

## ОПТИКА КЛАСТЕРОВ, АЭРОЗОЛЕЙ И ГИДРОЗОЛЕЙ

УДК 533.72

# Аккомодационная зависимость термофореза в газах в кнудсеновском режиме

Е.А. Вилисова, В.Г. Черняк\*

Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина  
620083, г. Екатеринбург, пр. Ленина, 51

Поступила в редакцию 28.01.2014 г.

Изучена роль коэффициентов аккомодации энергии, тангенциального и нормального импульсов в явлении термофореза сферической аэрозольной частицы при свободномолекулярном (кнудсеновском) режиме. Особенность данной работы состоит в том, что в ней не используются какие-либо предположения относительно функции распределения отраженных от поверхности частицы молекул газа. Коэффициенты аккомодации вводятся в уравнения непосредственно через потоки импульса и энергии.

Получены выражения для силы и скорости термофореза, а также для тепловой поляризации частицы (разность температур в диаметрально противоположных точках поверхности частицы в направлении набегающего потока газа). Показано, что в кнудсеновском режиме сила и скорость термофореза зависят только от коэффициентов аккомодации импульса и не зависят от коэффициента аккомодации энергии. Величина тепловой поляризации, напротив, прямо пропорциональна коэффициенту аккомодации энергии и не зависит от коэффициентов аккомодации импульса.

*Ключевые слова:* термофорез, коэффициенты аккомодации энергии и импульса, тепловая поляризация аэрозольной частицы, газ, молекула; thermophoresis, accommodation coefficients of energy and momentum, thermal polarization of the aerosol particle, gas, molecule.

### Введение

Явление термофореза состоит в том, что на частицы в неоднородно нагретом газе действует сила, вызывающая их движение [1].

Сила и скорость термофореза аэрозольной частицы определяются нормальными и касательными напряжениями в газе на ее поверхности. Количественный вклад этих напряжений в силу и скорость термофореза на макроскопическом уровне описания принято характеризовать значениями коэффициентов аккомодации импульса и энергии. Результат теоретического исследования аккомодационной зависимости термофореза в газах в существенной степени определяется выбором модели функции распределения молекул, отраженных от поверхности аэрозольной частицы.

В существующих теориях термофореза предполагалось или полностью диффузное рассеяние молекул [2], или зеркально-диффузное отражение [3], или функция распределения разлагалась в ряд в пространстве скоростей, а коэффициенты разложения выражались через коэффициенты аккомодации [4].

Цель нашей работы состоит в том, чтобы, не используя какие-либо предположения относительно функции распределения отраженных молекул, в кнудсеновском режиме получить выражения для силы, скорости термофореза и тепловой поляризации аэро-

зольной частицы через коэффициенты аккомодации энергии и импульса. При этом коэффициенты аккомодации вводятся в уравнения непосредственно через потоки импульса и энергии.

### 1. Постановка и решение задачи

Рассмотрим движение сферической аэрозольной частицы радиуса  $r_0$  в неоднородно нагретом однокомпонентном газе. Градиент температуры в газе  $\nabla T_\infty$  направлен вдоль оси  $z$ , которая совпадает с направлением скорости потока газа относительно частицы  $U_\infty$  (рис. 1). Сферическую систему координат свяжем с аэрозольной частицей. Полярный угол  $\theta$  будем отсчитывать против часовой стрелки от оси  $z$  до луча  $r$ .

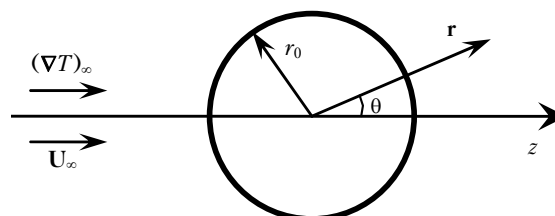


Рис. 1. Геометрия задачи

Пусть  $T_0, n_0, p_0$  — соответственно температура, числовая плотность и давление газа вдали от частицы в плоскости, перпендикулярной оси  $z$  и проходящей через центр этой частицы.

Елена Анатольевна Вилисова (vilisova@mail.ru); Владимир Григорьевич Черняк (vladimir.chernyak@urfu.ru).

Вдоль оси  $z$  температура газа возрастает по линейному закону

$$T = T_0 \left( 1 + \frac{|\nabla T_\infty|}{T_0} z \right).$$

Предположим, что локальное значение температуры поверхности частицы  $T_s(\theta)$  незначительно отличается от равновесной температуры газа  $T_0$ :

$$T_s(\theta) = T_0(1 + \tau_s(\theta)), \quad |\tau_s(\theta)| \ll 1.$$

Числовую плотность молекул газа у поверхности частицы  $n_s(\theta)$  также будем считать незначительно отличающейся от равновесной числовой плотности молекул  $n_0$ , соответствующей температуре  $T_0$ :

$$n_s = n_0(1 + v_s(\theta)), \quad |v_s(\theta)| \ll 1.$$

Полагаем, что средняя длина свободного пробега молекул газа  $l$  существенно превышает радиус аэрозольной частицы  $r_0$ , т.е. число Кнудсена велико:

$$\text{Kn} = \frac{l}{r_0} \gg 1.$$

В этом случае имеет место свободномолекулярный (кнудсеновский) режим движения аэрозольной частицы. Объемная функция распределения молекулярных скоростей  $\mathbf{v}$ , сформированная вдали от частицы за счет столкновений между молекулами, не искажается молекулами, отраженными от поверхности аэрозольной частицы.

Пусть объемная функция распределения, а следовательно, и функция распределения налетающих на частицу молекул соответствуют первому приближению Чепмена–Энскога [5]:

$$f^- = f_0 \left( 1 + 2c_z u_\infty + \left( \mathbf{c}^2 - \frac{5}{2} \right) \frac{|\nabla T_\infty|}{T_0} z - \frac{2}{5} \frac{\lambda}{\rho_0} \frac{m}{k} \left( \frac{2kT_0}{m} \right)^{1/2} \left( \mathbf{c}^2 - \frac{5}{2} \right) c_z \frac{|\nabla T_\infty|}{T_0} \right), \quad (1)$$

где

$$f_0 = n_0 \left( \frac{m}{2\pi kT_0} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{mv^2}{2kT_0} \right)$$

– равновесная функция распределения Максвелла;  $m$  – масса молекулы газа;  $k$  – постоянная Больцмана;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности газа;  $\mathbf{c} = \mathbf{v}/\bar{v}$  – безразмерная скорость молекул;  $u_\infty = U_\infty/\bar{v}$  – безразмерная макроскопическая скорость газа вдали от аэрозольной частицы (в набегающем потоке),  $\bar{v} = (2kT_0/m)^{1/2}$  – наиболее вероятная скорость теплового движения молекул газа.

Далее обычно задают функцию распределения отраженных от аэрозольной частицы молекул газа. Мы этого делать не будем, а воспользуемся макроскопическим уровнем описания взаимодействия

«газ–поверхность». Введем коэффициенты аккомодации энергии  $\alpha_E$ , тангенциального  $\alpha_\tau$  и нормального  $\alpha_n$  импульсов через потоки энергии  $E_r$  и импульса  $P_{ij}$ :

$$\alpha_E = \frac{|E_r^-| - |E_r^+|}{|E_r^-| - |E_r^s|}, \quad (2)$$

$$\alpha_\tau = \frac{|P_{r\theta}^-| - |P_{r\theta}^+|}{|P_{r\theta}^-|}, \quad (3)$$

$$\alpha_n = \frac{|P_{rr}^-| - |P_{rr}^+|}{|P_{rr}^-| - |P_{rr}^s|}. \quad (4)$$

Верхние индексы (+, s, –) относятся соответственно к отраженным, диффузно испущенным и налетающим на поверхность аэрозольной частицы молекулам газа.

Радиальный поток энергии определяется выражением [5]:

$$E_r = \frac{m}{2} \int v_r v^2 f d\mathbf{v}.$$

Тензор напряжений (компоненты потока импульса) определяется как

$$P_{ri} = m \int V_r V_i f d\mathbf{v}, \quad i = r, \theta,$$

где  $\mathbf{V} = \mathbf{v} - \mathbf{U}$  – собственная скорость молекул относительно макроскопической скорости газа

$$\mathbf{U} = \frac{1}{n_0} \int \mathbf{v} f d\mathbf{v}.$$

В любой точке поверхности частицы выполняется условие непротекания газа

$$\int_{v_r > 0} v_r f^s d\mathbf{v} = \int_{v_r < 0} |v_r| f^- d\mathbf{v}. \quad (5)$$

Тогда радиальный поток энергии  $E_r$  в выражении (2) можно заменить радиальной плотностью теплового потока  $q_r$ . Используя (2)–(4), для радиального потока энергии  $q_r$  и компонент  $P_{r\theta}$  и  $P_{rr}$  получаем выражения через коэффициенты аккомодации:

$$q_r = \alpha_E (|q_r^s| - |q_r^-|); \quad (6)$$

$$P_{r\theta} = -\alpha_\tau |P_{r\theta}^-|, \quad (7)$$

$$P_{rr} = \alpha_n (|P_{rr}^s| - |P_{rr}^-|). \quad (8)$$

Здесь

$$|P_{ri}^-| = m \int_{v_r < 0} |V_r| V_i f^- d\mathbf{v}, \quad i = r, \theta,$$

$$|P_{rr}^s| = m \int_{v_r > 0} V_r^2 f^s d\mathbf{v};$$

$$|q_r^-| = \frac{m}{2} \int_{v_r < 0} |V_r| V^2 f^- d\mathbf{v}, \quad |q_r^s| = \frac{m}{2} \int_{v_r > 0} V_r V^2 f^s d\mathbf{v};$$

$$\tau_s(\theta) = \frac{\alpha_E}{2\Lambda} \frac{|\nabla T_\infty|}{T_0} r_0 \cos\theta.$$

$f^-$  и  $f^s$  — соответственно функции распределения налетающих (1) на частицу и диффузно рассеянных молекул газа (при полной аккомодации). В линейном приближении функция  $f^s$  слабо отличается от равновесного максвелловского распределения:

$$\begin{aligned} f^s &= n_s \left( \frac{m}{2\pi k T_s} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT_s}\right) = \\ &= f_0 \left( 1 + v_s(\theta) + \left( c^2 - \frac{3}{2} \right) \tau_s(\theta) \right). \end{aligned}$$

Из выражений (6)–(8) видно, что для расчета радиального потока тепла и тензора напряжений достаточно знать функцию распределения по скоростям налетающих на частицу молекул, а функцию распределения отраженных молекул можно не моделировать.

Для нахождения относительных возмущений числовой плотности  $v_s(\theta)$  и температуры  $\tau_s(\theta)$  используем условие непротекания газа (5) и условие непрерывности радиального потока тепла на поверхности аэрозольной частицы:

$$q_p(r = r_0) = q_r(r = r_0). \quad (9)$$

Поток тепла внутри частицы  $q_p$  находится из закона теплопроводности Фурье

$$q_p = -\lambda_p \frac{\partial T_p}{\partial r},$$

где  $\lambda_p$  — коэффициент теплопроводности аэрозольной частицы.

Распределение температуры внутри частицы  $T_p(\theta)$  описываем стационарным уравнением теплопроводности  $\Delta T_p = 0$ . Тогда выражения для величин  $v_s(\theta)$  и  $\tau_s(\theta)$  имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} v_s(\theta) &= -\frac{1}{2} \tau_s(\theta) - \sqrt{\pi} u_\infty \cos\theta - \frac{1}{2} \frac{|\nabla T_\infty|}{T_0} r_0 \cos\theta, \\ \tau_s(\theta) &= \left( \Lambda + \frac{4\alpha_E}{15\text{Kn}} \right)^{-1} \times \\ &\times \left[ \frac{4\alpha_E}{15\text{Kn}} \left( -\frac{\sqrt{\pi}}{4} u_\infty + \frac{|\nabla T_\infty|}{T_0} r_0 \right) + \frac{\alpha_E}{2} \frac{|\nabla T_\infty|}{T_0} r_0 \right] \cos\theta \quad (10) \end{aligned}$$

( $\Lambda = \lambda_p/\lambda$  — безразмерный параметр теплопроводности). Заметим, что для абсолютного большинства аэрозольных частиц и газов  $\Lambda \geq 1$ . Пренебрегая членами порядка  $(\Lambda\text{Kn})^{-1}$ , для возмущения равновесной температуры поверхности частицы  $\tau_s(\theta)$  получим

Используя найденные  $v_s(\theta)$  и  $\tau_s(\theta)$ , рассчитываем потоки (6)–(8), а также силу, действующую со стороны молекул газа на аэрозольную частицу, в направлении координатной оси  $z$ :

$$F_z = -\int P_{zr} dS = -\int (P_{rr} \cos\theta - P_{r\theta} \sin\theta) dS.$$

Эта сила — результирующая термодиффузионной силы  $F_T$  и стоковой силы сопротивления  $F_D$ :

$$F_z = F_T + F_D.$$

В свободномолекулярном режиме ( $\text{Kn} \gg 1$ ) получаем

$$F_T = -\frac{16}{15} r_0^2 \left( \frac{\pi m}{8kT_0} \right)^{1/2} (\alpha_n + \alpha_\tau) \lambda |\nabla T_\infty|, \quad (11)$$

$$F_D = \frac{2\sqrt{\pi}}{3} r_0^2 p_0 (\alpha_n(\pi + 4) + 4\alpha_\tau) u_\infty. \quad (12)$$

Из условия равномерности движения аэрозольной частицы ( $F_z = 0$ ) находим выражение для скорости термодиффузии  $U_T = -U_\infty$  вдоль оси  $z$ :

$$U_T = -\frac{4\lambda}{5p_0} \frac{\alpha_n + \alpha_\tau}{\alpha_n(\pi + 4) + 4\alpha_\tau} (\nabla T_\infty). \quad (13)$$

Для упрощения анализа аккомодационной зависимости запишем выражения (11)–(13) в приведенном виде, разделив их на соответствующие выражения в случае полной аккомодации:

$$F_T^* = \frac{F_T}{F_T(\alpha_i = 1)} = \frac{\alpha_n + \alpha_\tau}{2}, \quad (14)$$

$$F_D^* = \frac{F_D}{F_D(\alpha_i = 1)} = \frac{\alpha_n(\pi + 4) + 4\alpha_\tau}{\pi + 8}, \quad (15)$$

$$U_T^* = \frac{U_T}{U_T(\alpha_i = 1)} = \frac{(\pi + 8)(\alpha_n + \alpha_\tau)}{2[\alpha_n(\pi + 4) + 4\alpha_\tau]}. \quad (16)$$

Тепловой поляризацией частицы  $\Delta T_s$  принято называть разность температур в диаметрально противоположных точках поверхности частицы в направлении набегающего потока. Из выражения (10), оставляя члены, содержащие только  $u_\infty$ , получим

$$\Delta T_s = T_s(\theta = \pi) - T_s(\theta = 0) = \frac{\alpha_E p_0 r_0}{2\lambda_p} U_\infty. \quad (17)$$

Таким образом, в кнудсеновском режиме эффект тепловой поляризации частицы имеет порядок  $(\Lambda\text{Kn})^{-1}$ . Поэтому в пределе  $(\Lambda\text{Kn}) \rightarrow \infty$  тепловая поляризация не происходит.

## 2. Обсуждение результатов

Выражения (11) и (13) для силы и скорости термофореза совпадают с выражениями, полученными в [2], если в (11) и (13) положить  $\alpha_n = \alpha_\tau = 1$ .

Из (14)–(16) видно, что сила и скорость термофореза зависят только от аккомодации нормального и тангенциального импульсов, но не зависят от коэффициента аккомодации энергии молекул газа на поверхности. Это ожидаемый результат, так как известно [2], что сила и скорость термофореза в кнудсеновском режиме не зависят от теплопроводности аэрозольной частицы. Отметим, что в [4] коэффициент аккомодации энергии вошел в выражения для величин  $F_T$  и  $U_T$ . Также видно, что если в величину  $F_T^*$  коэффициенты  $\alpha_\tau$  и  $\alpha_n$  вносят одинаковый вклад, то в силу сопротивления  $F_D^*$  больший вклад вносит  $\alpha_n$ . Поэтому приведенная скорость термофореза  $U_T^*$  ведет себя с уменьшением  $\alpha_\tau$  и  $\alpha_n$  неодинаково. Если при условии полной аккомодации нормального импульса ( $\alpha_n = 1$ ) с уменьшением  $\alpha_\tau$  от 1 до 0 величина  $U_T^*$  уменьшается на 22% (рис. 2), то при условии полной аккомодации тангенциального импульса ( $\alpha_\tau = 1$ ) с уменьшением  $\alpha_n$  от 1 до 0  $U_T^*$  возрастает на 40% (рис. 3).

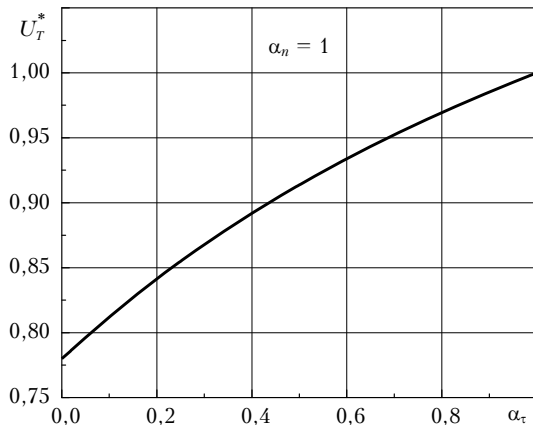


Рис. 2. Зависимость скорости термофореза от  $\alpha_\tau$ .

Из выражения (17) следует, что величина тепловой поляризации аэрозольной частицы, напротив, прямо пропорциональна коэффициенту аккомодации энергии  $\alpha_E$ , но не зависит от аккомодации импульса.

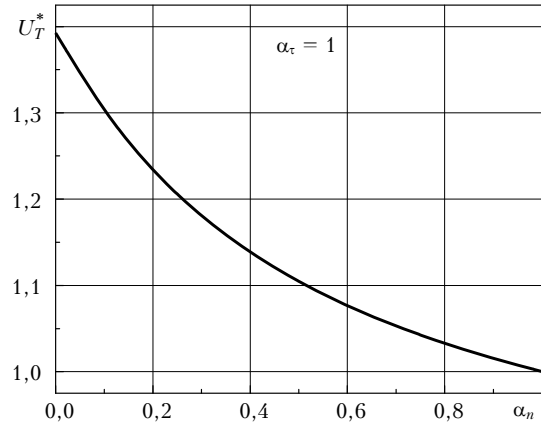


Рис. 3. Зависимость скорости термофореза от  $\alpha_n$ .

## Заключение

В случае свободномолекулярного режима получены выражения силы и скорости термофореза, а также разности температур в диаметрально противоположных точках поверхности частицы в направлении набегающего потока газа через коэффициенты аккомодации энергии и импульса. Установлено, что первые две величины зависят только от аккомодации нормального и тангенциального импульса, но не зависят от коэффициента аккомодации энергии. Величина тепловой поляризации аэрозольной частицы прямо пропорциональна коэффициенту аккомодации энергии, но не зависит от аккомодации импульса. Полученные выражения могут быть использованы при экспериментальных исследованиях явления термофореза и влияния на него характера взаимодействия газа с поверхностью аэрозольной частицы.

1. Фукс Н.А. Механика аэрозолей. М.: Изд-во АН СССР, 1955. 352 с.
2. Баканов С.П., Дерягин Б.В. О теории термопреципитации высокодисперсных аэрозольных систем // Коллоид. ж. 1959. Т. 21, № 4. С. 377–384.
3. Brock J.R. The thermal force in the transition region // J. Colloid Interface Sci. 1967. V. 23, N 3. P. 448–452.
4. Beresnev S.A., Chernyak V.G. Thermophoresis of a spherical particle in a rarefied gas: Numerical analysis based on the model kinetic equations // Phys. Fluids. 1995. V. 7, N 7. P. 1743–1756.
5. Ферцигер Дж., Канер Г. Математическая теория процессов переноса в газах. М.: Мир, 1976. 554 с.

### *E.A. Vilisova, V.G. Chernyak. Accommodation dependence of thermophoresis in gases under Knudsen mode.*

The role of accommodation coefficients of energy and tangential and normal momenta in the phenomenon of thermophoresis of a spherical aerosol particle in the Knudsen (free-molecular) mode was studied. Feature of this work is that it does not use any assumptions about the distribution function of the gas molecules reflected from the surface of particles. Accommodation coefficients are introduced into the equations directly through the momentum and energy fluxes.

The expressions for the force and rate of thermophoresis, as well as for thermal polarization of particles (the difference in temperatures at diametrically opposite points on the particle surface in the direction of incoming flow of gas) were obtained. It was shown that in the Knudsen mode the force and rate of thermophoresis depend only on the accommodation coefficient of momentum, and do not depend on the accommodation coefficient of energy. The value of thermal polarization, on the contrary, is directly proportional to the accommodation coefficient of energy, but does not depend on the accommodation coefficient of momentum.