

Д.А. Безуглов, Е.Н. Мищенко, О.В. Серпенинов

МЕТОД КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ АППРОКСИМАЦИИ В ЗАДАЧЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ФАЗОВОГО ФРОНТА ДЛЯ АДАПТИВНЫХ ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

На основе метода кусочно-линейной аппроксимации получен эффективный алгоритм, позволяющий существенно уменьшить объем вычислительных затрат и увеличить точность при восстановлении фазового фронта. Получены аналитические выражения для оценки вычислительных затрат и дисперсии ошибки восстановления фазового фронта как функции дисперсии ошибки измерений. Показаны преимущества предложенного метода.

Для решения задачи компенсации нестационарных искажений оптического излучения при распространении его в турбулентной атмосфере в настоящее время широко используются системы фазового сопряжения [1, 2]. Одним из главных вопросов, возникающих при построении таких систем, является вычисление вектора оптимальных управляющих воздействий гибкого адаптивного зеркала в реальном масштабе времени и с заданной точностью. Вектор оптимальных управляющих сигналов при этом вычисляют из условия минимума функционала

$$\min_{\mathbf{U}} \sigma^2 = \min_{\mathbf{U}} \left\{ \frac{1}{S} \int [\Psi(\rho) - \mathbf{U}\mathbf{F}]^2 d^2\rho \right\}, \quad (1)$$

где σ^2 — средний по площади входной апертуры квадрат фазовых возмущений; \mathbf{U} — вектор управляющих воздействий; \mathbf{F} — вектор функций отклика корректора фазового фронта; Ψ — функция, описывающая фазовое возмущение; $\rho = \frac{2r}{D}$, r — радиус-вектор точек на входной апертуре; D — диаметр апертуры, в виде [3]

$$\mathbf{U}_0 = \mathbf{M}\Phi^{-1}, \quad (2)$$

где $\mathbf{M} = \frac{1}{S} \int \Psi \mathbf{F} d^2\rho$ — вектор; $\Phi = \left\| \frac{1}{S} \int F_p F_l d^2\rho \right\|$ — квадратная матрица.

Учитывая особенности оптического излучения, для определения параметров фазового фронта Ψ обычно используют результаты измерений датчика гартмановского типа. С помощью такого датчика проводят измерения локальных наклонов фазового фронта в точках апертуры вида [1, 2]

$$U_{ij} = k^{-1} \frac{\partial \Psi(x_i, y_j)}{\partial x}; \quad V_{ij} = k^{-1} \frac{\partial \Psi(x_i, y_j)}{\partial y}, \quad (3)$$

где k — волновое число.

К настоящему времени известно большое число модификаций гартмановских датчиков [3]. Однако вне зависимости от физических принципов измерения локальных наклонов фазового фронта по результатам измерений вида (3) производят восстановление реального фазового фронта и вычисление вектора оптимальных управляющих сигналов в соответствии с (2). На практике реализация алгоритма вида (2) может потребовать большого объема вычислительных затрат, что ограничивает использование данных алгоритмов в реальном масштабе времени.

В [3, 4] предложен вариант алгоритма фазового сопряжения, не требующего предварительного восстановления фазового фронта в явном виде. В этом случае оптимальная фазовая поверхность находится как:

$$\mathbf{U}_{\text{опт}} = \mathbf{P}\mathbf{G}^{-1}, \quad (4)$$

где

$$\mathbf{P} = \left\| \int \text{grad}\Psi \text{grad}F_l d^2\rho \right\| \text{ — матрица-строка};$$

$$\mathbf{G} = \left\| \int \text{grad}F_p \text{grad}F_l d^2\rho \right\| \text{ — квадратная матрица}.$$

Однако реализация такого алгоритма на практике для широкого класса функций отклика гибких адаптивных зеркал крайне проблематична, поскольку матрица G в некоторых случаях может не существовать по причине линейной зависимости строк или столбцов. Также следует отметить, что реальные функции отклика F_l гибких адаптивных зеркал могут отличаться от теоретических или экспериментально измеренных, что также может привести к плохой обусловленности матрицы G .

В данной статье рассмотрен метод восстановления фазового фронта с использованием кусочно-линейной аппроксимации.

Пусть задана квадратная апертура, состоящая из $M \times M$ одинаковых субапертур, в центре которых измеряются локальные наклоны фазового фронта вида (3). Рассмотрим j ($j = \overline{1, M}$) сечение волнового фронта по координате y (рис. 1).

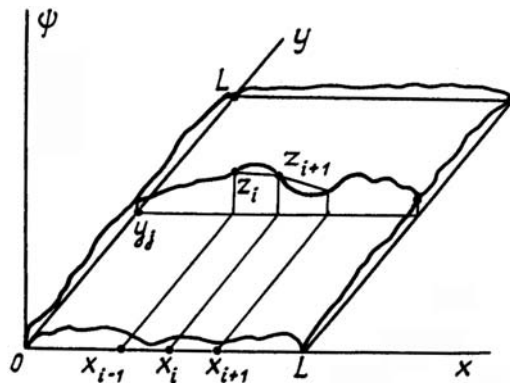


Рис. 1. j -е сечение фазового фронта

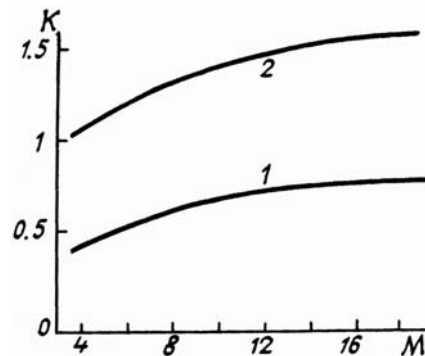


Рис. 2. Зависимость коэффициента k_i от числа субапертур датчика гартмановского типа: 1 – метод кусочно-линейной аппроксимации; 2 – известный алгоритм [5]

В общем случае сечение волнового фронта представляет собой случайную функцию от координаты x_i ($i = \overline{1, M}$). Разобьем сечение волнового фронта на M интервалов, на каждом из которых значение волнового фронта аппроксимируем отрезком прямой:

$$z_i = a_i + U_i x, \quad (5)$$

где a_i – фазовый сдвиг на i -м интервале; z_i – кусочно-линейная аппроксимация фазового фронта. В выражении (5) и в дальнейшем опущены индексы j .

Для нахождения значений a_i воспользуемся условием стыковки соседних участков:

$$a_i + U_i x_i = a_{i+1} + U_{i+1} x_i, \quad (6)$$

где x_i – значение координаты x в точке i .

В соответствии с (6) можно записать систему из $M-1$ линейных уравнений:

$$\begin{aligned} a_1 - a_2 &= (U_2 - U_1)x_1; \\ a_2 - a_3 &= (U_3 - U_2)x_2; \\ a_{M-1} - a_M &= (U_{M-1} - U_M)x_{M-1}. \end{aligned} \quad (7)$$

Еще одно уравнение, дополняющее систему (7), получим из условия обеспечения равенства нулю средней фазы на всей апертуре:

$$\sum_{i=1}^M \int_{x_{i-1}}^{x_i} (a_i + U_i x) dx = 0, \quad (8)$$

или

$$\sum_{i=1}^M (x_i - x_{i-1}) \left[a_i + \frac{U_i}{2} (x_i - x_{i-1}) \right] = 0. \quad (9)$$

С учетом того, что $x_i = i\Delta x$, $\Delta x = \frac{L}{M}$, L – размер апертуры датчика, выражение (9) можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^M a_i = -\frac{\Delta x}{2} \sum_{i=1}^M U_i (2i - 1). \quad (10)$$

Введя обозначения

$$\begin{aligned} b_i &= (U_{i+1} - U_i) i \Delta x; \\ \alpha &= -\frac{\Delta x}{2} \sum_{i=1}^M U_i (2i - 1), \end{aligned} \quad (11)$$

можно записать систему линейных уравнений:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{M-1} \\ a_M \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{M-1} \\ \alpha \end{vmatrix} \quad (12)$$

Решая (12), получим значения фазовых сдвигов a_i :

$$a_i = \sum_{l=i}^{M-1} b_l - \sum_{l=1}^{M-1} \frac{b_l}{M} + \frac{\alpha}{M}. \quad (13)$$

Таким образом, с учетом (11) метод восстановления реального фазового фронта по результатам измерений его локальных наклонов сводится к следующему:

$$a_i = \sum_{l=i}^{M-1} \Delta x l (U_{l+1} - U_l) - \sum_{l=1}^{M-1} \frac{\Delta x}{M} l^2 (U_{l+1} - U_l) - \sum_{l=1}^M \frac{\Delta x}{2M} (2l - 1) U_l. \quad (14)$$

Проведя процедуру (14) по всем строкам матрицы субапертур для U_{ij} и по всем столбцам для V_{ij} , значение фазового сдвига на ij -субапертуре можно записать как

$$a_{ij} = (a_{ij}^x + a_{ij}^y) / 2, \quad (15)$$

где a_{ij}^x – результаты кусочно-линейной аппроксимации по строкам матрицы субапертур; a_{ij}^y – результаты кусочно-линейной аппроксимации по столбцам матрицы субапертур. При этом фазовый фронт на всей апертуре восстанавливается в виде

$$\psi_{ij} = a_{ij} + U_{ij}x + V_{ij}y. \quad (16)$$

Вектор оптимальных управляющих сигналов для адаптивной оптической системы в этом случае находится согласно (2).

Рассмотрим ошибки восстановления при использовании предложенного метода. При этом будем исходить из предположения, что ошибки измерений локальных наклонов фазового фронта на соседних субапертурах не коррелированы. С учетом принципа суперпозиции и в силу линейности полученного метода восстановления вместо

$$U_{ij}^n = U_{ij} + n_{ij}^x; \quad V_{ij}^n = V_{ij} + n_{ij}^y \quad (17)$$

можно рассмотреть случай наличия на входе устройства, реализующего алгоритм (14) следующих величин:

$$U_{ij}^n = n_{ij}^x; \quad U_{ij}^n = n_{ij}^y, \quad (18)$$

где n_{ij} – статистически независимые шумы измерений.

Такой подход при анализе ошибок восстановления фазового фронта в дальнейшем значительно упростит выкладки и позволит получить аналитические выражения, позволяющие провести сравнение разработанного метода с известными. Дисперсия ошибки восстановления запишется следующим образом:

$$\langle n_{ij}^2 \rangle = \left\langle \left[\sum_{l=i}^{M-1} \Delta x l (n_{l+1} - n_l) - \sum_{l=i}^{M-1} \frac{\Delta x}{M} l^2 (n_{l+1} - n_l) - \sum_{l=i}^M \frac{\Delta x}{2M} (2l-1) n_l \right]^2 \right\rangle. \quad (19)$$

С учетом статистической независимости шумов в различных каналах и с учетом (14) выражение (19) можно представить как

$$\sigma_{ni}^2 = \sigma^2 \kappa_i, \quad (20)$$

где σ^2 — дисперсия ошибки восстановления; σ^2 — дисперсия шумов измерений локальных наклонов фазового фронта. Индекс i при коэффициенте κ_i обозначает, что σ_{ni}^2 зависит от места расположения субапертуры. При $i = 1$ с учетом (19)

$$\kappa_1 \approx \frac{M}{30} - \frac{1}{M^3} \approx \frac{M}{30}. \quad (21)$$

Аналогичное выражение может быть получено для субапертуры, находящейся посредине строки:

$$\kappa_{M+1/2} = \frac{M}{30} - \frac{16}{30M^2} \approx \frac{M}{30}. \quad (22)$$

На рис. 2 приведены результаты расчетов на ЭВМ значений среднего коэффициента κ_c . Здесь же для сравнения приведена зависимость аналогичного коэффициента для известного алгоритма восстановления фазового фронта [5].

Объем вычислительных затрат для реализации синтезированного алгоритма может быть определен по формуле:

$$Q = 10M^3 + 2M^2. \quad (23)$$

При этом следует отметить, что для реализации известного [5] алгоритма восстановления фазового фронта потребуется не менее $2/3(M+1)^6$ операций.

Предложенный метод был реализован на ЭВМ серии ЕС на языке PL = 1.

Выводы. Предложенный в статье метод восстановления фазового фронта позволяет существенно сократить объем вычислительных затрат и повысить точность восстановления по результатам измерений датчика гартмановского типа. Метод является универсальным и может быть реализован как с использованием аналоговых устройств [6], так и с помощью современных высокопроизводительных параллельных вычислительных средств. Представление фазового фронта на каждой субапертуре в виде (16) позволяет использовать датчик волнового фронта [6] в адаптивной оптической системе с сегментированным зеркалом с управлением как по наклонам, так и по положению. В этом случае ошибка аппроксимации фазового фронта уменьшается по сравнению с сегментированным зеркалом в 2 раза [4]. Особо следует отметить тот факт, что при восстановлении фазового фронта по предложенному методу не требуется обращения матриц вида G , и решить задачу восстановления для широкого класса функций отклика гибких адаптивных зеркал не представляет трудностей.

1. Воронцов М. А., Шмальгаузен В. И. Принципы адаптивной оптики. М.: Наука, 1985. 336 с.
2. Лукьянов Д. П., Корниенко А. А., Рудницкий Б. Е. Оптические адаптивные системы. /Под ред. Д. П. Лукьянова. М.: Радио и связь, 1989. 240 с.
3. Кислов В. И., Тараненко В. Г. //Радиотехника и электроника. 1986. Т. 31. № 11. С. 2187—2190.
4. Тараненко В. Г., Шанин О. И. Адаптивная оптика. М.: Радио и связь, 1990. 112 с.
5. Устинов Н. Д., Матвеев И. Н., Протопопов В. В. Методы обработки оптических полей в лазерной локации. М.: Наука, 1983. 272 с.
6. Положительное решение по заявке № 4361099/25-10 от 7.01.88 г. G02B 27/00. Датчик волнового фронта /Д.А. Безуглов, Е.Н. Мищенко, В.Л. Тюриков.

Поступила в редакцию
14 июня 1990 г.

D. A. Bezuglov, E. N. Mishchenko, O. V. Serpeninov. **The Piecewise Linear Approximation Method in the Problem of Restoration of the Phase Front in Adaptive Optical Systems.**

An effective algorithm is obtained based on the use of piecewise linear approximation method allowing one to reduce sufficiently the volume of calculations and to improve the accuracy of the phase front restoration. Analytical expressions for the estimation of the calculation volume and of the phase front restoration error variance as a function of the measurement error variance is also obtained. The advantages of the proposed method are discussed.