

## Выделение особенностей поля яркости в мутной среде на основе малоугловых решений теории переноса

В.П. Будак<sup>1</sup>, Я.А. Илюшин<sup>2\*</sup>

<sup>1</sup>Московский энергетический институт (ТУ)  
111250, г. Москва, ул. Красноказарменная, 14

<sup>2</sup>МГУ им. М.В. Ломоносова  
119992, г. Москва, Ленинские горы, ГСП-2

Поступила в редакцию 1.07.2010 г.

Предлагается новый, улучшенный подход к вычислению анизотропной части диффузного светового поля в мутной среде. Обсуждаются примеры применения к конкретным задачам теории переноса излучения, показывающие точность и гибкость предлагаемого подхода на практике.

*Ключевые слова:* уравнение переноса излучения, малоугловое приближение, дисперсия путей рассеянных фотонов; radiative transfer equation, small angle approximation, photon path distribution function.

### Введение

Световой луч в действительности является основным объектом теории переноса излучения, впервые феноменологически сформулированной Schwolson [1] на основе представлений лучевой (геометрической) оптики. Последующие попытки строгого вывода теории переноса излучения из основных принципов классической электродинамики [2, 3] фактически привели к подтверждению этого положения. Таким образом, элементарным инфинитезимальным решением уравнения переноса излучения (УПИ) является луч, представляющий собой сингулярную (особенную) функцию пространственных и угловых переменных. Это значит, что пространственные и угловые особенности сохраняются в решении уравнения переноса излучения, если они присутствуют в начальной конфигурации источников света, порождающих световое поле в мутной среде.

Для корректного учета этого факта с математической точки зрения решение УПИ требуется искать среди обобщенных функций.

На практике часто удается выделить некоторую часть решения, содержащую в себе особенности, в форме замкнутого аналитического выражения [4]. После этого оставшаяся (регулярная) часть решения, не содержащая обобщенных функций и особенностей, может быть найдена в дискретизованном виде с помощью какого-либо численного алгоритма.

Это особенно важно при наличии в среде сильно анизотропного рассеяния, возникающие при котором трудности хорошо известны [5]. Дискретизация УПИ методом дискретных ординат (ДО), сфери-

ческих гармоник (СГ) или другими методами в этом случае приводит к бесконечной системе дифференциальных уравнений. Удачное выделение особенной части из общего решения задачи позволяет сделать такую систему конечной, что дает возможность численного решения задачи в целом. В современных приложениях теории переноса [6], предъявляющих все возрастающие требования к точности численного расчета, регуляризация особенностей решения УПИ является ключевым фактором, фактически определяющим возможность успешного решения проблемы.

В простейшей классической задаче об однородном плоском слое мутной среды, освещенном однородным потоком параллельных коллимированных лучей, особенной частью светового поля является нерассеянная (ослабленная) часть падающего потока. Чандрасекар [7] выделил эту часть излучения в виде отдельного слагаемого в решении УПИ и исследовал нахождение остальной части решения методом дискретных ординат на основе квадратурных формул Гаусса. Романова [8] и Irvine [9] вместе с нерассеянным потоком излучения выделили в отдельное слагаемое в решении также часть излучения, рассеянного на малые углы, на основе малоуглового приближения (МУП), сформулированного Goudsmit и Saunderson [10].

Предлагались также и другие варианты аналитических выражений для сингулярных частей светового поля, в частности однократно рассеянное излучение [11], рассеянное вперед излучение в приближении Кирхгофа на сферах эквивалентного радиуса [12] и т.д.

В работе [13] в рамках малоугловой модификации метода сферических гармоник получен ряд приближенных выражений для анизотропной части светового поля вместе с особенностями как для плоскослойной, так и для сферической геометрии. Полученные

\* Владимир Павлович Будак (BudakVP@mpei.ru); Ярослав Александрович Илюшин (ilyushin@physics.msu.ru).

выражения включают в себя все особенности светового поля и удовлетворительно описывают распределение яркости почти во всей передней полусфере.

Дальнейшее продвижение по указанному пути серьезно ограничено тем обстоятельством, что все перечисленные приближенные выражения для особенной части поля яркости принципиально пренебрегают дисперсией длин путей распространения рассеянного излучения в мутной среде. На больших оптических толщинах это приводит к значительным расхождениям приближенных решений с точным. Кроме того, в этих решениях отсутствуют многие физические эффекты, наблюдаемые в эксперименте, в том числе поворот тела яркости с глубиной [14], ряд поляризационных эффектов и т.д.

Поскольку указанные приемы выделения особенностей светового поля тесно связаны с решением УПИ в малоугловом приближении, кратко остановимся на основных результатах в этой области. Малоугловое приближение в теории рассеяния было впервые применено Wentzel в работе [15], в которой траектории многократно рассеянных на малые углы частиц приближенно заменены прямыми и тем самым получено приближенное решение. Bothe [16] применил некоторые преобразования интегрального слагаемого УПИ и показал, что угловое распределение яркости приближенно можно считать гауссовым. Goudsmit и Saunderson [10] использовали разложение углового распределения яркости по сферическим гармоникам и получили хорошо известное решение УПИ в замкнутой аналитической форме, многократно использованное различными исследователями в дальнейшем. Компанец [17] и другие авторы локально аппроксимировали сферу направлений касательной плоскостью и получили решение в форме многомерной свертки в этой плоскости, которая явилась новой независимой формой малоуглового приближения.

Все перечисленные формы МУП не учитывают дисперсии длин путей распространения в силу грубости допущения  $\mu \approx 1$ . Все попытки учета дисперсии путем уточнения приближения косинуса следующим членом тейлоровского ряда  $\mu = \cos\theta \approx 1 - \theta^2/2$ , сделанные рядом исследователей (см. обзоры [18, 19] и литературу к ним), неизменно приводили к преобразованию интегрального слагаемого УПИ по Bothe [16] и в конечном итоге к диффузионному приближению [2]. Последнее является достаточно грубым и сводится к гауссовскому выражению для углового распределения яркости.

В работе [20] было предложено приближенное решение УПИ иного типа, с использованием тейлоровской аппроксимации  $1/\mu = (\cos\theta^{-1}) \approx 1 + \theta^2/2$  в области малых углов визирования. Это решение корректно учитывает дисперсию длин путей распространения в средах с анизотропными индикатрисами рассеяния весьма общего вида и получено при менее сильных упрощающих предположениях по сравнению с различными вариантами диффузионного приближения. Вместе с тем точность этого решения ограничена второй степенью тейлоровской аппроксимации  $1/\mu$  рядом других допущений.

В настоящей статье, таким образом, преследуются две основные цели: с одной стороны, вывести

уточненное решение УПИ в малоугловом приближении, которое учитывало бы дисперсию длин путей распространения без перехода к диффузионному приближению, и с другой стороны, проанализировать возможности применения полученного решения к регуляризации особенностей решения краевых задач УПИ.

## 1. Матричное представление краевой задачи УПИ для плоского слоя

Световое поле в однородном плоском слое мутной среды, облучаемом плоским мононаправленным источником (ПМ), определяется из краевой задачи УПИ:

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial}{\partial \tau} L(\tau, \hat{\mathbf{I}}) = -L + \frac{\Lambda}{4\pi} \oint L(\tau, \hat{\mathbf{I}}') x(\hat{\mathbf{I}}', \hat{\mathbf{I}}) d\hat{\mathbf{I}}', \\ L(\tau, \hat{\mathbf{I}}) \Big|_{\tau=0, (\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{z}}) \geq 0} = E_0 \delta(\hat{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{I}}_0), L(\tau, \hat{\mathbf{I}}) \Big|_{\tau=\tau_0, (\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{z}}) \leq 0} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $L(\tau, \hat{\mathbf{I}})$  – яркость светового поля в слое мутной среды на оптической глубине  $\tau$  по направлению  $\hat{\mathbf{I}} = \{\sqrt{1-\mu^2} \cos\varphi, \sqrt{1-\mu^2} \sin\varphi, \mu\}$ ,  $\mu = \cos\theta$ ;  $x(\hat{\mathbf{I}}', \hat{\mathbf{I}})$  – индикатриса рассеяния;  $\Lambda$  – альbedo однократного рассеяния;  $\hat{\mathbf{I}}_0 = \{\sqrt{1-\mu_0^2}, 0, \mu_0\}$  – направление падающего излучения;  $\mu_0 = \cos\theta_0$ ;  $\tau_0$  – оптическая толщина слоя;  $E_0$  – нормальная облученность падающего пучка;  $\hat{\mathbf{z}}$  – единичный орт оси OZ декартовой системы координат, которая направлена вниз перпендикулярно границам слоя. Интегрирование в последнем слагаемом УПИ в (1) ведется по всей сфере направлений.

Выделим в решении  $\delta$ -особенность по углу, для чего представим его в виде суммы прямого нерассеянного излучения и регулярной части  $\tilde{L}(\tau, \hat{\mathbf{I}})$ :

$$L(\tau, \hat{\mathbf{I}}) = E_0 e^{-\tau/\mu_0} \delta(\hat{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{I}}_0) + \tilde{L}(\tau, \hat{\mathbf{I}}), \quad (2)$$

что приведет к краевой задаче

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{L}(\tau, \hat{\mathbf{I}}) = -\tilde{L} + \frac{\Lambda}{4\pi} \oint \tilde{L}(\tau, \hat{\mathbf{I}}') x(\hat{\mathbf{I}}', \hat{\mathbf{I}}) d\hat{\mathbf{I}}' + \\ + \frac{\Lambda}{4\pi} E_0 e^{-\tau/\mu_0} x(\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}_0), \\ \tilde{L}(\tau, \hat{\mathbf{I}}) \Big|_{\tau=0, (\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{z}}) \geq 0} = 0, \tilde{L}(\tau, \hat{\mathbf{I}}) \Big|_{\tau=\tau_0, (\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{z}}) \leq 0} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Для определенности дальнейших рассуждений будем считать ее направленной вниз.

Разложим угловое распределение регулярной части решения и индикатрису рассеяния в ряд по сферическим функциям (гармоникам):

$$\tilde{L}(\tau, \hat{\mathbf{I}}) \equiv \tilde{L}(\tau, \mu, \varphi) = \sum_{l=0}^N \sum_{m=-l}^l \frac{2l+1}{4\pi} C_l^m(\tau) Q_l^m(\mu) e^{-im\varphi}, \quad (4)$$

$$x(\hat{\mathbf{I}}', \hat{\mathbf{I}}) \equiv x(\cos\theta) = \sum_{l=0}^N (2l+1) x_l P_l(\cos\theta), \quad (5)$$

где  $N$  – максимальное число членов в разложении индикатрисы рассеяния;

$$Q_l^m(\mu) = \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\mu); \quad (6)$$

перенормированные полиномы Лежандра, удовлетворяющие условию нормировки

$$\int_{-1}^{+1} Q_l^m(\mu) Q_k^m(\mu) d\mu = \frac{2}{2k+1} \delta_{lk}; \quad (7)$$

$P_l^m(\mu)$ ,  $P_l(\mu)$  – присоединенные и обычные полиномы Лежандра.

Подстановкой разложений (4) и (5) в УПИ (3) задача сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для неизвестных коэффициентов  $C_l^m(\tau)$ , которая затем решается тем или иным методом. Задача для равномерно освещенной плоскостной среды допускает разделение гармоник по азимутальному номеру  $m$ . В матричных обозначениях система дифференциальных уравнений для коэффициентов гармоник имеет вид

$$\ddot{\mu} \frac{d}{d\tau} \bar{C}^m(\tau) = -(\ddot{1} - \Lambda \ddot{x}) \bar{C}^m(\tau) + \frac{\Lambda}{4\pi} E_0 e^{-\tau/\mu_0} \ddot{x} \bar{P}(\mu_0), \quad (8)$$

где  $\bar{C}^m(\tau) \equiv [C_0^m(\tau), C_1^m(\tau), \dots]$  – вектор-столбец  $(N+1) \times 1$  искомого коэффициентов;  $\ddot{x}$  – диагональная матрица  $(N+1) \times (N+1)$ , элементы которой равны соответствующим коэффициентам разложения индикатрисы рассеяния по системе сферических гармоник;  $\ddot{\mu}$  – двухдиагональная матрица  $(N+1) \times (N+1)$  оператора, соответствующего умножению тела яркости на  $\mu$ ;  $\bar{P}(\mu_0) = [P_0(\mu_0), P_1(\mu_0), \dots, P_N(\mu_0)]$  – вектор-столбец  $(N+1) \times 1$ . Здесь и далее  $\ddot{1}$  означает единичную матрицу соответствующего размера.

Элементы матрицы  $\ddot{\mu}$  выражаются формулами:

$$\begin{aligned} \mu_{k,k+1} &= \frac{1}{2k+1} \sqrt{(k+1-m)(k+1+m)}, \\ \mu_{k,k-1} &= \frac{1}{2k+1} \sqrt{(k-m)(k+m)}. \end{aligned} \quad (9)$$

Преобразованное уравнение переноса излучения (8) после подстановки (9) в матричной записи принимает вид

$$\frac{d}{d\tau} \bar{C}^m(\tau) = -\bar{B} \bar{C}^m(\tau) + e^{-\tau/\mu_0} \bar{F}, \quad (10)$$

где

$$\bar{B} = \ddot{\mu}^{-1}(\ddot{1} - \Lambda \ddot{x}); \quad \bar{F} = \frac{\Lambda}{4\pi} E_0 \ddot{\mu}^{-1} \ddot{x} \bar{P}(\mu_0).$$

## 2. Развитие малоуглового приближения

В работе [21] получено точное матричное решение данной системы уравнений с краевыми условия-

ми, соответствующими (3). Однако расчет этого решения, связанный с вычислением матричной экспоненты, сопряжен со значительными проблемами при анизотропном рассеянии, когда  $N$  превышает несколько сотен, что часто соответствует реальной атмосфере и является нижним пределом для океана. Поэтому мы попытаемся определить аналитически более простое решение, описывающее анизотропную часть решения, т.е. большие  $N$ .

В случае сильно анизотропного рассеяния малой величиной можно принять обратное рассеяние, для чего изменим краевые условия в (3) на граничные:

$$\tilde{L}(\tau, \hat{1}) \Big|_{\tau=0} = 0, \quad (11)$$

что в соответствии с выражением (4) для гармоник имеет вид

$$\bar{C}^m(0) = 0. \quad (12)$$

Решение (10) с граничным условием (12) представимо следующим выражением:

$$\begin{aligned} \bar{C}(\tau) &= e^{-\bar{B}\tau} \int_0^\tau e^{-t/\mu_0} e^{\bar{B}t} dt \bar{F} = \\ &= \mu_0 e^{-\bar{B}\tau} (\mu_0 \bar{B} - \ddot{1})^{-1} (e^{-\tau/\mu_0} e^{\bar{B}\tau} - \ddot{1}) \bar{F}. \end{aligned} \quad (13)$$

Однако простые рассуждения и непосредственная подстановка в (13) точного выражения для матрицы  $\bar{B}$  показывают непригодность данного подхода. Дело в том, что  $\bar{B}$  имеет симметричные относительно 0 собственные значения [21]. Отрицательные значения (возрастающие с оптической глубиной экспоненты) соответствуют распространению излучения в заднюю полусферу направлений  $(\hat{1}, \hat{z}) < 0$ , т.е. соответствуют отброшенному обратному рассеянию. Поэтому при вычислении  $\bar{B}$  нельзя использовать точное выражение для матрицы  $\ddot{\mu}^{-1}$ , ответственной за дисперсию длин рассеянных лучей.

Разделим обе части уравнения (1) на косинус угла визирования  $\mu$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} L(\tau, \hat{1}) = -\frac{1}{\mu} L + \frac{1}{\mu} \frac{\Lambda}{4\pi} \oint L(\tau, \hat{1}) x(\hat{1}, \hat{1}) d\hat{1}. \quad (14)$$

В малоугловом приближении принимается упрощающее допущение  $\mu \approx \mu_0$ , что соответствует полному пренебрежению дисперсией длин рассеянных лучей [15, 19]. Аппроксимируем величину  $\mu^{-1}$ , входящую в уравнение (14), разложением в ряд Тейлора вблизи  $\mu = \mu_0$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} &\equiv \frac{1}{\mu_0 - (\mu_0 - \mu)} \approx \frac{1}{\mu_0} \left[ 1 + \left(1 - \frac{\mu}{\mu_0}\right) + \left(1 - \frac{\mu}{\mu_0}\right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \frac{\mu}{\mu_0}\right)^3 + \left(1 - \frac{\mu}{\mu_0}\right)^4 + \left(1 - \frac{\mu}{\mu_0}\right)^5 + \dots \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

Соответствующие разложения по  $\mu$  различной степени  $n$  имеют следующий вид:

$$\begin{array}{l|l} 0 & \mu_0^{-1} \\ 1 & -\mu\mu_0^{-2} + 2\mu_0^{-1} \\ 2 & \mu^2\mu_0^{-3} - 3\mu\mu_0^{-2} + 3\mu_0^{-1} \\ \dots & \dots \end{array} \quad (16)$$

На рис. 1 эти разложения изображены кривыми для случая  $\mu_0 = 1$ . В работе [20] величина  $\mu^{-1}$  аппроксимирована тейлоровским многочленом вида  $\mu^{-1} \sim 1 + \theta^2/2$ . Это выражение показано на рис. 1 вместе с остальными аппроксимациями.

Выделяя в угловом распределении яркости особенную (нерассеянную) часть (2), преобразуем уравнение (14) к виду

$$\frac{d}{d\tau} \bar{C}^m(\tau) = -\bar{B}' \bar{C}^m(\tau) + e^{-\tau/\mu_0} \bar{F}', \quad (17)$$

где штрихованные величины  $\bar{B}' = \bar{\mu}^{-1}(\bar{I} - \Lambda\bar{x})$ ,  $\bar{F}' = \frac{\Lambda}{4\pi} E_0 \bar{\mu}^{-1} \bar{x} \bar{P}(\mu_0)$  отличаются от входящих в формулы (10)–(13) нештрихованных величин заменой матрицы  $\bar{\mu}^{-1}$  ее тейлоровской аппроксимацией  $\bar{\mu}^{-}$ . Решение этого уравнения выражается в виде (13) с заменой  $\bar{B}$ ,  $\bar{F}$  на  $\bar{B}'$ ,  $\bar{F}'$  соответственно. Матрицы тейлоровских разложений  $\bar{\mu}^{-}$  также имеют вид многочленов, приведенный в (16), с заменой степеней  $\mu$  соответствующими степенями матрицы  $\bar{\mu}^{-}$ .

На рис. 2 показаны вычисленные по предлагаемой методике угловые распределения яркости различного порядка приближения  $n$  в зависимости от

угла  $\theta$  на оптической глубине  $\tau = 20$  для излучения ПМ источника света, нормально падающего на внешнюю границу среды. Сплошной кривой показано эталонное решение, полученное с помощью алгоритма DOM [22]. Можно видеть постепенное увеличение точности аппроксимации с ростом порядка. Номера порядка приближения обозначены цифрами при каждой кривой.

Отметим, что при  $n = 0$

$$\bar{B}' \approx \mu_0^{-1}(\bar{I} - \Lambda\bar{x}), \quad \bar{F}' \approx \frac{\Lambda}{4\pi} E_0 \mu_0^{-1} \bar{x} \bar{P}(\mu_0),$$

$$(\mu_0 \bar{B}' - \bar{I})^{-1} \approx -\Lambda^{-1} \bar{x}^{-1},$$

$$\bar{C}(\tau) = (e^{\Lambda\bar{x}\tau/\mu_0} - \bar{I}) \frac{E_0}{4\pi} \bar{P}(\mu_0) e^{-\tau/\mu_0}, \quad (18)$$

что полностью соответствует малоугловому решению в форме [10] без прямого излучения.

На рис. 3 показаны угловые распределения яркости на различных оптических глубинах в мутной среде с индикатрисой рассеяния Хензи–Гринштейна [23].

Виден эффект поворота тела яркости с глубиной, хорошо известный из результатов экспериментов [14, 24]. Этот эффект существенно связан с различием оптических длин путей, проходимых рассеянным на различные углы излучением, а потому не описывается никакими ранее предложенными решениями УПИ в малоугловом приближении. В то же время предлагаемое в настоящей статье решение включает в себя указанный эффект и удовлетворительно согласуется с эталонным решением, полученным при помощи алгоритма DOM.

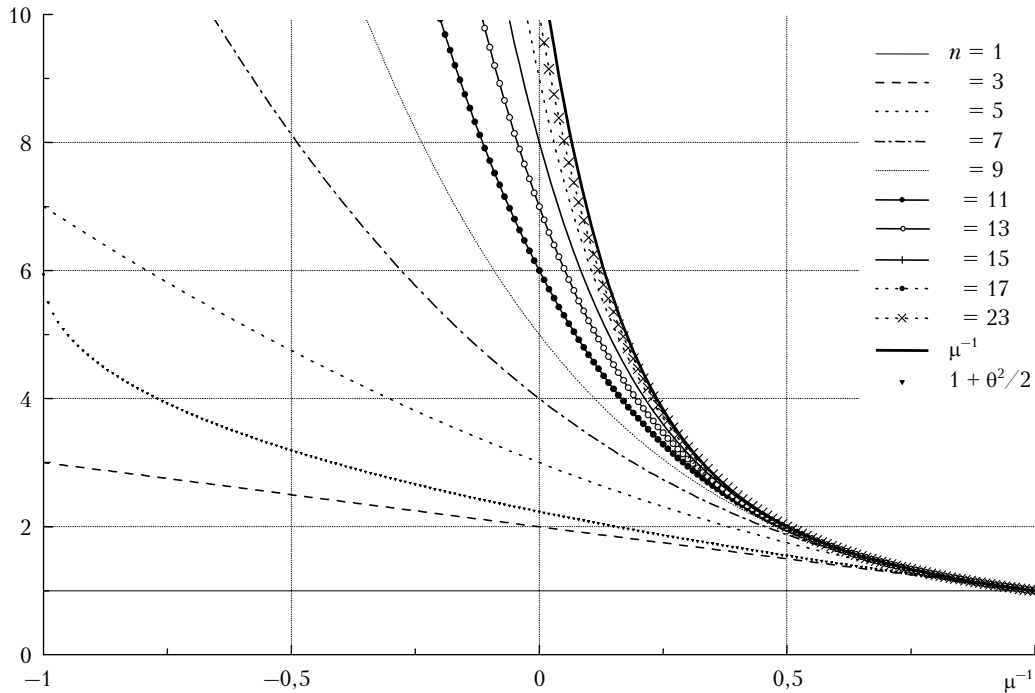


Рис. 1. Тейлоровские разложения  $\mu^{-1}$

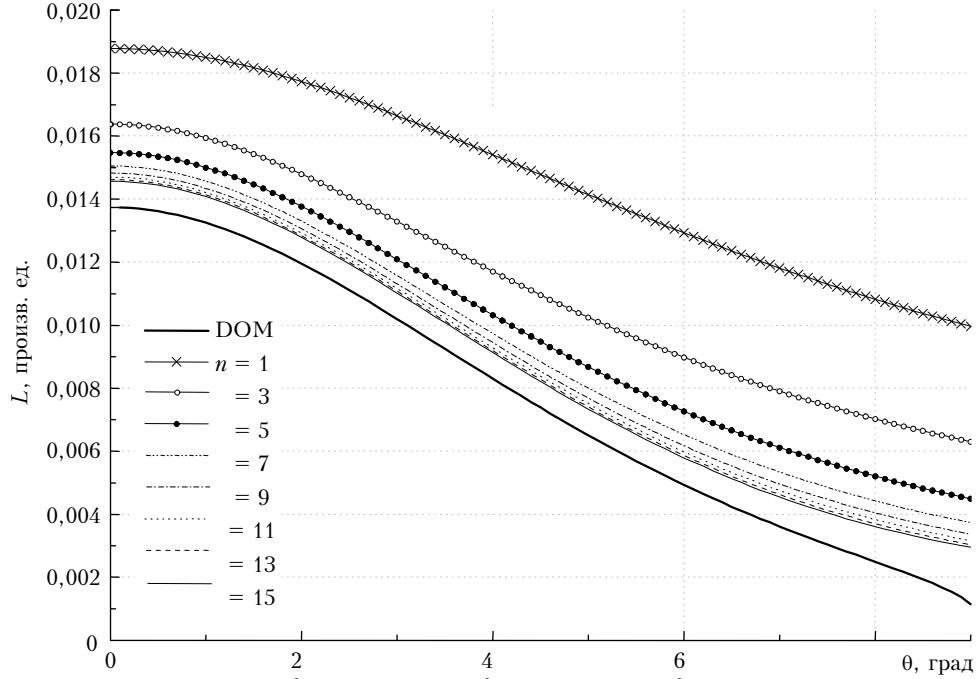


Рис. 2. Угловые распределения яркости рассеянного излучения. Индикатриса Хеньи–Гринштейна  $g = 0,9$ ,  $\tau = 20$ ,  $\Lambda = 0,9$ ,  $\mu_0 = 1$

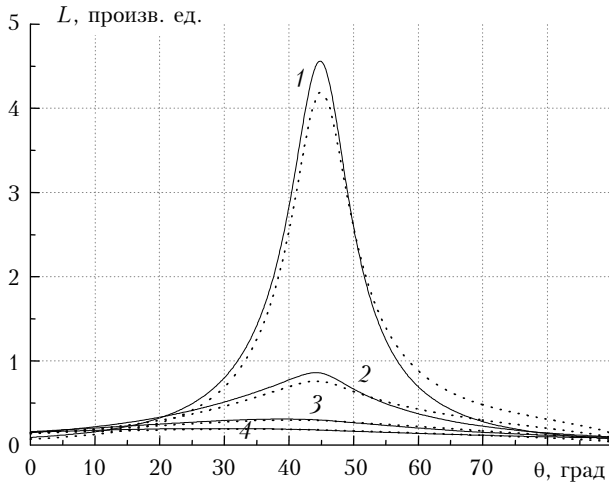


Рис. 3. Угловые распределения яркости на больших оптических толщинах. Индикатриса Хеньи–Гринштейна  $g = 0,9$ ,  $\Lambda = 0,999$ ,  $\theta_0 = 45^\circ$ . Сплошные кривые – эталонное решение по алгоритму DOM, пунктирные кривые – малоугловое решение с учетом дисперсии (простейшая аппроксимация  $\mu^{-1} \approx 2 - \mu$ ). Цифры у кривых определяют оптические толщи: 1 –  $t = 1,0$ ; 2 –  $10,0$ ; 3 –  $20,0$ ; 4 –  $50,0$

### 3. Выделение анизотропной по углу части решения

В работе [13] предлагался численный метод строгого решения УПИ на основе выделения особенности тела яркости и развития выражения (2)

$$L(\tau, \hat{\mathbf{I}}) = L_a(\tau, \hat{\mathbf{I}}) + \tilde{L}(\tau, \hat{\mathbf{I}}), \quad (19)$$

где  $L_a$  – анизотропная по углу часть решения, включающего все особенности.

Краевая задача для регулярной части решения  $\tilde{L}(\tau, \hat{\mathbf{I}})$  формулируется в виде уравнения с некоторой функцией источников в правой части:

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial \tilde{L}(\tau, \hat{\mathbf{I}})}{\partial \tau} = -\tilde{L} + \frac{\Lambda}{4\pi} \oint \tilde{L}(\tau, \hat{\mathbf{I}}) x(\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}) d\hat{\mathbf{I}} + \Delta(\tau, \hat{\mathbf{I}}), \\ \tilde{L}(\tau, \hat{\mathbf{I}})|_{\tau=0, (\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{z}}) \geq 0} = 0, \quad \tilde{L}(\tau, \hat{\mathbf{I}})|_{\tau=\tau_0, (\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{z}}) \leq 0} = -L_a(\tau, \hat{\mathbf{I}}), \end{cases} \quad (20)$$

где условие на нижней границе среды связано с приближенным характером  $L_a$ .

Функция источников  $\Delta$  в правой части уравнения (20) записывается в виде

$$\Delta(\tau, \hat{\mathbf{I}}) = -\mu \frac{\partial L_a}{\partial \tau} - L_a + \frac{\Lambda}{4\pi} \oint L_a(\tau, \hat{\mathbf{I}}) x(\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}) d\hat{\mathbf{I}}, \quad (21)$$

а коэффициенты разложения функции источников по перенормированным полиномам Лежандра соответственно равны

$$\tilde{\Delta}_{SH}^m(\tau) = (\tilde{\mu}\tilde{\mu}^- - \tilde{\mathbf{I}})(\tilde{\mathbf{I}} - \Lambda\tilde{x})\tilde{C}_a^m(\tau), \quad (22)$$

где  $\tilde{C}_a^m(\tau)$  – вектор-столбец коэффициентов разложения анизотропной части решения.

При удачно найденной анизотропной части поля решение (20) является плавной регулярной функцией, которую нетрудно найти любым численным методом, в частности методом сферических гармоник [13] или дискретных ординат [22]. Использование в качестве анизотропной части выражения (13) соответствующего порядка приближения (15), (16) позволяет сформулировать весьма регулярную задачу для гладкой части решения.

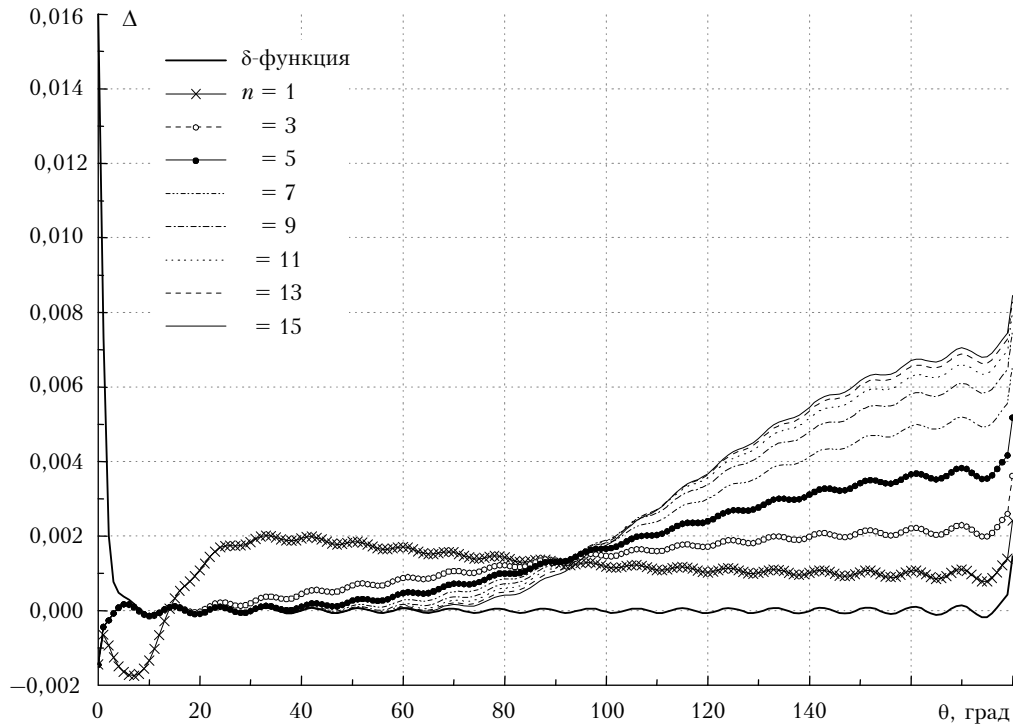


Рис. 4. Угловое распределение функции источников  $\Delta$ . Индикатриса Хенъи–Гринштейна  $g = 0,98$ ,  $\tau = 10$ ,  $\Lambda = 1$ ,  $\mu_0 = 1$

На рис. 4 функции источников (21) показаны в зависимости от угла визирования для нескольких значений оптических толщин и других параметров.

Можно видеть, что с увеличением порядка аппроксимации угловые распределения функций источников (21) перемещаются из передней полусферы в заднюю. Для высоких порядков аппроксимации функции источников являются весьма сглаженными и в основном сосредоточены в задней полусфере направлений визирования. Значения порядка аппроксимации, т.е. степени соответствующего тейлоровского разложения (16), показаны цифрами рядом с каждой кривой. Функция источников, соответствующая простейшей аналитической форме особенной части решения (т.е. в виде дельта-функции  $\delta(\theta)$ ), показана жирной кривой. Можно наблюдать уменьшение функции источников в передней полусфере и рост в задней с ростом номера. Номера порядка приближения обозначены цифрами при каждой кривой.

На рис. 5 показаны модули коэффициентов гармоник функции источников УПИ различной степени малоуглового приближения. Нетрудно видеть, что с увеличением порядка точности аппроксимации (9) коэффициенты высоких номеров гармоник функции источников весьма быстро уменьшаются и достигают минимального значения, ограниченного точностью вычислительного устройства.

Следуя работе [22], гладкую часть тела яркости будем искать методом дискретных ординат [7]. Уравнение для гладкой части в дискретных ординатах запишем в виде

$$\mu_i \frac{d}{d\tau} \tilde{L}_i = -\tilde{L}_i + 2\pi\Lambda \times$$

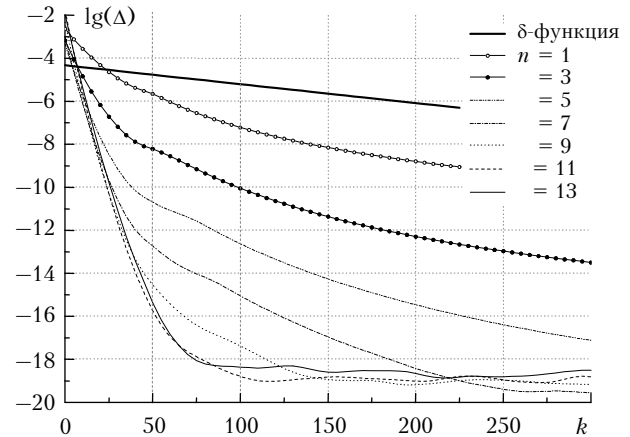


Рис. 5. Коэффициенты разложения функции источников (см. рис. 3) по сферическим гармоникам

$$\times \sum_{l=0}^{\infty} \sum_j a_j x_l \frac{2l+1}{4\pi} Q_l^m(\mu_i) Q_l^m(\mu_j) \tilde{L}_j + \Delta_i, \quad (23)$$

где  $a_j$ ,  $\mu_i$  – весовые коэффициенты и узлы используемой квадратурной формулы соответственно;  $\tilde{L}_i$  – значения яркости в этих узлах, а функция источников выражается в виде

$$\bar{\Delta}_{DO} = \bar{W} \bar{\Delta}_{SH}, \quad (24)$$

$$[\bar{W}]_{il} \equiv \frac{2l+1}{4\pi} Q_l^m(\mu_i), \quad (25)$$

где индексами  $DO$  и  $SH$  снабжены векторы и матрицы операторов, относящихся к пространствам дискретных ординат и сферических гармоник соответ-

венно, во избежание путаницы с обозначениями предыдущих разделов. По возможности сохраняя обозначения, принятые в работе [13], запишем (23) в матричной форме

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \bar{L} = \bar{B}_{DO} \bar{L} + \bar{\mu}_{DO}^{-1} \bar{\Delta}_{DO}, \quad (26)$$

где  $\bar{B}_{DO}$  – матрица линейной формы по  $\bar{L}$ :

$$\begin{aligned} [\bar{B}_{DO} \bar{L}]_{ij} = \\ = \frac{1}{\mu_i} \left( -L_i + 2\pi\Lambda \sum_{l=0}^{\infty} \sum_j a_j x_l \frac{2l+1}{4\pi} Q_l^m(\mu_i) Q_l^m(\mu_j) L_j \right). \end{aligned}$$

Интегрируя уравнение (26) по всей толщине слоя, получим систему алгебраических уравнений, вместе с граничными условиями определяющую угловые распределения яркости на границах среды:

$$\begin{aligned} \exp(-\bar{B}_{DO} \tau) \bar{L}(\tau) - \bar{L}(0) = \\ = \int_0^{\tau} \exp(-\bar{B}_{DO} \tau) \bar{\mu}_{DO}^{-1} \bar{\Delta}_{DO} d\tau. \end{aligned} \quad (27)$$

Подставляя выражение (22) для  $\bar{\Delta}_{SH}$  в правую часть (24) и далее в (26), (27) для нахождения искомого угловых распределений яркости на границах плоскостной среды, получим хорошо обусловленную систему линейных алгебраических уравнений в дискретных ординатах с регуляризованной особенностью решения, т.е. с правой частью заданной степени гладкости, определяемой выбранным порядком приближения (16). Вид выражения в правой части системы определяется использованным приближением для анизотропной части решения. Практические приемы интегрирования входящих туда матричных функций можно найти в работе [13]. Уменьшение количества коэффициентов в (22), реально вносящих значимый вклад в функцию источников по мере повышения порядка приближения (16), дает возможность эффективно сократить число неизвестных в системе (27) и тем самым значительно упростить ее решение на практике.

#### 4. Нестационарное УПИ

Рассмотрим нестационарное уравнение переноса для ПМ источника [25]:

$$\frac{\partial L}{\partial u} + \mu \frac{\partial L}{\partial \tau} + L - \frac{\Lambda}{4\pi} \oint L(u, \tau, \hat{l}) x(\hat{l}, \hat{l}) d\hat{l} = 0, \quad (28)$$

где  $u = c\epsilon t$  – безразмерное время;  $c$  – скорость света;  $t$  – истинное время;  $\epsilon$  – показатель ослабления.

Применяя изложенный подход к уравнению (28), нетрудно получить простое приближенное решение, также учитывающее дисперсию длин путей распространения. Подставим в нестационарное УПИ (28) интеграл Фурье для углового распределения яркости

$$L(u, \tau, \hat{l}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\omega(u - \tau)) \bar{L}(\omega, \tau, \hat{l}) d\omega \quad (29)$$

и получим уравнение для Фурье-спектра

$$i\omega(1 - \mu) \bar{L} + \mu \frac{\partial \bar{L}}{\partial \tau} + \bar{L} - \frac{\Lambda}{4\pi} \oint \bar{L}(u, \tau, \hat{l}) x(\hat{l}, \hat{l}) d\hat{l} = 0. \quad (30)$$

Преобразуя его по формулам предыдущего раздела (14)–(16) полностью аналогично стационарному случаю, получим нестационарное уравнение в матричной записи

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \bar{C}^m(\omega, \tau) = \\ = -\bar{\mu}^{-1} (\bar{I} - \Lambda \bar{x}) \bar{C}^m(\omega, \tau) - i\omega(\bar{\mu}^{-1} - \bar{I}) \bar{C}^m(\omega, \tau), \end{aligned} \quad (31)$$

где  $\bar{C}^m(\omega, \tau)$  – столбец коэффициентов разложения. Выделяя в этом уравнении нерассеянную особенную часть распределения яркости (10), получим решение вида (13), зависящее от частоты  $\omega$  как от параметра. Искомое нестационарное угловое распределение яркости в среде выражается через полученное решение с помощью интеграла Фурье.

Практически используемые в настоящее время малоугловые решения нестационарного УПИ с учетом дисперсии [26] предполагают итерационное разложение решения по кратностям рассеяния. При необходимости учета высоких порядков кратности рассеяния, характерных для оптически толстых сред, это приводит к громоздким вычислениям в результате многочисленных приближений и допущений, сводимых к приближенным решениям типа гауссианы. Предлагаемое здесь решение свободно от указанного недостатка, поскольку автоматически включает в себя рассеянное на малые углы излучение всех кратностей.

Пример приближенного решения для короткого импульса в мутной среде показан сплошной кривой на рис. 6. Для сравнения точками показано эталонное решение по методу Монте-Карло [27].

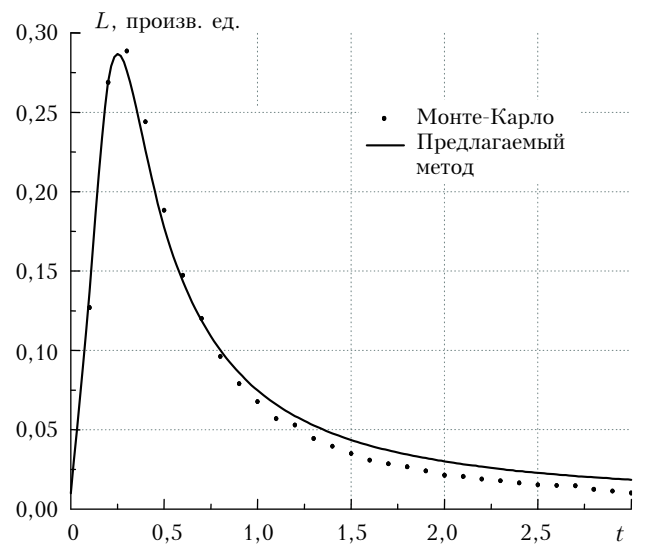


Рис. 6. Распространение короткого импульса в малоугловом приближении с учетом дисперсии. Индикатриса Хенни–Гринштейна  $g = 0,9$ ,  $\tau = 10$ ,  $\Lambda = 1$ , угол визирования  $\theta = 17^\circ$

## Заклучение

Предложен новый класс приближенных малоугловых решений уравнения переноса излучения с особенностями в решении, реализующих учет дисперсии длин путей распространения излучения в мутной среде. Полученное решение позволяет значительно повысить эффективность численных алгоритмов решения уравнения переноса излучения в средах с сильной анизотропией рассеяния.

На основе предложенного подхода получено приближенное решение нестационарного уравнения переноса излучения, обладающего рядом преимуществ по сравнению с ранее известными.

Авторы благодарны А.В. Лубенченко за решение нестационарного УПИ методом статистических испытаний.

1. *Chwolson O.D.* Grundzuge einer mathematischen Theorie der inneren Diffusion des Lichtes // Bull. Acad. Imp. Sci. St. Petersburg, 1889. V. 33. S. 221–256.
2. *Апресян Л.А., Кравцов Ю.А.* Теория переноса излучения. М.: Наука, 1983. 216 с.
3. *Mishchenko M.I.* Multiple scattering, radiative transfer, and weak localization in discrete random media: Unified microphysical approach // Rev. Geophys. 2008. V. 46. RG2003.
4. *Nakajima T., Tanaka M.* Algorithms for radiative intensity calculations in moderately thick atmospheres using a truncation approximation // J. Quant. Spectrosc. and Radiat. Transfer. 1988. V. 40, N 1. P. 51–59.
5. *Ленобль Ж.П.* Перенос радиации в рассеивающих и поглощающих средах. Стандартные методы расчета. Л.: Гидрометеиздат, 1990. 264 с.
6. *Yokota T., Oguma H.M., Morino I., Inoue G.* A nadir-looking “SWIR” sensor to monitor CO<sub>2</sub> column density for Japanese “GOSAT” project // Proc. the Twenty-Fourth Int. Sympos. on Space Technol. and Sci. Miyazaki, Japan, May–June 2004. P. 887.
7. *Чандрасекар С.* Перенос лучистой энергии. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1953. 431 с.
8. *Романова Л.М.* Решение уравнения переноса излучения в случае индикатрисы рассеяния, сильно отличающейся от сферической // Оптика и спектроскопия. 1962. Т. XIII, вып. 3. С. 429–435.
9. *Irvine W.M.* Diffuse reflection and transmission by cloud and dust layers // J. Quant. Spectrosc. and Radiat. Transfer. 1968. V. 8. P. 471–85.
10. *Goudsmit S., Saunderson J.L.* Multiple scattering of electrons // Phys. Rev. 1940. Part I. V. 57. P. 24–29; Part II. V. 58. P. 36–42.
11. *Dave J.V., Gazdag J.* A modified Fourier transform method for multiple scattering calculations in a plane parallel Mie atmosphere // Appl. Opt. 1970. V. 9, N 6. P. 1457–1466.
12. *Ito S., Oguchi T.* Approximate solutions of the vector radiative transfer equation for linearly polarized light in discrete random media // J. Opt. Soc. Amer. A. 1989. V. 6, N 12. P. 1852–1858.
13. *Будак В.П., Козельский А.В., Савицкий Е.Н.* Улучшение сходимости метода сферических гармоник при сильно анизотропном рассеянии // Оптика атмосфер. и океана. 2004. Т. 17, № 1. С. 36–41.
14. *Duntley S.Q.* Light in the sea // J. Opt. Soc. Amer. 1963. V. 53. P. 214.
15. *Wentzel G.* Zur Theorie der Streuung von  $\beta$ -Strahlen // Ann. d. Phys. 1922. B. 69, H. 5. S. 335–368.
16. *Bothe W.* Die Streuabsorption der Elektronenstrahlen // Zeit. f. Physik. 1929. B. 54, H. 3. S. 161–178.
17. *Компанец А.С.* Многократное рассеяние быстрых электронов и  $\alpha$ -частиц в тяжелых элементах // Ж. эксперим. и теор. физ. 1954. Т. 15, вып. 6. С. 235–243.
18. *Kokhanovsky A.A.* Small-angle approximations of the radiative transfer theory // J. Phys. D. 1997. V. 30. P. 2837–2840.
19. *Будак В.П., Козельский А.В.* О точности и границах применимости малоуглового приближения // Оптика атмосфер. и океана. 2005. Т. 18, № 1–2. С. 38–44.
20. *Будак В.П., Илюшин Я.А.* Учет дисперсии длин путей рассеянного света в малоугловом приближении теории переноса излучения // Оптика атмосфер. и океана. 2010. Т. 23, № 2. С. 102–105.
21. *Karp A.H., Greenstadt J., Fillmore J.A.* Radiative transfer through an arbitrary thick scattering atmosphere // J. Quant. Spectrosc. and Radiat. Transfer. 1980. V. 24, N 5. P. 391–406.
22. *Budak V.P., Korkin S.V.* On the solution of a vectorial radiative transfer equation in an arbitrary three-dimensional turbid medium with anisotropic scattering // J. Quant. Spectrosc. and Radiat. Transfer. 2008. V. 109. P. 220–234.
23. *Heney L.G., Greenstein J.L.* Diffuse radiation in the galaxy // Astrophys. J. 1941. V. 93. P. 70–83.
24. *Тимофеева В.А., Соломонов В.К.* Форма стационарной диаграммы распределения яркости в мутных средах типа морской воды // Изв. АН СССР. Физ. атмосф. и океана. 1970. Т. VI, № 6. С. 611–616.
25. *Нагурнер Д.И.* Теория нестационарного переноса излучения // Астрофизика. 1974. № 3. С. 445–469.
26. *Сергеева Е.А., Кириллин М.Ю., Приезжев А.В.* Распространение фемтосекундного импульса в рассеивающей среде: теоретический анализ и численное моделирование // Квант. электрон. 2006. Т. 36, № 11. С. 1023–1031.
27. *Лубенченко А.В.* Функция распределения отраженных электронов по пробегам // XXIII конференция по эмиссионной электронике: Тез. докл. Ташкент: Ин-т электроники, 1997. Т. 1. С. 163.

### *V.P. Budak, Ya.A. Ilyushin. Separation of the singular part of the light field on the basis of the small angle solutions of the transfer theory.*

The novel approach to the accurate calculation of the anisotropic part of the diffuse radiation is proposed. The applications of the proposed technique to the various radiative transfer problems are shown. The numerical examples, which demonstrate the accuracy and flexibility of the new approach, are discussed.