

УДК 53.01+53.088.23

## Влияние инерционности частиц аэрозоля на формирование многопоточности при движении в турбулентном потоке

Е.З. Грибова, С.Е. Лосев\*

*Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского  
603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23*

Поступила в редакцию 12.10.2018 г.

Методами численного моделирования исследуется влияние инерционности частиц промышленного аэрозоля на формирование многопоточности их движения в турбулентной атмосфере. Анализ проведен при значениях коэффициентов диффузии, соответствующих реальным атмосферным условиям. Результаты исследования могут оказаться полезны при интерпретации данных оптического зондирования аэрозоля.

*Ключевые слова:* турбулентная диффузия, аэрозоль, лагранжева и эйлерова статистики, якобиан, многопоточность; turbulent diffusion, aerosol, Lagrange and Euler statistics, jacobian, multistream.

### Введение

Для разработки систем мониторинга естественного и антропогенного загрязнения воздуха [1, 2], для решения обратных задач оптики аэрозоля в атмосфере [3], для анализа изменений климата полезно заранее знать статистические характеристики поведения примесей в атмосфере. Данной теме посвящено большое число работ. В частности, в [4, 5] показано, что малоинерционная пассивная примесь способна кластеризоваться в турбулентных потоках. В то же время из-за инерционности частиц примеси при движении в случайном поле скоростей формируется собственное поле скоростей примеси [6], которое по свойствам отличается от поля скоростей среды. При этом именно поле скоростей самой примеси определяет диффузию частиц. Несмотря на этот уже давно известный факт, достаточно немногочисленны работы, в которых учитывалась бы инерционность примеси, движущейся в реальных условиях. Так, в [7–9] исследовалось влияние инерционности примеси на ее перенос окружающей средой, однако не принималась во внимание возможность турбулентной диффузии — рассматривалось движение в среднем равномерном потоке.

Целью данной работы является исследование возможности возникновения многопоточности движения инертной пассивной примеси в турбулентном потоке. Результаты этого исследования могут быть полезны при интерпретации данных оптического зондирования атмосферы и решении обратных задач оптики аэрозоля в реальной атмосфере.

Заметим, что для теоретического описания движения примеси часто удобнее использовать лагранжевы координаты (движущиеся вместе с примесью), в то время как экспериментаторы обычно интересуются загрязнением фиксированных областей пространства, т.е. имеют дело с эйлеровыми координатами. Связь между эйлеровыми и лагранжевыми координатами как раз и дает важную информацию о характере движения аэрозоля: она позволяет предсказать возникновение многопоточности, когда в одну точку пространства попадают частицы с различными лагранжевыми координатами, что приводит к неоднозначности связи координат. Здесь мы исследуем статистические свойства якобиана преобразования координат частиц дымового аэрозоля с учетом реальных атмосферных условий.

### Математическая модель

Для простоты расчетов рассмотрим одномерную задачу, примером которой может служить движение частиц в узком канале (в вертикальной колонке пожара), когда примесь движется преимущественно вдоль канала и поперечной диффузией можно пренебречь. Как показано в [10], в одномерном случае уравнения в лагранжевом представлении становятся линейными, что существенно упрощает задачу.

Считаем, что со стороны окружающей среды на частицу аэрозоля действует сила сопротивления, пропорциональная относительной скорости. Пусть  $k$  — коэффициент вязкого трения в расчете на единицу массы частицы (коэффициент эффективной вязкости). В лагранжевом представлении движение частицы описывается системой уравнений

\* Евгения Зиновьевна Грибова (grievgeniya@yandex.ru); Сергей Евгеньевич Лосев (briangrifin@gmail.com).

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = V, \\ \frac{dV}{dt} = k[V'(X(t), t) - V], \end{cases} \quad (1)$$

где  $X$  и  $V$  – соответственно лагранжевы координата и скорость частицы;  $V'(X(t), t)$  – скорость движения среды, а начальные условия имеют вид

$$X(t=0) = y, \quad V(t=0) = v_0.$$

Для оценки вероятности возникновения многопоточности движения необходимо исследовать статистику якобиана преобразования лагранжевой координаты  $X(t)$  в эйлерову  $y(t)$ :

$$\frac{dX}{dy} = J(y, t).$$

Положительность  $J(y, t)$  означает, что между лагранжевой и эйлеровой координатами имеется взаимно-однозначное соответствие, т.е. движение однопоточково. Если же функция  $J(y, t)$  знакопеременна, то это означает, что движение стало многопоточковым [11].

В [12] при условии, что случайное поле скоростей среды  $V'(X(t), t)$  является гауссовым дельта-коррелированным с нулевым средним, для совместной плотности вероятностей  $\omega(j, u; t)$  поля  $J(y, t)$  и вспомогательного поля

$$U = \frac{dV}{dy}$$

выведено уравнение Фоккера–Планка

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial j} - k \frac{\partial}{\partial u} (u \omega) = \frac{k^2 D_{uu}}{2} j^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} \quad (2)$$

с начальным условием

$$\omega(j, u; t=0) = \langle \delta(u) \delta(j-1) \rangle, \quad (3)$$

где  $\delta(z)$  – дельта-функция; угловые скобки означают усреднение по ансамблю реализаций. В (2) входит коэффициент диффузии

$$D_{uu} = \int_{-\infty}^0 \langle U'(X(t'), t') U'(X(t), t) \rangle dt',$$

где

$$U'(X(t), t) = \frac{dV'}{dx}.$$

Поскольку аналитическое решение задачи (2), (3) неизвестно, необходимо численное решение. Заметим, что попытка численного решения была предпринята в [12], однако ограниченные возможности памяти вычислительной техники не позволили обеспечить нужную точность вычислений. Здесь мы представляем уточненные результаты, а также впервые анализируем вероятность формирования многопоточности движения аэрозоля в условиях реальной атмосферы.

Для численного решения прежде всего перейдем к безразмерным переменным. Несмотря на то что в задаче есть два параметра размерности времени,  $1/k$  и  $1/D_{uu}$ , использование любого из них для введения безразмерного времени не позволяет в дальнейшем проследить эволюцию плотности вероятностей якобиана в зависимости от инерционности частиц и коэффициента диффузии, поскольку исключает соответствующий параметр (эффективный коэффициент вязкости или коэффициент диффузии) из уравнения. Поэтому введем безразмерные переменные

$$\tau = t/t_0, \quad v = ut_0$$

так, что  $t_0$  – величина размерности времени, не зависящая от параметров задачи  $k$  и  $D_{uu}$ . Тогда для безразмерной плотности вероятностей

$$f(j, v; \tau) = t_0 \omega(j, u; t)$$

получим уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} + v \frac{\partial f}{\partial j} - k t_0 \frac{\partial (vf)}{\partial v} = \frac{k^2 D_{uu}}{2} t_0^3 j^2 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}. \quad (4)$$

Уравнение (4) решалось численно методом Кранка–Николсон с порядком аппроксимации

$$O(\tau + (\Delta v)^2 + (\Delta j)^2)$$

на каждом шаге по безразмерному времени  $\tau$  [13]. Сетка по «координатам»  $(v, j)$  была выбрана так, что  $\Delta v = \Delta j = 0,02$ , шаг безразмерного времени  $\Delta \tau = 0,01$ , при этом размеры счетной области составили  $-3 \leq v \leq 3$ ;  $-2 \leq j \leq 1,5$ ;  $0 \leq \tau \leq 1,0$ . Выбор значения параметра  $t_0 = 0,3$  с позволил проследить эволюцию плотности вероятностей вплоть до  $\tau = 1$  без потери точности (контролировалось условие нормировки вероятности на единицу в счетной области). На каждом шаге по времени вычислялась плотность вероятностей якобиана

$$f_j(j; \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(j, v; \tau) dv. \quad (5)$$

## Результаты численного моделирования

Численное моделирование проводилось для значений эффективной вязкости  $k$  и коэффициента диффузии  $D_{uu}$ , соответствующих реальным атмосферным условиям. В соответствии с [14] для промышленного аэрозоля характерное значение коэффициента эффективной вязкости для достаточно крупных (радиусом порядка  $3,6 \cdot 10^{-4}$  м) частиц сажи равнялось  $0,3 \text{ с}^{-1}$ ; при слабом ветре (до  $1 \text{ м/с}$ ) коэффициент диффузии  $D_{uu} = 0,3 \text{ м}^2/\text{с}^3$ . Результаты моделирования при этих параметрах представлены на рис. 1, из которого видно, что даже на последнем шаге по времени (кривая 4) плотность вероятности отрицательных значений якобиана равна нулю, а это означает, что движение примеси остается однопоточковым.

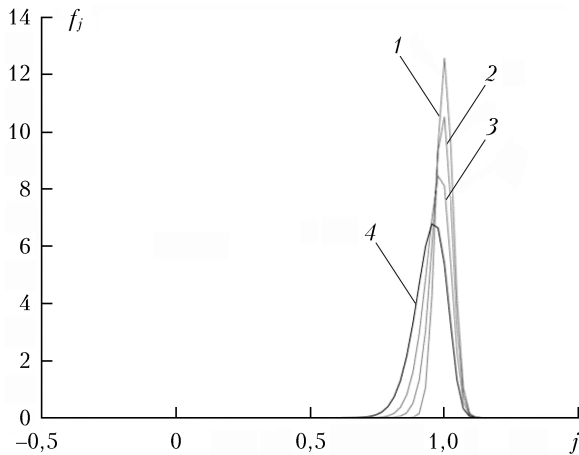


Рис. 1. Плотность вероятностей (5) при  $k = 0,3 \text{ с}^{-1}$ ,  $D_{uv} = 0,3 \text{ м}^2/\text{с}^3$  в различные моменты времени:  $\tau = 0$  (1); 0,5 (2); 0,75 (3); 1,0 (4)

Однако для более легких частиц увеличивает­ся как коэффициент эффективной вязкости  $k$ , так и коэффициент диффузии, в итоге ситуация принципиально меняется. На рис. 2 показаны результаты моделирования при значении параметра  $k$ , характерного для частиц дымового аэрозоля с радиусом порядка  $1,8 \cdot 10^{-4} \text{ м}$ , при этом коэффициент  $D_{uv}$  соответствует той же скорости ветра, что и на рис. 1. Видно, что, начиная с некоторого момента, площадь под кривой плотности вероятностей в области отрицательных значений якобиана (т.е. вероятность формирования многопоточкового движения частиц) существенно отличается от нуля.

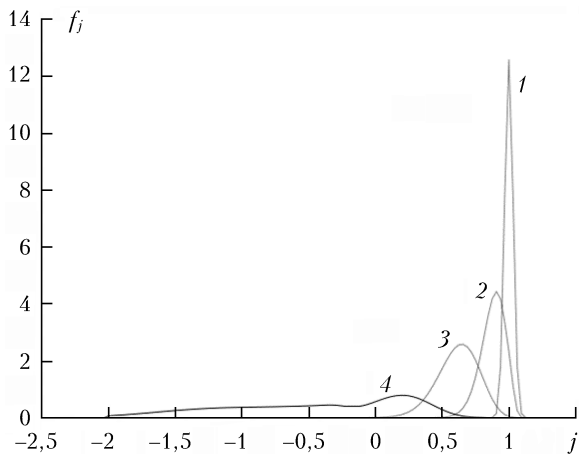


Рис. 2. Плотность вероятностей (5) при  $k = 1,2 \text{ с}^{-1}$ ,  $D_{uv} = 1,2 \text{ м}^2/\text{с}^3$  в различные моменты времени:  $\tau = 0$  (1); 0,5 (2); 0,75 (3); 1,0 (4)

На рис. 3 приведена карта распределения «вероятностной массы»

$$F(k, D_{uv}) = \sum_{j=-1}^0 f_j(j)$$

для вероятности многопоточкового движения аэрозоля в момент  $\tau = 0,9$ . Численное моделирование

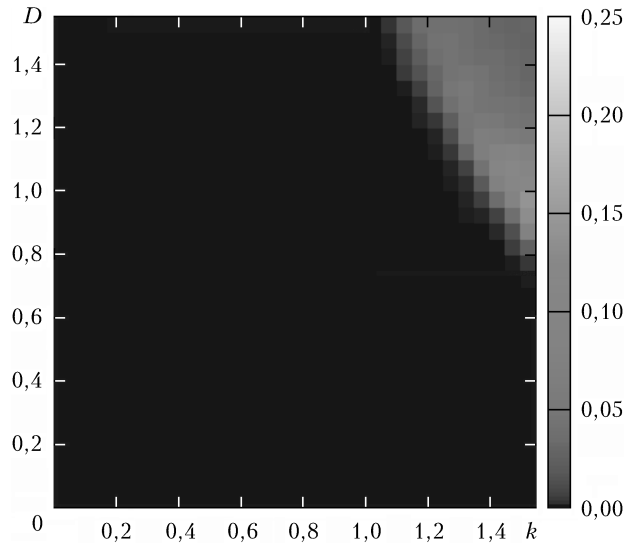


Рис. 3. Распределение «вероятностной массы» многопоточкового движения аэрозоля

проводилось в большом диапазоне значений коэффициентов вязкости и диффузии. Результаты моделирования показывают, что с уменьшением массы частиц (соответственно с ростом коэффициентов  $k$  и  $D_{uv}$ ) максимум плотности вероятностей все больше сдвигается в область отрицательных значений якобиана. Как видно из рис. 3, для таких частиц вероятность формирования многопоточковости существенно отличается от нуля.

## Заключение

Численное моделирование показывает, что более тяжелая примесь меньше подвержена влиянию окружающей среды и практически не меняет характер своего движения в турбулентном потоке. Более легкие частицы аэрозоля (с большим значением коэффициента эффективной вязкости) быстрее подвергаются действию окружающей среды, и их движение с большой вероятностью становится многопоточковым: в одну область пространства приходят частицы с различными начальными координатами. То же самое верно и для коэффициента диффузии. Полученные здесь результаты могут оказаться полезны при анализе данных оптического зондирования атмосферного аэрозоля.

1. *Абдуллаев С.Ф., Шукуров Т., Марупов Р., Назаров Б.И.* Исследование проб почв и пылевого аэрозоля методом ИК-спектроскопии // *Оптика атмосф. и океана.* 2013. Т. 26, № 2. С. 166–171.
2. *Сваровская Л.И., Яценко И.Г., Алтунина Л.К.* Адаптивная система мониторинга для оценки масштаба загрязнения территории предприятий нефтегазового комплекса // *Оптика атмосф. и океана.* 2017. Т. 30, № 2. С. 177–183.
3. *Наац И.Э.* Обратные задачи светорассеяния аэрозольными системами, взаимодействующими с физическими полями // *Оптика атмосф. и океана.* 1989. Т. 2, № 10. С. 1107–1112.

4. *Кляцкин В.И., Саичев А.И.* К статистической теории диффузии плавучей примеси в случайном поле скорости // ЖЭТФ. 1997. Т. 111, вып. 4. С. 1297–1313.
5. *Saichev A.I., Woyczynski W.A.* Probability distributions of passive tracers in randomly moving media // Stochastic Models in Geosystems / S.A. Molchanov, W.A. Woyczynski (eds.). New York: Springer-Verlag, 1997. P. 359–399.
6. *Maxey M.R.* The gravitational settling of aerosol particles in homogeneous turbulence and random flow fields // J. Fluid Mech. 1987. V. 174. P. 441–465.
7. *Mazzino A.* Two-dimensional turbulent convection // Phys. Fluids. 2017. V. 29, iss 11. P. 111102.
8. *Cvetkovic V., Fiori A., Dagan G.* Tracer travel and residence time distributions in highly heterogeneous aquifers: Coupled effect of flow variability and mass transfer // J. Hydrol. 2016. V. 543. P. 101–108.
9. *Курочкин В.Е., Шарфарец Б.П., Шарфарец Е.Б.* Обзор математических моделей, описывающих процесс транспорта примесей и одиночных частиц в потоке жидкости // Науч. приборостроение. 2015. Т. 25, № 4. С. 36–42.
10. *Rampf C., Frisch U.* Shell-crossing in quasi-one-dimensional flow // MNRAS. 2017. V. 471. P. 671.
11. *Гурбатов С.Н., Малахов А.Н., Саичев А.И.* Нелинейные случайные волны в средах без дисперсии. М.: Наука, 1990. 216 с.
12. *Грибова Е.З.* Диффузия инертных частиц в турбулентной вязкой среде // Изв. вузов. Радиофизика. 2003. Т. 46, № 2. С. 162–166.
13. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы. М.: Наука, 1989. 432 с.
14. *Csanady G.T.* Turbulent diffusion in the environment. Dordrecht, Boston: D. Reidel Publ. Comp., 1980. 248 p.

*E.Z. Gribova, S.E. Losev.* **The influence of the inertia of aerosol particles on the formation of multi-stream when moving in a turbulent flow.**

We describe diffusion processes when aerosol particles are moving in the atmosphere. The impact of particles' inertia and diffusion coefficient on multistream formation was determined via the numerical solution of the Fokker–Planck equation. The simulation has been performed within the certain range of parameters, considering turbulent diffusion effects in real atmospheric conditions. The results of the study may be useful in interpreting aerosol optical sensing data.