

ОПТИКА СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

УДК 519.246:551.551

Спектральная плотность стационарных случайных процессов со степенной структурной функцией

В.А. Федоров*

Институт оптики атмосферы им. В.Е. Зуева СО РАН
634055, г. Томск, пл. Академика Зуева, 1

Поступила в редакцию 26.02.2019 г.; после доработки 4.12.2019 г.

Сформулированы условия принадлежности функций к классу структурных для стационарных случайных процессов. В пространственной области это соответствует однородному и изотропному скалярному полю. Показано, что степенная функция является структурной лишь при показателе степени не больше единицы. Также показаны связь спектральных плотностей стационарных и случайных процессов со стационарными приращениями и осциллирующий характер поведения спектральной плотности стационарных процессов. Получены аналитические выражения для их описания с анализом точностных характеристик, рекомендованные для широкого практического использования.

Ключевые слова: стационарный случайный процесс, случайный процесс со стационарными приращениями, структурная функция, спектральная плотность; random stationary process, random process with stationary increments, structure function, spectral density.

Введение

При решении многочисленных задач по микроструктуре турбулентности и ее влиянию на распространение излучения в атмосфере, включая оптическое, активно используется аппарат корреляционных (КФ) и/или структурных функций (СФ). Также он широко применяется при изучении атмосферы как случайной среды, в частности при исследовании различных метеорологических процессов и полей [1–5]. Напомним, что далеко не все функции можно использовать в качестве корреляционных ($B(\tau)$) или структурных ($D(\tau)$) (здесь τ – временной или пространственный сдвиг). Одно из необходимых условий существования таких функций – они обязаны порождать положительные физические спектральные плотности (СП) $G(\omega)$, т.е. на всех частотах ω должно выполняться

$$G(\omega) \geq 0. \quad (1)$$

Если $G(\omega) < 0$ хотя бы на одной частоте, то исследуемые $B(\tau)$ или $D(\tau)$ уже не принадлежат к классу корреляционных или структурных функций [3–5]. Тем самым ограничивается круг функций, которые могут быть использованы при описании статистических структур случайных процессов. В частности, такая проблема существует при выборе аппроксимирующих корреляционно-структурных зависимостей

экспериментальных данных или на этапе выбора теоретических моделей КФ и СФ при описании статистических характеристик изучаемых физических процессов. Она должна учитываться при использовании для указанных целей составных (кусочно-заданных) функций и сложна, особенно при наличии у исследуемых $B(\tau)$ или $D(\tau)$ разрывов их определения в области τ [1, 3]. Соответствующий анализ в спектральной области сопровождается различными предположениями и характеризуется нестрогими решениями. Так, ряд общепринятых соотношений, связывающих поведение СФ и СП, строго выполняется только при задании $D(\tau)$ не на конечном, а на бесконечном интервале τ (см., например, [6–8]). При этом ускользает, на наш взгляд, возможное наличие в СП осцилляций, обусловленных конечным интервалом существования (задания) СФ.

Затронутые вопросы рассмотрим на примере простейшей степенной составной функции

$$D_{\mu}(\tau) = \begin{cases} C^2 |\tau|^{\mu} = 2\sigma^2 (|\tau|/L_0)^{\mu}, & |\tau| \leq L_0, \\ C^2 L_0^{\mu} = 2\sigma^2, & |\tau| > L_0. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь $L_0 < \infty$ – временной (или пространственный) сдвиг, при котором происходит насыщение $D_{\mu}(\tau)$ до постоянной величины – удвоенной дисперсии исследуемого процесса $2\sigma^2$ [1–5]; C^2 – структурная характеристика соответствующей размерности.

Исследуем возможность использования этой функции для описания стационарных случайных процессов (ССП). Из [3] следует, что указанная $D_{\mu}(\tau)$

* Валерий Александрович Федоров (fva21@iao.ru).

в диапазоне значений $0 < \mu < 2$ принадлежит к классу СФ ССП. Однако весомых аргументов в пользу этого утверждения как в [3], так и в других известных нам работах не приводится. В них просто задается, что $D_\mu(\tau)$ при $\mu = 1$ является СФ ССП, а при $\mu = 2$ — нет. Приведенное в [3] утверждение, видимо, основано на том, что аналогичная степенная функция для указанного диапазона значений μ (кроме $\mu = 1$) при $L_0 \rightarrow \infty$ является СФ случайного процесса со стационарными приращениями (СПСП) [1, 2, 7]. На наш взгляд, вопрос о принадлежности $D_\mu(\tau)$ к классу СФ ССП нуждается в уточнении.

В литературе можно найти достаточно большое количество примеров с оценками СФ $\hat{D}(\tau)$, графики которых визуальны близки к составной функции $D_\mu(\tau)$ вида (2) (см., например, [9–11]). Заметим, что в частотной области такой СФ обычно соответствует спадающая от некоторого *конечного* значения СП с возможной «полочкой» на низких ω . А конечная протяженность этой СФ $D_\mu(\tau)$ должна проявляться на указанном спектре соответствующими осцилляциями с периодом, связанным с длиной L_0 . Похожие СП флуктуаций температуры, например, присутствуют на рис. 25 работы [12], авторы которой относят их к кармановским спектрам [1]. Однако в рамках этой модели нельзя, на наш взгляд, объяснить присутствие в рассматриваемых спектрах достаточно выраженных устойчивых осцилляций, даже несмотря на маскирующее воздействие измерительных шумов. В то же время их наличие соответствует предполагаемой СФ вида (2).

Основная цель настоящей работы — исследование условий принадлежности функции $D_\mu(\tau)$ в форме (2) к классу СФ ССП. Полученные выводы следует подтвердить соответствующими численными расчетами. Также необходимо получить аппроксимационные аналитические выражения для СП $G(\omega)$ с анализом точностных характеристик.

Напомним, что для СПСП с несоставной степенной СФ (т.е. вида (2), но при $L_0 \rightarrow \infty$) существует точное выражение для СП (обозначим как $W(\omega)$) [1, 2]:

$$W(\omega) = \frac{C^2 \mu \Gamma(\mu)}{2\pi\omega^{(\mu+1)}} \sin \frac{\pi\mu}{2}, \quad (3)$$

где μ — показатель степени СФ, $0 < \mu < 2$, $\mu \neq 1$; $\Gamma(\mu)$ — гамма-функция. Целесообразно найти связь между СП ССП $G(\omega)$ и СПСП $W(\omega)$, которые описываются вышеуказанными степенными СФ.

Для решения основной задачи простая проверка условия (1) часто достаточно трудоемка. Целесообразно сформулировать более практичные критерии. Поясним выбор этих критериев на ряде примеров. Отметим, что некоторые из взятых для примеров случаев могут быть использованы при параметризации структурных функций в форме, отличной от (2). Поэтому и проведен их относительно подробный анализ.

Некоторые критерии принадлежности функций $D(\tau)$ к классу СФ ССП

Задача выбора критериев исследована подробнее применительно к корреляционным, нежели к структурным функциям. Во многом это объясняется использованием существующих аналогий между корреляционными и характеристическими функциями (ХФ) [13]. А именно, класс нормированных КФ ССП $R(\tau) = B(\tau)/B(0)$ совпадает с классом ХФ $\Psi(t)$ некоторых случайных величин X с соответствующими функциями распределений $F(x)$ и плотностями вероятностей $p(x)$ [5]. При этом $p(x)$ и $\Psi(t)$ связаны преобразованием Фурье [5, 13], следовательно, аналогом СП ССП $G(\omega)$ является положительная функция $p(x)$. Поэтому результаты, ранее полученные в теории ХФ, можно использовать и применительно к КФ. В [13] сформулированы несколько теоретических критериев принадлежности некоторой кривой к классу ХФ $\Psi(t)$, содержащих необходимые и достаточные условия. Наиболее известен из них критерий Бохнера. Следуя этому критерию, некоторая функция $B(\tau)$ вещественной переменной τ является КФ тогда и только тогда, когда она — положительно-определенная функция [3–5]. При этом кроме соотношения (1) обеспечивается выполнение и других *необходимых* свойств КФ:

$$B(0) > 0, \quad B(\tau) = B(-\tau), \quad |B(\tau)| \leq B(0). \quad (4)$$

Однако практическое использование этого строгого критерия (и похожих других) часто затруднительно. Поэтому применяют более простые оценки, основанные только на достаточных условиях или на известных свойствах спектрально-корреляционных соотношений. В [3–5, 14] были сформулированы соответствующие условиям (1), (4) несектральные критерии существования КФ. Для их записи в терминах СФ необходимо воспользоваться существующими связями между $B(\tau)$ и $D(\tau)$.

Пусть $X(t)$ — вещественный эргодический ССП с нулевым средним. Его КФ $B(\tau)$ и СП $G(\omega)$ связаны известным вариантом преобразования Фурье [1–5]:

$$G(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty B(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau. \quad (5)$$

Также справедливо выражение, связывающее их СФ и КФ: $D(\tau) = 2[B(0) - B(\tau)] = 2\sigma^2 - 2B(\tau)$, где σ^2 — дисперсия $X(t)$. Так как в силу сделанных предположений $D(\infty) = 2B(0) = 2\sigma^2$, то можно записать $B(\tau) = -\tilde{D}(\tau)/2$, где $\tilde{D}(\tau) = D(\tau) - D(\infty)$ — центрированная (относительно $D(\infty)$) СФ. Следовательно, КФ ССП $B(\tau)$ эквивалентна уменьшенной в два раза с отрицательным знаком центрированной СФ $\tilde{D}(\tau)$. Поэтому, наряду с (5), справедливо выражение

$$G(\omega) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \tilde{D}(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau. \quad (6)$$

Соотношения (5), (6) дают, на первый взгляд, наиболее простую возможность ответа на вопрос о принадлежности (или не принадлежности) тестируемых функций $B(\tau)$ к классу корреляционных (или $D(\tau)$ к классу структурных). Однако прямое аналитическое интегрирование (5), (6) с дальнейшей проверкой условия (1) на практике не всегда возможно. Поэтому для КФ были сформулированы вышеупомянутые не спектральные критерии, достаточно полно изложенные в [3–5, 14]. Они основаны на анализе гладкости исследуемой функции $B(\tau)$. Необходимо с учетом вышеприведенных связей между $B(\tau)$ и $\dot{D}(\tau)$ сформулировать аналогичные критерии и для СФ.

Ограничимся случаем низкочастотных ССП, которым предположительно должны соответствовать анализируемые здесь степенные СФ. Отметим, что из (4) вытекает необходимость выполнения следующих условий для СФ ССП $D(\tau)$:

$$D(0) = 0, \quad D(\tau) = D(-\tau), \quad D(\tau) \geq 0, \\ \lim_{\tau \rightarrow \infty} D(\tau) = \text{const.} \quad (7)$$

Аналогично ХФ и КФ [3–5, 13, 14] у кандидатов на роль СФ основное значение играет факт существования (или не существования) второй производной в нуле. Важно также поведение $D''(\tau)$ при всех других τ . Далее, опуская промежуточные рассуждения, с учетом вышеприведенных аналогий между тремя отмеченными функциями представим итоговые оценочные выводы в структурных терминах. Для полноты картины и проверки полученных критериев кроме степенных функций рассмотрим и другие, более сложные функции.

Случай 1. У анализируемой функции $D(\tau)$ существует вторая производная при $\tau = 0$ (при нулевой первой). В зависимости от ее знака возможны два варианта.

Вариант 1. $D'(0) = 0, D''(0) > 0$.

В этом варианте возможны различные комбинации.

1.1. Вторая производная $D''(\tau)$ существует при всех τ . Но производных более высоких порядков на оси τ не существует. Тогда $D(\tau)$ принадлежит к классу СФ дифференцируемого (в среднем квадратичном) ССП [3–5, 14]. Использование на практике таких моделей СФ обосновано, если экспериментальные или теоретические исследования позволяют предположить достаточно сильное убывание СП $G(\omega)$ с ростом частоты быстрее, чем ω^{-3} , но медленнее, чем ω^{-6} . Приведем примеры таких СФ.

$$1.1.1. \quad D(\tau) = \begin{cases} 12\sigma^2 \left[\left(\frac{\tau}{T} \right)^2 - \left(\frac{|\tau|}{T} \right)^3 \right], & 0 \leq |\tau| \leq \frac{T}{2}, \\ 2\sigma^2 \left[1 - 2 \left(1 - \frac{|\tau|}{T} \right)^3 \right], & \frac{T}{2} < |\tau| \leq T, \\ 2\sigma^2, & |\tau| > T. \end{cases}$$

Этой СФ ограниченной длины соответствует быстро спадающая с ростом частоты осциллирующая СП $G(\omega) = \frac{3\sigma^2 T}{8\pi} \left(\frac{\sin \omega T/4}{\omega T/4} \right)^4$, т.е. $G(\omega) \sim \omega^{-4}$, $\omega \rightarrow \infty$.

$$1.1.2. \quad D(\tau) = 2\sigma^2 [1 - (1 + \alpha|\tau|) \cdot \exp(-\alpha|\tau|)], \\ \alpha > 0, \quad -\infty \leq \tau \leq \infty.$$

Этой СФ неограниченной длины соответствует гладкая СП $G(\omega) = \frac{2\sigma^2 \alpha^3}{\pi(\omega^2 + \alpha^2)^2}$ и $G(\omega) \sim \omega^{-4}$, $\omega \rightarrow \infty$.

1.2. На оси τ существуют непрерывные производные $D(\tau)$ до четвертого порядка включительно и $D^{(IV)}(0) < 0$. Тогда эта $D(\tau)$ является СФ дважды дифференцируемого ССП.

Например,

$$D(\tau) = 2\sigma^2 \left\{ 1 - \left[1 + \alpha|\tau| + \frac{(\alpha\tau)^2}{3} \right] \exp(-\alpha|\tau|) \right\}, \\ \alpha > 0, \quad -\infty \leq \tau \leq \infty.$$

Этой СФ соответствует гладкая быстро убывающая с ростом частоты СП $G(\omega) = \frac{8\sigma^2 \alpha^5}{3\pi(\omega^2 + \alpha^2)^3}$.

При этом $G(0) = \frac{8\sigma^2}{3\pi\alpha}$ и $G(\omega) \sim \omega^{-6}$, $\omega \rightarrow \infty$.

1.3. Наконец, можно предположить существование функции $D(\tau)$ с производной любого порядка на оси τ . Тогда такая $D(\tau)$ является СФ дифференцируемого сколько угодно раз ССП. А его СП $G(\omega)$ убывает быстрее любой отрицательной степени частоты ω .

Например,

$$1.3.1. \quad D(\tau) = 2\sigma^2 [1 - \exp(-\alpha^2 \tau^2)], \\ \alpha > 0, \quad -\infty \leq \tau \leq \infty.$$

Этой гауссовой СФ соответствует также гауссова СП $G(\omega) = \sigma^2 \exp(-\omega^2/4\alpha^2)/2\alpha\sqrt{\pi}$.

$$1.3.2. \quad D(\tau) = \frac{2\sigma^2 (\alpha\tau)^2}{1 + (\alpha\tau)^2}, \quad \alpha > 0, \quad -\infty \leq \tau \leq \infty$$

соответствует СП $G(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\alpha} \exp\left(-\frac{|\omega|}{\alpha}\right)$.

1.4. С другой стороны, предположим, что функция $D(\tau)$ не имеет второй непрерывной производной $D''(\tau)$ при некоторых значениях $\tau \neq 0$. Тогда она не может быть СФ. К ней относится исследуемая $D_\mu(\tau)$ при $\mu = 2$. $D_\mu''(0) > 0$ лишь при этом значении μ . Но $D_2^*(\tau = \pm L_0)$ не существует. С другой стороны, из (6) получаем выражение для $G_2(\omega) = C^2(\sin \omega L_0 - \omega L_0 \cos \omega L_0)/\pi\omega^3$. Очевидно, что условие (1) действительно не выполняется. Заметим, что такая квадратичная зависимость неприменима и в качестве СФ СПСП (однако ей часто описывают начальный участок различных составных СФ [1, 2]).

Вариант 2. $D'(0) = 0$, $D''(0) \leq 0$.

Такие $D(\tau)$ однозначно не могут являться СФ ССП [5, 13].

2.1. $D_\mu(\tau)$ в форме (2) при значениях параметра $\mu > 2$.

2.2. При $k > 2$ (частный случай $k = 2$ рассмотрен ранее в пункте 1.3.1)

$$D(\tau) = 2\sigma^2 \{1 - \exp(-|\alpha\tau|^k)\}, \quad \alpha > 0, \quad -\infty \leq \tau \leq \infty. \quad (8)$$

2.3. При $k > 2$ (частный случай $k = 2$ рассмотрен ранее в пункте 1.3.2)

$$D(\tau) = \frac{2\sigma^2 |\alpha\tau|^k}{1 + |\alpha\tau|^k}, \quad \alpha > 0, \quad -\infty \leq \tau \leq \infty. \quad (9)$$

Из представленного материала следует, что в качестве СФ дифференцируемого (один раз и более) ССП можно использовать дважды (и более) дифференцируемые на всей оси τ функции $D(\tau)$, если справедливо $D'(0) = 0$, $D''(\tau) > 0$ и выполняются условия (7). Если же $D''(\tau)$ не существует хотя бы при некоторых значениях $\tau \neq 0$, то $D(\tau)$ уже не может являться структурной. Это справедливо и при $D'(0) = 0$, $D''(\tau) \leq 0$. Отсюда вытекает, что анализируемую составную степенную функцию $D_\mu(\tau)$ в виде (2) при значениях параметра $\mu \geq 2$ нельзя использовать в качестве СФ ССП.

Случай 2. У анализируемой функции $D(\tau)$ не существует второй производной при $\tau = 0$.

Такое отсутствие гладкости $D(\tau)$ в нуле, которую зачастую хорошо видно на графике экспериментальных оценок СФ $\hat{D}(\tau)$, приводит к достаточно медленному убыванию СП $G(\omega)$ при $\omega \rightarrow \infty$. Ожидаемый или реальный частотный спад $G(\omega)$ при увеличении ω медленнее, чем ω^{-3} . В итоге с учетом изложенного в [5, 13, 14] можно говорить лишь о *достаточных* условиях принадлежности $D(\tau)$ к классу СФ *недифференцируемых* ССП.

Достаточный критерий 1 (графический). Если график непрерывной неотрицательной функции $D(\tau)$ на полуоси $0 \leq \tau < \infty$ представляет собой выпуклую кривую (вверх) и выполняются условия (7), то эта функция обязательно представляет собой СФ эргодического недифференцируемого ССП. Здесь мы используем термины и определения работы [5], где непрерывная кривая $y = D(\tau)$ называется выпуклой (вверх), если при любых τ_1 и τ_2 из области изменения τ имеет место неравенство

$$D\left[\frac{\tau_1 + \tau_2}{2}\right] \geq \frac{D(\tau_1) + D(\tau_2)}{2}. \quad (10)$$

Геометрически это означает, что кривая $y = D(\tau)$ на любом интервале $[\tau_1, \tau_2]$ ни в одной точке не может оказаться ниже хорды, соединяющей точки $(\tau_1, D(\tau_1))$ и $(\tau_2, D(\tau_2))$. Этот простой критерий вытекает из известной теоремы Пойа для ХФ или КФ [5, 13]. Важно заметить, что если достаточный критерий (10) (или аналогичный) не выполняется, то это не означает, что функция $D(\tau)$ однозначно

не является СФ ССП. Это означает только то, что кривая $y = D(\tau)$ не является выпуклой и, возможно, для нее сформулированные выше достаточные условия являются избыточными. Тогда необходимо проведение более тщательных аналитических исследований (или прямых вычислений) для проверки выполнения условия (1).

Примером СФ, для которой выполняется условие (10), является анализируемая нами составная функция $D_\mu(\tau)$ (2) при $0 < \mu \leq 1$. К тому же из формулы (6) при $\mu = 1$ следует известное выражение для соответствующей осциллирующей СП [5]: $G_1(\omega) = C^2 \sin^2(\omega L_0/2)/\pi\omega^2$. Отсюда $G_1(0) = C^2 L_0^2/4\pi$ и $G(\omega) \sim \omega^{-2}$, $\omega \rightarrow \infty$ (заметим, что аналогичная функция $D(\tau) = C^2|\tau|$, $-\infty \leq \tau \leq \infty$ не рассматривается в качестве СФ СПСП [1]).

Для этой же функции $D_\mu(\tau)$ при $1 < \mu < 2$ условие (10) не выполняется. К тому же на интервале $(0; L_0)$ она является строго вогнутой кривой. Поэтому вопрос о принадлежности $D_\mu(\tau)$ к классу СФ ССП при этих μ пока оставим открытым.

Наряду с условием (10) возможно использование других простых эквивалентных критериев принадлежности $D(\tau)$ к классу выпуклых функций [5, 15]. Так, это относится к случаю, когда на открытом интервале $(0; \infty)$ существует вторая производная $D''(\tau)$. Тогда выпуклость кривой $y = D(\tau)$ на полуоси $(0; \infty)$ эквивалентна выполнению требования

$$D''(\tau) \leq 0 \quad (11)$$

при всех $\tau > 0$. Отсюда следует формулировка второго критерия.

Достаточный критерий 2. Если $D''(0)$ не существует, но выполняется условие (11) с дополнительными условиями (7), то $D(\tau)$ обязательно является СФ недифференцируемого ССП.

В качестве примера вновь рассмотрим функцию $D(\tau)$ в форме (8), но уже при значениях параметра $0 < k < 2$. Ее дифференциальные свойства несколько различны в соседних диапазонах $0 < k \leq 1$ и $1 < k < 2$. В первом диапазоне у нее не существует $D''(0)$ и $D''(\tau) < 0$ при всех $\tau > 0$. Поэтому при $0 < k \leq 1$ эта функция является СФ недифференцируемого ССП. В частности, при $k = 1$ СФ $D(\tau) = 2\sigma^2\{1 - \exp(-\alpha|\tau|)\}$ соответствует СП $G(\omega) = \sigma^2\alpha/[\pi(\omega^2 + \alpha^2)]$. Для $1 < k < 2$ вторая производная $D''(0)$ также не существует, но неравенство (11) выполняется уже не при всех $\tau > 0$. Однако это означает всего лишь, что $D(\tau)$ не является выпуклой функцией на полуоси $(0, \infty)$. Более строгие рассуждения, основанные на аналогии нормированных КФ $R(\tau)$ с классом характеристических функций $\Psi(t)$ и результатах, изложенных в [5, 13], позволяют сделать вывод о том, что анализируемая $D(\tau)$ при $1 < k < 2$ также является СФ ССП.

Аналогичными свойствами обладает семейство функций (9) при значениях параметра k в диапазонах $0 < k \leq 1$ и $1 < k < 2$. Причем при рассмотрении

второго интервала k можно использовать результаты, изложенные в [13] для $\Psi(t) = 1/(1+|t|^k)$.

Еще одним примером СФ, когда $D''(0)$ не существует, а неравенство (11) выполняется не при всех $\tau > 0$, является $D(\tau) = 2\sigma^2[1 - (1 - \alpha|\tau|) \times \exp(-\alpha|\tau|)]$, $\alpha > 0$, $-\infty \leq \tau \leq \infty$. Такой СФ соответствует гладкая СП $G(\omega) = 2\sigma^2\alpha\omega^2/[\pi(\omega^2 + \alpha^2)^2]$.

Итак, два рассмотренных выше достаточных критерия принадлежности анализируемых функций $D(\tau)$ к классу СФ СП просты и при выполнении однозначны. Однако при их невыполнении однозначный ответ о принадлежности (или не принадлежности) $D(\tau)$ к классу СФ затруднителен. Так, анализируемая функция $D_\mu(\tau)$ (формула (2)) при $0 < \mu \leq 1$ вследствие выполнения условия (10) однозначно является СФ СП. Но для $1 < \mu < 2$ критерий (10) не выполняется и вопрос остается открытым. Отсюда вытекает необходимость проверки исходного критерия (1). Но в этом случае результат аналитического интегрирования (6) для $G(\omega)$ не выражается в элементарных функциях и сложен для анализа. Поэтому целесообразно проведение соответствующих численных расчетов.

Вычисление СП СП для СФ $D_\mu(\tau)$

Непосредственно из (6) следует выражение для СП $G(\omega)$, порождаемое СФ $D_\mu(\tau)$:

$$G(\omega) = \frac{C^2}{2\pi} \left\{ \frac{L_0^\mu \sin \beta_0}{\omega} - \int_0^{L_0} \tau^\mu \cos(\omega\tau) d\tau \right\}, \quad (12)$$

где $\beta_0 = \omega L_0$ — безразмерный параметр. При интегрировании второго члена по частям получаем эквивалентное соотношение с использованием первой производной $D_\mu(\tau)$:

$$G(\omega) = \frac{C^2 \mu}{2\pi\omega} \int_0^{L_0} \tau^{\mu-1} \sin(\omega\tau) d\tau. \quad (13)$$

Формулы (12), (13) справедливы при $0 < \mu \leq 2$. Так, для $\mu = 1$ при использовании любой из них получаем ранее приведенное при описании достаточного критерия 1 выражение для СП $G_1(\omega)$, а для $\mu = 2$ — функцию $G_2(\omega)$ пункта 1.4.

Сравним (13) с ранее приведенным в [7] соотношением (4) для спектрального вклада $W_{0,1}(\omega)$ начального участка степенной СФ СПСП при $0 < \mu < 1$. Заметим, что СФ СПСП $D_\mu(\tau)$ на положительном участке $0 \leq \tau \leq L_0$ совпадает с аналогичной степенной СФ СПСП, заданной на всей полуоси $0 \leq \tau \leq \infty$ (обозначим ее как $D_{\mu,\infty}(\tau)$). При этом последняя не является составной функцией. Тогда можно сделать вывод о том, что значения СП СПСП $G(\omega)$ с насыщающейся СФ $D_\mu(\tau)$ соответствуют величине спектрального вклада $W_{0,1}(\omega)$ в СП СПСП $W(\omega)$ начального участка СФ $D_{\mu,\infty}(\tau)$ от $\tau = 0$ до L_0 . Иными словами, для $0 < \mu < 1$ справедливо:

$$G(\omega) = W_{0,1}(\omega) \quad (14)$$

при $\tau_1 = L_0$. Следовательно, представленные в [7] частотные зависимости указанных спектральных вкладов можно одновременно считать графиками соответствующих СП СПСП $G(f)$ с СФ $D_\mu(\tau)$ при $\mu = 0,01$ и $0,99$ с «временами» насыщения $L_0 = 10$ и 100 с. Поэтому, с учетом замены τ_1 на L_0 , справедливы и все сделанные в [7] замечания относительно свойств этих частотных зависимостей. Так, в отличие от безграничного увеличения $W(\omega)$ при стремлении ω к нулю, величина СП $G(\omega)$ на нулевой частоте является конечной и определяется значениями параметров L_0 и μ . С ростом ω примерно после превышения уровня $\omega \approx (1-3)\pi/2L_0$ рад/с частотная зависимость $G(\omega)$ в среднем начинает соответствовать изменению (спаду) $W(\omega) \sim \omega^{-(\mu+1)}$. Но по сравнению с монотонным спадающим степенным спектром $W(\omega)$ в $G(\omega)$ наблюдается его модуляция некоторыми положительными квазипериодическими функциями (подробнее это рассмотрено ниже).

С использованием выражений (12), (13) и алгоритмов высокоточного численного интегрирования быстро осциллирующих функций, описанных в [7, 16], были вычислены значения $G(\omega)$ для $1 < \mu < 2$. Оказалось, что эта функция содержит отрицательные значения, т.е. не выполняется необходимое условие (1) существования СФ. Поэтому для указанных значений μ функция $D_\mu(\tau)$ не является структурной (в отличие от СПСП) и $G(\omega)$ не является спектральной плотностью. При этом наблюдается модуляция гладкого степенного хода $W(\omega)$ уже знакопеременными квазипериодическими функциями.

На рис. 1 в терминах циклических частот приведены нормированные на C^2 значения СП СПСП $W(f)$, порождаемые степенной СФ $D_{\mu,\infty}(\tau)$ при $\mu = 1,5$. Там же показан знакопеременный осциллирующий характер соответствующей функции $G(f)$ при $L_0 = 100$ с. Несмотря на отмеченное, изучение интервала $1 < \mu \leq 2$ целесообразно из-за применения на практике моделей составных СФ, отдельные

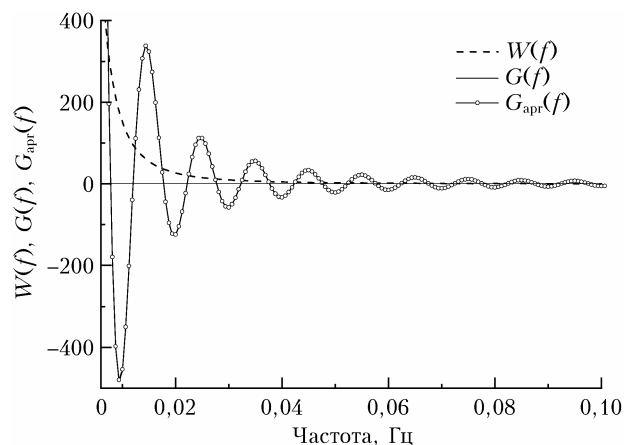


Рис. 1. Положительная спектральная плотность СПСП $W(f)$ и знакопеременная функция $G(f)$ для $L_0 = 100$ с и ее аппроксимация $G_{\text{аппр}}(f)$; $\mu = 1,5$

участки которых представляются СФ со значениями параметра μ из этого диапазона [1, 2].

Также было выявлено, что с ростом частоты скорость спада модуля $G(\omega)$ практически не зависит от величины μ , а приближается к обратно пропорциональной частотной квадратичной зависимости. Это верно для всего диапазона $1 < \mu < 2$. Следовательно, асимптотическое поведение $G(\omega)$ не соответствует частотному спаду СП $W(\omega)$. Можно записать

$$G(\omega) = O(\omega^{-2}), \quad \omega \rightarrow \infty. \quad (15)$$

Учитывая равенство (14) и используя ранее приведенные в [7] результаты для $W_{0,1}(\omega)$ при $0 < \mu < 1$, получаем простые и точные аналитические аппроксимационные зависимости поведения $G(\omega)$ на всем частотном интервале от $\omega = 0$ до $\omega = \infty$:

$$G(\omega) \approx G_{\text{appr}}(\omega) = \begin{cases} \frac{C^2 \mu L_0^{\mu+1}}{2\pi} \left\{ \frac{1}{\mu+1} - \frac{(\omega L_0)^2}{6(\mu+3)} + \frac{(\omega L_0)^4}{120(\mu+5)} \right\}, & \omega \leq \omega_b, \\ W(\omega) - \frac{C^2 \mu L_0^{\mu-1}}{2\pi \omega^2} \left\{ \cos \omega L_0 - \frac{(\mu-1)}{\omega L_0} \sin \omega L_0 \right\}, & \omega > \omega_b. \end{cases} \quad (16)$$

Верхнее соотношение описывает поведение положительной плоской части кривой $G(\omega)$ вблизи нулевых частот, а нижнее — поведение ее спадающей части при увеличении ω . Значения граничных частот ω_b , зависящие от величин L_0 , μ и определяемые из обеспечения минимальных «переходных» ошибок между двумя областями аппроксимации, приведены в [7]. Как следует из вышеизложенного, выражение (16) справедливо и для $1 < \mu \leq 2$. Дополняя результаты [7] исследованиями для этого диапазона μ , рекомендуем следующий выбор $\omega_b = 2\pi f_b$:

$$f_b = \begin{cases} f_{b0} + 7/64L_0, & 0 < \mu \leq 0,1; \\ f_{b0} + 6/64L_0, & 0,1 < \mu \leq 0,5; \\ f_{b0} + 5/64L_0, & 0,5 < \mu \leq 0,75; \\ f_{b0} + 3/64L_0, & 0,75 < \mu \leq 0,9; \\ f_{b0}, & 0,9 < \mu < 1,1; \quad \mu \neq 1; \\ f_{b0} + 3/64L_0, & 1,1 \leq \mu < 1,25; \\ f_{b0} + 5/64L_0, & 1,25 \leq \mu < 1,33; \\ f_{b0} + 4/64L_0, & 1,33 \leq \mu < 1,5; \\ f_{b0} + 3/64L_0, & 1,5 \leq \mu \leq 1,75; \\ f_{b0}, & 1,75 < \mu < 2, \end{cases} \quad (17)$$

$f_{b0} = 1/4L_0$. Заметим, что частный случай нижнего соотношения в (16) при $\mu = 1$ тождественен ранее приведенному точному аналитическому выражению для СП $G_1(\omega)$, справедливому на всем частотном интервале от $\omega = 0$ до ∞ (при этом использовалось формальное следствие из (3), что $W(\omega) = C^2/2\pi\omega^2$). А при $\mu = 2$ оно совпадает с точным выражением для $G_2(\omega)$ пункта 1.4. Формально из (3) следует, что $W(\omega) = 0$ для всех ω при $\mu = 2$.

При анализе точностных характеристик соотношений (16) значения $G(\omega)$, рассчитанные по точным интегральным соотношениям (12), (13), сравнивались с результатами вычислений $G_{\text{appr}}(\omega)$ при широком разбросе входных параметров. Так, величина μ изменялась от 0,01 до 2, а «время» насыщения L_0 варьировалось в диапазоне от 0,01 до 10000 с. В качестве меры точности аппроксимации $G(\omega)$ функцией $G_{\text{appr}}(\omega)$ использовалась как их разность $d(\omega) = G_{\text{appr}}(\omega) - G(\omega)$, так и относительная процентная ошибка $\varepsilon(\omega) = [d(\omega)/G(\omega)] \cdot 100\%$. Для исключения неверной интерпретации результатов ввиду возможного резкого изменения непрерывной $\varepsilon(\omega)$ шаг всех расчетов в циклических частотах уменьшался до $\Delta f = 1/(64L_0)$ Гц.

Для $0 < \mu < 1$ точностные характеристики $G_{\text{appr}}(\omega)$ с учетом (14) фактически проанализированы в [7], откуда следует, что лишь вблизи частоты $2\omega_{b0} = 4\pi f_{b0} = \pi/L_0$ ошибка является достаточно большой (по абсолютной величине) по сравнению с ошибками в других интервалах частот. Причем наибольшие значения $|\varepsilon(\omega)|$ наблюдаются при $\mu = 0,01$. Однако величины этих ошибок незначительны и не превышают 2%. На остальной части частотного диапазона при удалении от $2\omega_{b0}$ величиной $|\varepsilon(\omega)|$ вообще можно пренебречь из-за ее крайней малости (десятые и менее доли процента). Также при фиксированном значении μ изменение величины L_0 приводит только к соответствующему сдвигу и масштабированию хода $\varepsilon(\omega)$ на оси частот.

Для интервала $1 < \mu < 2$ характер поведения ошибок аппроксимации $\varepsilon(\omega)$ более сложен. Это объясняется тем, что в этом случае, в отличие от $0 < \mu < 1$, аппроксимируемая функция $G(\omega)$ изначально является знакопеременной. При этом в переходной зоне вблизи $\omega \approx 2\omega_{b0}$ наблюдается ожидаемый локальный максимум $|\varepsilon(\omega)|$. Но, в отличие от предыдущего случая, он не является главным. Существенно большие величины $|\varepsilon(\omega)|$ могут появляться в области частот, где значения $G(\omega)$ меняют знак, т.е. близки к нулю. При этом абсолютная разность между $G(\omega)$ и $G_{\text{appr}}(\omega)$ может быть совсем незначительной.

Вышеизложенное в терминах циклических частот для $\mu = 1,5$ отражено на рис. 2. Видно, что значения $|\varepsilon(f)|$ резко увеличиваются вблизи малых значений $G(f)$. Не надо забывать и о всегда присутствующих ошибках численного интегрирования, особенно проявляющихся при малых значениях искомых величин. Подобные кривые характеризуют поведение абсолютных и относительных ошибок аппроксимации функции $G(f)$ для всех $1 < \mu < 2$ и для всех возможных значений L_0 с учетом изменения соответствующих частотных масштабов. Отмеченные резкие увеличения $|\varepsilon(f)|$ наблюдаются на чрезвычайно малых частотных интервалах при почти нулевых значениях аппроксимируемой функции и, следовательно, не приводят к значимым отклонениям хода $G_{\text{appr}}(f)$ от $G(f)$. Это хорошо видно на рис. 1, где показано поведение $G(f)$ и $G_{\text{appr}}(f)$.

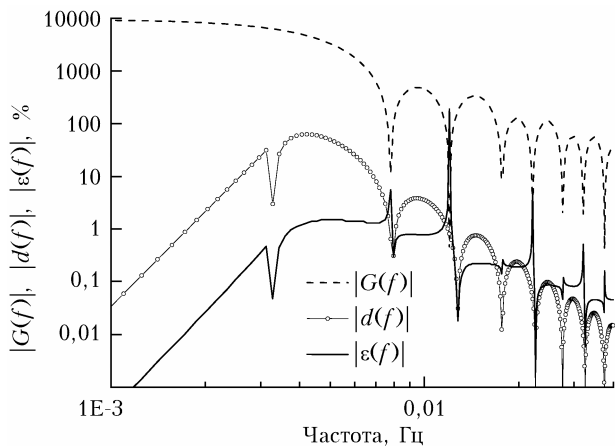


Рис. 2. Модули $G(f)$, $d(f)$ и $\varepsilon(f)$ при аппроксимации $G(f)$ функциями $G_{\text{appr}}(f)$ при $\mu = 1,5$, $L_0 = 100$ с, $\Delta f = 1/(64L_0)$ Гц

Вышеизложенное позволяет сделать вывод о том, что полученные аналитические соотношения для $G_{\text{appr}}(\omega)$ (16), (17) с высокой точностью описывают поведение $G(\omega)$ при $0 < \mu < 2$ во всем частотном диапазоне ω и для всех значимых на практике L_0 . Из них следуют дополнительные доказательства положительного и знакопеременного поведения $G(\omega)$ при различных значениях μ , а также верности отмеченных асимптотических свойств. Из (16) следует, что функцию $G(\omega)$ при $\omega > \omega_b$ можно достаточно точно представить суммой трех монотонных степенных компонент $\omega^{-(\mu+1)}$, ω^{-2} , ω^{-3} с соответствующими взвешивающими коэффициентами A_1 , $A_2(\omega)$, $A_3(\omega)$. Причем A_1 зависит только от величины параметра μ и всегда строго положителен. В свою очередь, $A_2(\omega)$, $A_3(\omega)$ частотно зависимы и имеют знакопеременный, осциллирующий характер. При $0 < \mu < 1$ превалирует положительная первая компонента со средним спадом $\omega^{-(\mu+1)}$. При $1 < \mu < 2$ превалирует знакопеременная вторая компонента со средним спадом ω^{-2} , т.е. выполняется выражение (15).

Нижнее соотношение в (16) также можно представить в мультипликативном виде

$$G(\omega) \approx G_{\text{appr}}(\omega) = W(\omega)g(\omega),$$

где

$$g(\omega) = 1 - \frac{(\omega L_0)^{\mu-1}}{\Gamma(\mu) \sin(\pi\mu/2)} \left\{ \cos \omega L_0 - \frac{(\mu-1)}{\omega L_0} \sin \omega L_0 \right\}$$

– модулирующая спектральная функция; спектр $W(\omega)$ задается формулой (3). Заметим, что при $\mu = 1$ имеет место равенство $g(\omega) = 1 - \cos \omega L_0$, т.е. эта функция изменяется от нуля до двух.

Можно сказать, что наблюдается мультипликативное взвешивание степенного монотонного частотного хода $\omega^{-(\mu+1)}$ соответствующими аддитивно-мультипликативными комбинациями периодических и степенных функций. Причем общий период результирующих осцилляций определяется L_0 , а их амплитуда и знак – μ .

При малых μ значения $g(\omega)$ близки к единице. Поэтому и $G(\omega)$ в своей спадающей части (особенно при $\omega \gg \omega_b$) незначительно отличается от положительных значений $W(\omega)$. Это хорошо демонстрирует рис. 1 в [7] при учете равенства (14).

С ростом μ амплитуды рассматриваемых осцилляций относительно единицы увеличиваются, минимальные значения $g(\omega)$ постепенно приближаются сначала к нулевым, а затем и к отрицательным значениям. Отмеченное происходит вблизи $\mu = 1$. При этом исходное выражение для $g(\omega)$ можно заменить на более простое: $g(\omega) \approx 1 - \mu \cos \omega L_0$. Оно показывает, что при $\mu < 1$ значения $g(\omega)$ всегда строго положительны, при $\mu = 1$ встречаются нулевые значения $g(\omega)$, а при $\mu > 1$ – отрицательные. Следовательно, также ведут себя и значения $G(\omega)$. Эта ситуация хорошо видна на рис. 3, где приведены отдельные фрагменты этих зависимостей на одном и том же участке частотного интервала. Дальнейший рост μ сопровождается существенным увеличением амплитуды отрицательных лепестков модулирующей функции, особенно вблизи $\mu = 2$. На рис. 4 для сравнения показаны небольшие положительные (около единицы) значения $g(f)$ при $\mu = 2/3$ и большие знакопеременные при $\mu = 1,50$.

Заключение

Сформулированы простые условия принадлежности функций к классу структурных для стационарных случайных процессов. Показано, что составная степенная функция $D_{\mu}(\tau)$ вида (2) является СФ недифференцируемого ССП лишь для $0 < \mu \leq 1$. Отмечается, что значения СП $G(\omega)$, порождаемые этой СФ, соответствуют спектральному вкладу $W_{0,1}(\omega)$ в СП $W(\omega)$ начального участка подобной «бесконечной» СФ случайного процесса со стационарными приращениями $D_{\mu, \infty}(\tau)$ от $\tau = 0$ до L_0 , т.е. справедливо выражение (14). При этом частотная зависимость СП $G(\omega)$ усложняется относительно $W(\omega)$. В отличие от $W(\omega)$ величина $G(\omega)$ на нулевой частоте является конечной и определяется значениями параметров L_0 и μ . С ростом ω частотная зависимость $G(\omega)$ в среднем начинает соответствовать изменению (спаду) $W(\omega)$. Наблюдается модуляция монотонного степенного хода $W(\omega)$ некоторыми положительными квазипериодическими функциями. Их колебательный характер определяется L_0 и μ . Причем амплитуда осцилляций $G(\omega)$ относительно $W(\omega)$ увеличивается с ростом параметра μ . Так, при $\mu = 1$ коэффициент модуляции изменяется от нуля до двух. В целом для интервала $0 < \mu \leq 1$ выполняется $G(\omega) = O(\omega^{-(\mu+1)})$, $\omega \rightarrow \infty$. Поэтому средняя скорость частотного спада данной СП ССП $G(\omega)$ соответствует скорости спада СП ССП $W(\omega)$.

При $1 < \mu \leq 2$ преобразование (6) для $G(\omega)$ содержит отрицательные значения, т.е. не выполняется необходимое условие (1) существования СФ. Следовательно, для этих значений μ функция $D_{\mu}(\tau)$

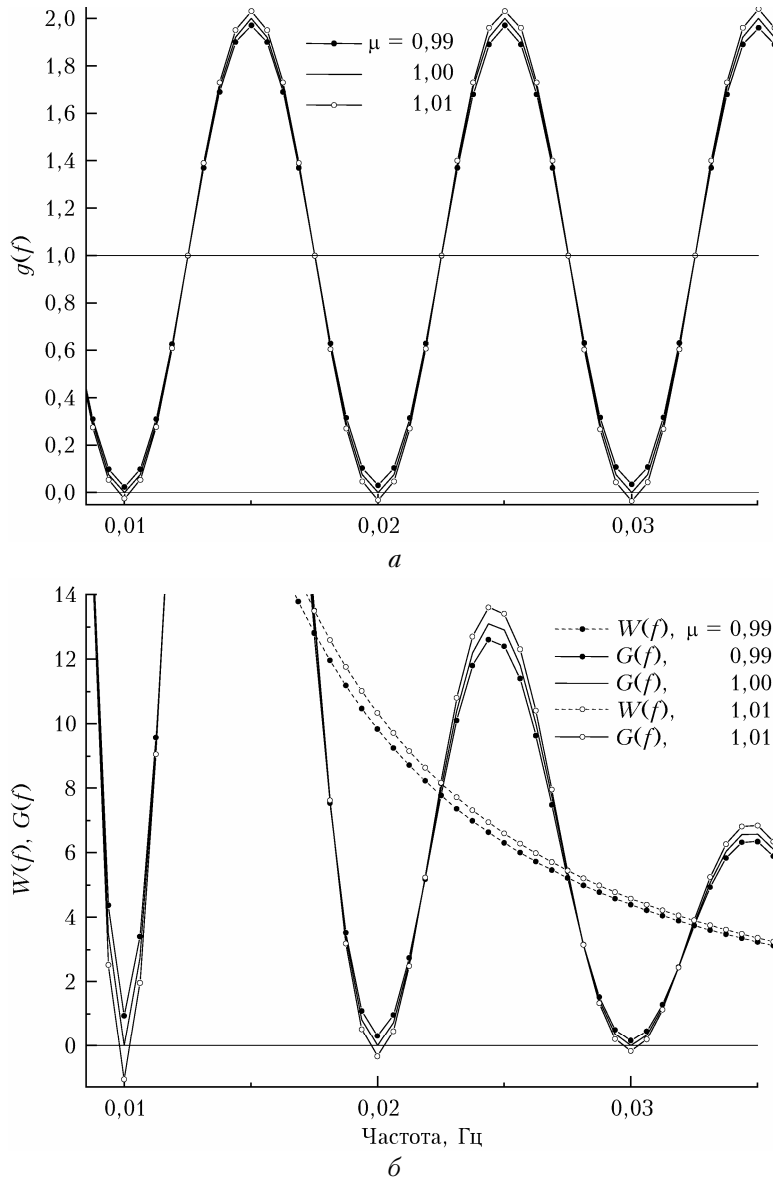


Рис. 3. Модулирующая спектральная функция $g(f)$ для $L_0 = 100$ с и $\mu = 0,99; 1,00$ и $1,01$ (а); значения СП СПСП $W(f)$ и ССП $G(f)$ для $\mu = 0,99$ и $1,00$ и функции $G(f)$ для $\mu = 1,01$; $L_0 = 100$ с (б)

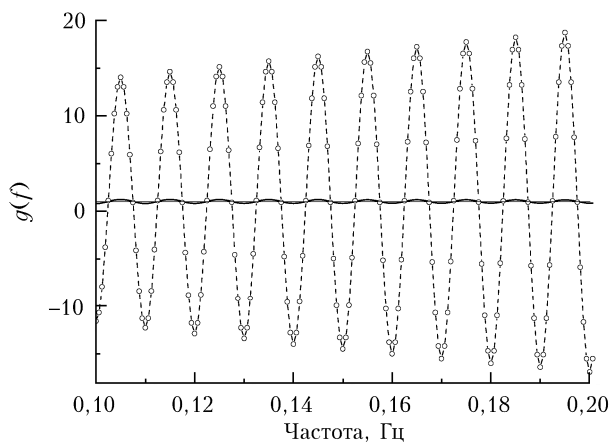


Рис. 4. Модулирующая спектральная функция $g(f)$ для $\mu = 2/3$ (сплошная кривая) и $1,5$ (пунктирная кривая); $L_0 = 100$ с

не является структурной (в отличие от СПСП). При этом в $G(\omega)$ наблюдается модуляция степенного хода $W(\omega)$ уже знакопеременными квазипериодическими функциями. Их колебательный характер, так же как и при $0 < \mu \leq 1$, определяется L_0 и μ . Амплитуда осцилляций функции $G(\omega)$ относительно СП СПСП $W(\omega)$ продолжает увеличиваться с ростом параметра μ , особенно резко вблизи $\mu = 2$. С ростом частоты скорость спада модуля $G(\omega)$ практически не зависит от μ , а приближается к обратно пропорциональной частотной квадратичной зависимости (15).

Получены простые аппроксимационные зависимости $G_{\text{arg}}(\omega)$ поведения $G(\omega)$ на всем частотном интервале от $\omega = 0$ до ∞ и при всех возможных значениях $0 < \mu \leq 2$ и L_0 . При этом их частные случаи для $\mu = 1$ и 2 тождественны соответствующим точ-

ным аналитическим выражениям. Показаны связь СП ССП $G(\omega)$ и СПСП $W(\omega)$ в аддитивном и мультипликативном виде, а также высокая точность $G_{\text{арт}}(\omega)$ при описании частотного хода $G(\omega)$ при всех других возможных значениях μ и L_0 . Они подтверждают полученные численными методами выводы об асимптотическом поведении $G(\omega)$. Эти аппроксимационные спектральные зависимости рекомендуются для широкого применения. Возможно, их отсутствие было ранее сдерживающим фактором для практического использования составных СФ $D_\mu(\tau)$ вида (2) в отличие от аналогичных степенных СФ СПСП $D_{\mu,\infty}(\tau)$, заданных на всей оси τ и обладающих известными простыми спектральными зависимостями вида (3).

Подводя итог, необходимо отметить, что проанализированная составная СФ вида (2), включающая только два интервала: от 0 до L_0 и от L_0 до ∞ , является упрощенным вариантом более сложной составной степенной СФ. В реальных условиях таких участков может быть больше. Определенный интерес представляет оценка влияния количества и «размеров» этих интервалов в составных СФ на формирование спектральных плотностей, исследуемых стационарных случайных процессов. В последующих публикациях планируется изложить результаты, полученные при решении сформулированной задачи.

Наконец, заметим, что в принципе функция $D_\mu(\tau)$ в форме (2) может быть основой для формирования некоторого семейства составных СФ ограниченной длины L_0 , описывающих стационарные случайные процессы с различными дифференциальными свойствами. Иногда последнее необходимо учитывать при рассмотрении некоторых задач, в том числе при выборе аппроксимирующих СФ [3]. При этом спектральная плотность будет характеризоваться соответствующими осцилляциями и прогнозируемым частотным спадом при увеличении ω . Как следует из вышеизложенного, для этого в первую очередь необходимо обеспечить наличие у сконструированной СФ соответствующих производных при $\tau = 0$ и далее на всей оси τ , вплоть до L_0 . Однако решение этой задачи нетривиально. В качестве простейшего примера можно привести «трехсоставную» структурную функцию пункта 1.1.1, состоящую из комбинаций нескольких степенных функций.

1. Татарский В.И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. М.: Наука, 1967. 548 с.
2. Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику. Часть II. Случайные поля. М.: Наука, 1978. 464 с.
3. Гандин Л.С., Каган Р.Л. Статистические методы интерпретации метеорологических данных. Л.: Гидрометеоиздат, 1976. 359 с.

4. Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику. Часть I. Случайные процессы. М.: Наука, 1976. 496 с.
5. Яглом А.М. Корреляционная теория стационарных случайных функций. Л.: Гидрометеоиздат, 1981. 280 с.
6. Юшков В.П. Структурная функция энтропии и масштабы турбулентности // Вестн. МГУ. Физика. Астрономия. 2012. № 4. С. 62–68.
7. Федоров В.А. Спектральные вклады участков степенной структурной функции случайных процессов со стационарными приращениями. Часть 1. Показатель степени меньше единицы // Оптика атмосфер. и океана. 2018. Т. 31, № 12. С. 955–961; Fedorov V.A. Spectral contributions of sections of the power-law structure function of random processes with stationary increments: Part 1 – The exponent is less than unity // Atmos. Ocean. Opt. 2019. V. 32, N 3. P. 235–241.
8. Федоров В.А. Спектральные вклады участков степенной структурной функции случайных процессов со стационарными приращениями. Часть 2. Показатель степени больше единицы // Оптика атмосфер. и океана. 2019. Т. 32, № 1. С. 5–10; Fedorov V.A. Spectral contributions of sections of the power-law structure function of random processes with stationary increments: Part 2 – The exponent is greater than unity // Atmos. Ocean. Opt. 2019. V. 32, N 3. P. 242–247.
9. Shapland T.M., McElron A.J., Snyder R.L., Paw U.K.T. Structure function analysis of two-scale scalar ramps. Part II: Ramp characteristics and surface renewal flux estimation // Bound.-Lay. Meteorol. 2012. V. 145, N 1. P. 27–44.
10. Гладких В.А., Невзорова И.В., Одинцов С.Л., Федоров В.А. Структурные функции температуры воздуха над неоднородной подстилающей поверхностью. Часть II. Статистика параметров структурных функций // Оптика атмосфер. и океана. 2013. Т. 26, № 11. С. 955–963; Gladkikh V.A., Nevzorova I.V., Odintsov S.L., Fedorov V.A. Structure functions of air temperature over an inhomogeneous underlying surface. Part II. Statistics of structure functions' parameters // Atmos. Ocean. Opt. 2014. V. 27, N 2. P. 154–163.
11. Гладких В.А., Невзорова И.В., Одинцов С.Л., Федоров В.А. Структурные функции компонент вектора ветра над неоднородной подстилающей поверхностью // Оптика атмосфер. и океана. 2014. Т. 27, № 10. С. 882–890; Gladkikh V.A., Nevzorova I.V., Odintsov S.L., Fedorov V.A. Structure functions of wind velocity components over an inhomogeneous underlying surface // Atmos. Ocean. Opt. 2015. V. 28, N 3. P. 273–281.
12. Носов В.В., Емалеев О.Н., Лукин В.П., Носов Е.В. Полуэмпирические гипотезы теории турбулентности в анизотропном пограничном слое // Оптика атмосфер. и океана. 2005. Т. 18, № 10. С. 845–863.
13. Лукач Е. Характеристические функции. М.: Наука, 1979. 424 с.
14. Тихонов В.И. Выбросы случайных процессов. М.: Наука, 1970. 392 с.
15. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том I. М.: Наука, 1969. 608 с.
16. Бартењева О.В. Фортран для профессионалов. Математическая библиотека IMSL. М.: Диалог-МИФИ, 2001. Ч. 3. 368 с.

V.A. Fedorov. Spectral density of stationary random processes with a power structure function.

The conditions for a function to fall in the class of structure functions for stationary random processes are formulated. In the spatial domain, this corresponds to a homogeneous and isotropic scalar field. It is shown that the power function can be a structure function only if the power index is no larger than unity. The relation of spectral densities of stationary and random processes to stationary increments is demonstrated. The oscillating character of the behavior of spectral density of stationary processes is shown. Analytical equations are derived for their description with the analysis of accuracy characteristics. They are recommended for wide practical application.