. М.: Наука, 2002. С. 82–122.
2. *Garcia-Ojalvo J., Roy R.* Spatiotemporal Communication with Synchronized Optical Chaos // <http://xxx.lanl.gov/abs/nlin.CD/0011012>. 2000. 6 Nov. 4 p.
3. *Владимиров С.Н., Негруль В.В.* Сравнительный анализ некоторых систем хаотической синхронной связи // Изв. вузов. Прикл. нелинейн. динам. 2000. Т. 8. № 6. С. 53–64.
4. *Измайлов И.В., Пойзнер Б.Н.* Варианты реализации нелинейно-оптического устройства скрытой передачи информации // Оптика атмосф. и океана. 2001. Т. 14. № 11. С. 1074–1086.
5. *Измайлов И.В., Магазинников А.Л., Пойзнер Б.Н.* Моделирование процессов в кольцевом интерферометре с нелинейностью, запаздыванием и диффузией при монохроматическом излучении // Изв. вузов. Физ. 2000. № 2. С. 29–35.
6. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос (курс лекций). М.: Изд-во физ.-мат. лит., 2001. 296 с.
7. *Измайлов И.В., Лячин А.В., Пойзнер Б.Н.* Описание процессов в кольцевом интерферометре дискретным отображением: бифуркации и размерности аттрактора // Вестн. Том. гос. ун-та. Сер. физ. 2003. № 78. С. 111–115.
8. *Измайлов И.В., Пойзнер Б.Н., Шергин Д.А.* Процессы в кольцевом интерферометре: проблема описания с помощью дискретных отображений // Оптика атмосф. и океана. 2004. Т. 17. № 2–3. С. 127–132.