

В.П. Будак, А.В. Козельский

О точности и границах применимости малоуглового приближения

Московский энергетический институт (технический университет)

Поступила в редакцию 26.08.2004 г.

Малоугловое приближение (МУП) решения уравнения переноса излучения (УПИ) является одним из наиболее мощных методов решения прикладных проблем оптики атмосферы и океана. Аналитические сложности УПИ позволили сформулировать лишь общие, качественные оценки точности и границ применимости МУП. Возможен другой подход, основанный на сравнении расчетов световых полей в мутной среде в МУП с аналогичными численными решениями УПИ. Однако численные методы решения УПИ в средах с сильно анизотропным рассеянием малоэффективны.

Не представляет труда обобщение указанного подхода на случаи произвольных граничных условий.

Особенность формирования любых природных мутных сред заключается в том, что взвешенные в них частицы имеют размеры много больше длины волны, что в соответствии с теорией Ми приводит к сильно анизотропному рассеянию. Трудности аналитического и численного решения краевых задач уравнения переноса излучения (УПИ) при анизотропном рассеянии породили разработку специальных приближенных методов, получивших общее название малоуглового приближения (МУП) [1].

Перенос излучения в мутной среде, будь то атмосфера или морская вода, является частным случаем явлений переноса, описываемых эквивалентными уравнениями, но различными по физической природе параметрами среды. Любой процесс, характеризующийся локальной компактностью [2], описывается уравнением, полностью аналогичным УПИ. Поэтому разработка как вообще методов решения уравнений переноса, так и МУП проводилась специалистами в различных областях физики.

В настоящее время МУП является одним из наиболее мощных методов решения прикладных проблем оптики атмосферы и океана [1]. Это обуславливает важность определения его точности и границ применимости, так же как и любого приближенного метода. Однако аналитические сложности решения УПИ позволили сформулировать лишь предельно общие, качественно иллюстративные оценки [1]. Здесь возможен и другой подход, основанный на сравнении расчетов световых полей в мутной среде в МУП с аналогичными численными решениями УПИ. Однако большинство численных методов испытывают также серьезные затруднения при решении УПИ в средах с сильно анизотропным рассеянием, что не позволяет провести оценку точности МУП. В статье [3] нами предложено численное решение УПИ для мутных сред с произвольной анизотропией рассеяния, освещенной плоским мононаправленным (ПМ) источником, что открывает возможность решения указанной задачи.

Рассмотрим краевую задачу УПИ для ПМ-источника при произвольном угле облучения полубесконечного слоя мутной среды

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial L(\tau, \mu, \varphi)}{\partial \tau} = -L(z, \mu, \varphi) + \frac{\Lambda}{4\pi} \oint L(z, \mu', \varphi') x(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{i}}') d\hat{\mathbf{i}}', \\ L(0, \mu, \varphi)|_{\mu \geq 0} = \delta(\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{i}}_0), \end{cases} \quad (1)$$

где $L(\tau, \mu, \varphi) \equiv L(\tau, \hat{\mathbf{i}})$ — яркость светового поля на оптической глубине $\tau = \varepsilon z$ в направлении

$$\hat{\mathbf{i}} = \{\sqrt{1 - \mu^2} \cos \varphi; \sqrt{1 - \mu^2} \sin \varphi; \mu\}, \quad \mu = (\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{z}});$$

Λ — альbedo однократного рассеяния; ε — показатель ослабления; $x(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{i}}')$ — индикатриса рассеяния среды;

$$\hat{\mathbf{i}}_0 = \mu_0 \hat{\mathbf{z}} + \mathbf{I}_{0\perp}, \quad \mu_0 = (\hat{\mathbf{i}}_0, \hat{\mathbf{z}})$$

— направление излучения ПМ-источника. Ось OZ перпендикулярна границе слоя; $\hat{\mathbf{z}}$ — единичный вектор в направлении OZ . Значок « \wedge » над символом означает единичный вектор.

МУП было сформулировано при исследованиях прохождения пучков элементарных частиц через вещество, которые привели к созданию планетарной модели атома Резерфорда. При этом возникла проблема: если угловое распределение для α -частиц соответствовало индикатрисе однократного рассеяния частиц ядром и подтверждало модель Резерфорда, то β -частицы имели гауссовское распределение по углу, что соответствовало модели Дж.Дж. Томсона. В работе [4] было выдвинуто предположение, что β -частицы испытывают многократные рассеяния, и предложено выражение для расчета произвольной кратности рассеяния в задаче (1), которое в терминах оптики мутных сред можно переписать в виде

переписать в виде

$$L_n(\tau, \hat{\mathbf{I}}) = \left(\frac{\Lambda}{4\pi}\right)^n \int_0^{\xi_n} \dots \int_0^{\xi_1} \underbrace{\oint \dots \oint}_n \exp\left(-\xi - \sum_{k=1}^n \zeta_k\right) x(\hat{\mathbf{I}}_1, \hat{\mathbf{I}}_n) \times \dots \times x(\hat{\mathbf{I}}_2, \hat{\mathbf{I}}_1) L_0(\hat{\mathbf{I}}_1) d\hat{\mathbf{I}}_1 \dots d\hat{\mathbf{I}}_n d\xi_1 \dots d\xi_n. \quad (2)$$

Траектория лучей при n -кратном рассеянии представляет собой ломаную линию из $n + 1$ сегментов. Оптическая длина и направление каждого из n первых от ПМ-источника сегментов обозначены через ζ_i , $\hat{\mathbf{I}}_i$ соответственно. У последнего сегмента, примыкающего к приемнику излучения, длина

$$\xi = \tau/\mu - \sum_{k=1}^n \zeta_k.$$

Поскольку рассеяние электронов в веществе имеет сильно анизотропный характер, то для малых углов [4] можно пренебречь дисперсией длины путей рассеянных лучей

$$\xi + \sum_{k=1}^n \zeta_k \approx \frac{\tau}{\mu_0}, \quad (3)$$

что после подстановки в (2) позволяет преобразовать (3) к виду

$$L_n(\tau, \hat{\mathbf{I}}) = \frac{1}{n!} \left(\frac{\Lambda\tau}{4\pi\mu_0}\right)^n \exp\left(-\frac{\tau}{\mu_0}\right) \underbrace{\oint \dots \oint}_n x(\hat{\mathbf{I}}_1, \hat{\mathbf{I}}_1) \times \dots \times x(\hat{\mathbf{I}}_{n-1}, \hat{\mathbf{I}}_n) L_0(\hat{\mathbf{I}}_n) d\hat{\mathbf{I}}_1 \dots d\hat{\mathbf{I}}_n.$$

Откуда полная яркость светового поля

$$\begin{aligned} L(\tau, \hat{\mathbf{I}}) &= \sum_{n=0}^{\infty} L_n(\tau, \hat{\mathbf{I}}) = \\ &= e^{-\tau/\mu_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\Lambda\tau/\mu_0)^n}{n!} \left(\frac{1}{4\pi}\right)^n \times \\ &\times \underbrace{\oint \dots \oint}_n x(\hat{\mathbf{I}}_1, \hat{\mathbf{I}}_1) \times \dots \times x(\hat{\mathbf{I}}_2, \hat{\mathbf{I}}_1) d\hat{\mathbf{I}}_1 \dots d\hat{\mathbf{I}}_n = \\ &= e^{-\tau/\mu_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\Lambda\tau/\mu_0)^n}{n!} \Phi_n(\hat{\mathbf{I}}). \end{aligned} \quad (4)$$

Нетрудно видеть, что малоугловое приближение эквивалентно преобразованию УПИ (1) к виду

$$(\hat{\mathbf{I}}_0, \nabla) L(\tau, \hat{\mathbf{I}}) = -L(z, \hat{\mathbf{I}}) + \frac{\Lambda}{4\pi} \oint x(\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}') L(\tau, \hat{\mathbf{I}}') d\hat{\mathbf{I}}'. \quad (5)$$

Из (4) видно, что центральной проблемой в малоугловом приближении является расчет многомерной свертки по телесному углу на сфере $\Phi_n(\hat{\mathbf{I}})$. Здесь возможны три основных пути решения проблемы.

В исторически первом предложенном подходе [5] было постулировано известное из теории вероятности положение, что многомерная свертка гладких функций стремится к нормальному распределению, а в [6] это положение было доказано строго.

Представляя яркость поля в направлении $\hat{\mathbf{I}}$ в виде ряда Тейлора

$$L(z, \mathbf{r}, \hat{\mathbf{I}}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\hat{\mathbf{I}}' - \hat{\mathbf{I}})^n}{n!} \nabla_1^n L,$$

после подстановки ряда в оператор рассеяния УПИ (5) с сохранением первых трех членов в предположении, что индикатриса рассеяния является более резкой функцией угла, чем тело яркости, УПИ (5) приводится к уравнению типа Фоккера–Планка (диффузионное приближение):

$$(\hat{\mathbf{I}}_0, \nabla) L(z, \hat{\mathbf{I}}) + \kappa L(z, \hat{\mathbf{I}}) = \frac{\langle \vartheta^2 \rangle}{2} \Delta_1 L, \quad (6)$$

решение которого и есть гауссоида по углу визирования. Здесь

$$\langle \vartheta^2 \rangle = \frac{1}{4\pi} \oint x(\hat{\mathbf{I}}') (\hat{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{I}}')^2 d\hat{\mathbf{I}}' \approx \frac{1}{2} \int_0^\pi x(\cos\vartheta) \vartheta^2 \sin\vartheta d\vartheta;$$

∇_1^n – градиент в пространстве направлений визирования излучения; $\kappa = (1 - \Lambda)\epsilon$ – показатель поглощения.

Дополнительное предположение о большей анизотропии индикатрисы по сравнению с телом яркости сильно сглаживает все особенности решения и является справедливым только для малых углов в глубинном световом режиме. Этот факт нашел подтверждение в эксперименте с электронными пучками, и в [7] предпринята попытка уточнения решения на большие углы, «сшивая» его с приближением однократного рассеяния.

В работе [8] была предложена другая форма МУП, основанная на теореме сложения для полиномов Лежандра. Если $L_0(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{I}})$ и $x(\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}')$ представить в виде рядов по сферическим функциям:

$$L_0(\tau, \hat{\mathbf{I}}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi} P_k(\hat{\mathbf{I}} \cdot \hat{\mathbf{I}}_0); \quad x(\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}') = \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) P_k(\hat{\mathbf{I}} \cdot \hat{\mathbf{I}}'), \quad (7)$$

то для ПМ-источника выражение для свертки примет вид

$$\Phi_n(\hat{\mathbf{I}}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi} x_k^n P_k(\hat{\mathbf{I}} \cdot \hat{\mathbf{I}}_0). \quad (8)$$

Откуда

$$L(\tau, \hat{\mathbf{I}}) = e^{-\tau/\mu_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi} \exp\left(\frac{\Lambda\tau x_k}{\mu_0}\right) P_k(\hat{\mathbf{I}} \cdot \hat{\mathbf{I}}'). \quad (9)$$

В [9–12] была предложена третья форма МУП. Здесь наряду с пренебрежением дисперсией путей предполагается, что в пределах малых углов свертка на сфере (вращение) может быть заменена сверткой на плоскости, касательной к сфере в $\hat{\mathbf{I}}_0$ (смещение плоскости):

$$\Phi_n(\hat{\mathbf{I}}) \approx$$

$$\approx \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} x(\mathbf{I}_\perp - \mathbf{I}_{\perp n}) \times \dots \times x(\mathbf{I}_{\perp 2} - \mathbf{I}_{\perp 1}) L_0(z, \mathbf{I}_{\perp 1}) d\mathbf{I}_{\perp 1} \dots d\mathbf{I}_{\perp n}, \quad (10)$$

где \mathbf{I}_\perp — проекция $\hat{\mathbf{I}}$ на плоскость, касательную к сфере в точке $\hat{\mathbf{I}}_0$.

При переходе к Фурье-образам от $L_0(z, \hat{\mathbf{I}})$ и $x(\mathbf{I}_\perp - \mathbf{I}'_\perp)$ получим по теореме о свертке для случая ПМ-источника

$$L(\tau, \mathbf{I}_\perp) = e^{-\tau/\mu_0} \int_{-\infty}^{+\infty} L_0(k) \exp\left(\frac{\Lambda \tau x(k)}{\mu_0}\right) J_0(kl_\perp) k dk, \quad (11)$$

где $J_0(\cdot)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

В работах [13, 14] была рассмотрена связь трех форм МУП между собой и проведено их сравнение по точности. Показано, что наиболее последовательной и точной является вторая форма, так как она пренебрегает только дисперсией путей рассеянных фотонов, однако не допускает обобщения на другие источники, поскольку в силу симметрии ПМ-источника $L_0(\hat{\mathbf{I}})$ не зависит от ξ . Третья форма следует из второй при ограничении малыми углами, когда возможна замена вращений на сфере на преобразование плоскости:

$$P_k(\cos\vartheta) \approx J_0(k\vartheta), \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi} \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} k dk. \quad (12)$$

Переход от второй и третьей форм МУП к первой основан на разложении x_k или $x(k)$ в ряд Тейлора с сохранением трех первых членов. Следует отметить, что представление (3) не совместимо с точными граничными условиями [14] и МУП пренебрегает в граничных условиях обратным рассеянием.

Хотя наиболее полной формой МУП, из которой следуют все остальные, является вторая форма [8], аналитический вид третьей формы МУП [10–12] оказался наиболее плодотворным для решения многих прикладных задач [1]. В статье [15] эта форма МУП была обобщена на векторный случай учета спина частиц, что эквивалентно в оптике учету переноса поляризованного излучения. Однако возможно обобщение второй формы МУП, позволяющее преодолеть свойственные ей ограничения.

Перейдем в краевой задаче (1) к системе дифференциальных уравнений метода сферических гармоник [3], однако в системе относительно направления падения излучения $\hat{\mathbf{I}}_0$. Для этого представим решение в виде

$$\begin{aligned} L(\tau, \mu, \phi) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi} \sqrt{\frac{(k-m)!}{(k+m)!}} C_k^m(\tau) P_k^m(v) e^{im\phi} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi} C_k^m(\tau) Q_k^m(v) e^{im\phi}, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$v = (\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}_0); \quad \mu = v\mu_0 + \sqrt{1-v^2} \sqrt{1-\mu_0^2} \cos\phi;$$

$P_l^m(\mu)$ — присоединенные полиномы Лежандра, причем $P_l^m(\mu) \equiv P_l^m(\mu)$;

$$Q_l^m(\mu) = \sqrt{\frac{(l-n)!}{(l+n)!}} P_l^m(\mu)$$

— перенормированные полиномы Лежандра [3].

Подставим (13) в (1), умножим его на $Q_k^m(v) e^{im\phi}$ и проинтегрируем по полному телесному углу. С учетом ортогональности, рекуррентных соотношений и теоремы сложения для полиномов Лежандра получим систему связанных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} &\mu_0 \frac{d}{d\tau} \left[\sqrt{(k-m)(k+m)} C_{k-1}^m(\tau) + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{(k+m+1)(k-m+1)} C_{k+1}^m(\tau) \right] + \\ &+ \frac{\sqrt{1-\mu_0^2}}{2} \frac{d}{d\tau} \left\{ \left[\sqrt{(k-m+1)(k-m+2)} C_{k+1}^{m-1}(\tau) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sqrt{(k+m)(k+m-1)} C_{k-1}^{m-1}(\tau) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \left[\sqrt{(k+m+1)(k+m+2)} C_{k+1}^{m+1}(\tau) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sqrt{(k-m-1)(k-m)} C_{k-1}^{m+1}(\tau) \right] \right\} = \\ &= -(2k+1)(1-\Lambda x_k) C_k^m(\tau). \end{aligned} \quad (14)$$

Полученная система отличается от общепринятой в методе сферических гармоник (СГ) для ПМ-источника [3] выбором иной сферической системы координат в пространстве направлений визирования яркости относительно оси $\hat{\mathbf{I}}_0$, а не $\hat{\mathbf{z}}$.

Для дальнейшего решения сделаем следующие допущения, основанные на представлении о сильной анизотропии тела яркости.

1) Введем непрерывную зависимость коэффициентов ряда (13) от номеров гармоник $C_k^m(\tau) = C^m(\tau, k)$, которая вследствие угловой анизотропии является медленной монотонной функцией, в связи с этим возможно представление:

$$C^m(\tau, k \pm 1) \approx C^m(\tau, k) \pm \frac{\partial C^m(\tau, k)}{\partial k}. \quad (15)$$

2) Основной вклад в ряд (13) дают члены с номерами $k \gg 1$, и степень анизотропии существенно больше ее азимутальной асимметрии $k \gg m$, что позволяет сделать следующие приближения:

$$\begin{aligned} \sqrt{(k-m)(k+m)} &\approx k; \\ \sqrt{(k-m+1)(k-m+2)} &\approx k - \frac{(m-1)(2k+1)}{2k}; \\ \sqrt{(k+m+1)(k+m+2)} &\approx k + \frac{(m+1)(2k+1)}{2k}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{(k+m+1)(k-m+1)} &\approx k+1; \\ \sqrt{(k+m)(k+m-1)} &\approx \kappa + \frac{(m-1)(2k+1)}{2\kappa}; \\ \sqrt{(k-m)(k-m-1)} &\approx \kappa - \frac{(m+1)(2k+1)}{2\kappa},\end{aligned}$$

где введено обозначение $\kappa = \sqrt{k(k+1)}$.

Подставляя сделанные допущения в (14), с заменой переменной k на κ получим

$$\begin{aligned}\mu_0 \frac{\partial C^m}{\partial \tau} + \frac{\sqrt{1-\mu_0^2}}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} \times \\ \times \left[\frac{\partial C^{m+1}}{\partial k} + \frac{\partial C^{m-1}}{\partial k} + \frac{1}{\kappa} \left((m+1)C^m - (m-1)C^m \right) \right] = \\ = -(1 - \Lambda x_k) C^m(\tau, \kappa).\end{aligned}\quad (16)$$

В уравнении (16) с учетом условия $k \gg 1$ и предположения о медленной монотонной зависимости C^m от номера k отброшен член со второй производной как малая величина. Из формы уравнения (16) видно, что в отличие от МУП [8], где система уравнений метода СГ «разваливается» на независимые уравнения для каждого из коэффициентов гармоник, здесь уравнения «зацепляются», что более адекватно процессу переноса излучения в среде.

Введем функцию $f(\tau, \mathbf{l}_{0\perp}, \boldsymbol{\kappa})$ такую, что ее азимутальный спектр равен искомой функции:

$$f(\tau, \mathbf{l}_{0\perp}, \boldsymbol{\kappa}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C^m(\tau, \kappa) e^{im\psi}, \quad (17)$$

причем

$$C^m(\tau, \kappa) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau, \mathbf{l}_{0\perp}, \boldsymbol{\kappa}) e^{-im\psi} d\psi.$$

Нетрудно отметить следующие свойства ряда (17):

$$\begin{aligned}\sum_{m=-\infty}^{\infty} C^{m\pm 1}(\tau, \kappa) e^{im\psi} &= e^{\mp i\psi} f(\tau, \mathbf{l}_{0\perp}, \boldsymbol{\kappa}), \\ \sum_{m=-\infty}^{\infty} (m \pm 1) C^{m\pm 1}(\tau, \kappa) e^{im\psi} &= -i e^{\mp i\psi} \frac{\partial f(\tau, \mathbf{l}_{0\perp}, \boldsymbol{\kappa})}{\psi}.\end{aligned}\quad (18)$$

Умножим уравнение (16) на $e^{im\psi}$ и просуммируем по m от $-\infty$ до $+\infty$. Тогда на основании свойств (18) получим выражение

$$\begin{aligned}\sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial C^{m+1}}{\partial k} + \frac{\partial C^{m-1}}{\partial k} + \frac{1}{\kappa} \left((m+1)C^m - (m-1)C^m \right) \right] e^{im\psi} = \\ = 2 \left(\cos\psi \frac{\partial f}{\partial \kappa} - \frac{\sin\psi}{\kappa} \frac{\partial f}{\partial \psi} \right) = 2(\hat{\mathbf{l}}_{0\perp}, \nabla_{\boldsymbol{\kappa}}) f,\end{aligned}$$

которое приводит (16) к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial \tau} [\mu_0 f + (\mathbf{l}_{0\perp}, \nabla_{\boldsymbol{\kappa}}) f] = -(1 - \Lambda x_k) f(\tau, \mathbf{l}_{0\perp}, \boldsymbol{\kappa}). \quad (19)$$

Представим решение (19) в виде

$$f(\tau, \mathbf{l}_{0\perp}, \boldsymbol{\kappa}) = \exp \left[-\frac{\tau}{\mu_0} (1 - \Lambda F(\mathbf{l}_{0\perp}, \boldsymbol{\kappa})) \right], \quad (20)$$

что позволяет решить (19) интегрированием вдоль характеристики

$$\begin{aligned}F(\mathbf{l}_{0\perp}, \boldsymbol{\kappa}) = \\ = \frac{\mu_0}{\sqrt{1-\mu_0^2}} \int_{-\infty}^0 x \left(\boldsymbol{\kappa} + \zeta \hat{\mathbf{l}}_{0\perp} \right) \exp \left(\frac{\mu_0}{\sqrt{1-\mu_0^2}} \zeta \right) d\zeta + u_0(z),\end{aligned}\quad (21)$$

где u_0 — произвольная функция, определяемая из граничных условий.

Граничные условия в краевой задаче (1) содержат δ -функцию по углу визирования, что означает $F(z, \mathbf{l}_{0\perp}, \boldsymbol{\kappa}) \xrightarrow{\kappa \rightarrow 0} 0$. Откуда $u_0 = 0$, и решение (19) окончательно запишется в виде

$$f(\tau, \mathbf{l}_{0\perp}, \boldsymbol{\kappa}) = \exp \left\{ -\frac{\tau}{\mu_0} + \frac{\Lambda \tau}{\mu_0} \int_0^{\infty} x \left(\boldsymbol{\kappa} - \zeta \frac{\sqrt{1-\mu_0^2}}{\mu_0} \hat{\mathbf{l}}_{0\perp} \right) e^{-\zeta} d\zeta \right\}. \quad (22)$$

Соответственно для коэффициентов гармоник получим

$$\begin{aligned}C_k^m(\tau) = \exp \left(-\frac{\tau}{\mu_0} \right) \frac{1}{2\pi} \times \\ \times \int_0^{2\pi} \cos m\varphi \exp \left[\frac{\Lambda \tau}{\mu_0} \int_0^{\infty} x \left(\sqrt{\kappa^2 + a^2 \zeta^2} - 2\kappa a \zeta \cos\varphi \right) e^{-\zeta} d\zeta \right] d\varphi,\end{aligned}\quad (23)$$

где

$$a = \text{tg} \theta_0 = \sqrt{1-\mu_0^2}/\mu_0.$$

В приложениях часто используется индикатриса Хеньи—Гринштейна. В этом случае $x_k = g^k$ и внутренний интеграл в (23) приобретает вид

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} x \left(\sqrt{\kappa^2 + a^2 \zeta^2} - 2\kappa a \zeta \cos\varphi \right) e^{-\zeta} d\zeta = \\ = \frac{\kappa}{a} \int_0^{\infty} \exp \left[\frac{\kappa}{a} \left(a \ln g \sqrt{1 + \zeta(\zeta - 2\cos\varphi)} - \zeta \right) \right] d\zeta.\end{aligned}$$

Полученное решение представляет собой малоугловую модификацию метода сферических гармоник (МСГ), является обобщением второй формы МУП и переходит в него при $\mu_0 \rightarrow 1$. МСГ легко обобщается на случаи произвольного источника излучения [16–18]. Аналитическая форма МСГ в виде ряда по сферическим функциям значительно удобнее при численных расчетах, чем вычисление несобственного интеграла в форме МУП [9–12]. Индикатриса рассеяния среды входит в решение в виде коэффициентов разложения по полиномам Лежандра, что позволяет использовать их непосредственные значения из модели оптических характеристик среды и теории Ми [19] без дополнительных приближений.

С учетом связи присоединенных полиномов Лежандра с функциями Бесселя произвольного порядка можно показать аналогично [18], что для малых

углов визирования уравнение (19) эквивалентно преобразованию УПИ к виду

$$(\hat{\mathbf{I}}, \nabla) = (\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{z}}) \frac{\partial}{\partial \tau} + (\mathbf{I}_\perp, \nabla_\perp) \approx [\mu_0 + (\mathbf{I}_\perp, \mathbf{I}_{0\perp})] \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad (24)$$

где ∇_\perp , \mathbf{I}_\perp – градиент и проекция $\hat{\mathbf{I}}$ в направлении, перпендикулярном $\hat{\mathbf{I}}_0$.

Если далее воспользоваться третьей формой МУП, то после преобразования Фурье с учетом связи разложения по сферическим функциям с преобразованием Фурье [18] получается уравнение, эквивалентное (19). Однако (24) показывает, что полученное решение (23) должно позволить провести описание поворота максимума тела яркости от направления падения в приповерхностном слое к вертикальному направлению в глубине среды. Если обратиться к выражению (4), определяющему физическое содержание малоуглового приближения, то в МСГ при вычислении свертки $\Phi_n(\mathbf{l})$ учитывается указанный поворот тела яркости. При этом пренебрежение дисперсией путей рассеянных лучей остается, что следует из (23) и можно аналитически просто про-

иллюстрировать на примере пространственной облученности в случае индикатрисы Хеньи–Гринштейна:

$$E_0(\tau) = \oint L(\tau, \mu, \varphi) d\hat{\mathbf{l}} = C_0^0(\tau) = \exp\left[-\frac{\tau}{\mu_0} \left(1 - \frac{\Lambda}{1 - a \ln g}\right)\right]. \quad (25)$$

Нетрудно видеть, что по сравнению с [8] МСГ приводит к уменьшению эффективного Λ в среде при увеличении угла падения или увеличению эффективного пути поглощения света.

Для определения точности и границ применимости было проведено сравнение расчетов световых полей с помощью выражения (23) и численным методом [3] при широком варьировании оптических и геометрических параметров среды.

На рис. 1–3 представлено сравнение расчетов световых полей в мутной среде в малоугловом приближении с точным численным расчетом по [3].

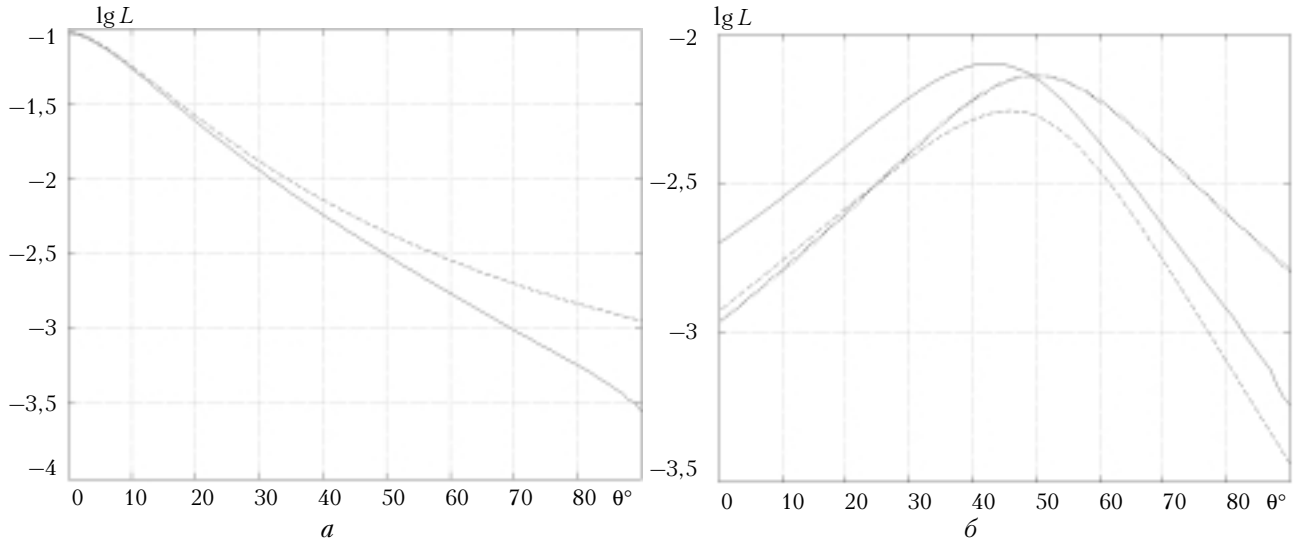


Рис. 1. Тело яркости светового поля в мутной среде ($\Lambda = 0,8$, $g = 0,97$, $\tau = 15$): $a - \theta_0 = 0^\circ$; $b - \theta_0 = 50^\circ$

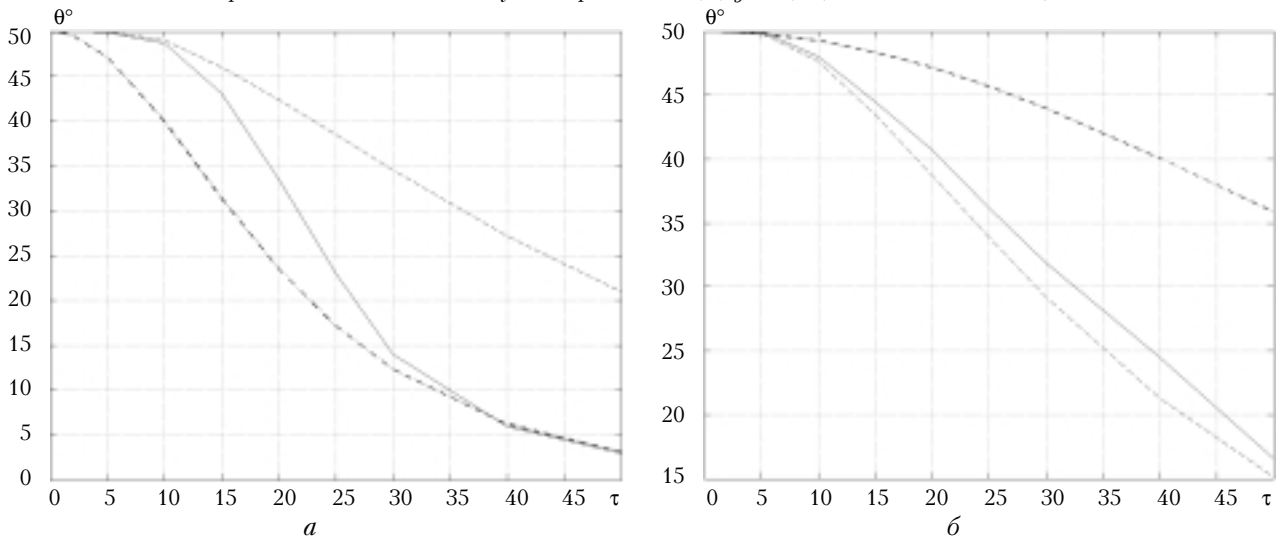


Рис. 2. Поворот максимума тела яркости в мутной среде ($g = 0,97$, $\theta_0 = 50^\circ$) с глубиной: $a - \Lambda = 0,8$; $b - \Lambda = 0,99$

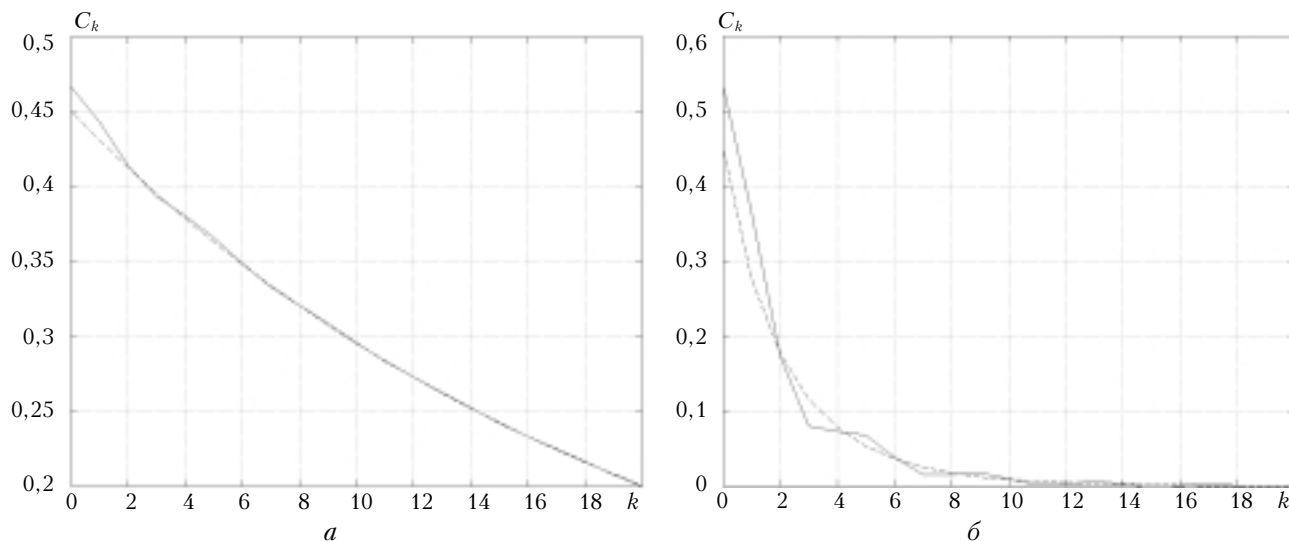


Рис. 3. Зависимость амплитуд гармоник углового спектра тела яркости в мутной среде ($\Lambda = 0,8$, $\theta_0 = 50^\circ$) от номера: $a - g = 0,97$, $\tau = 10$; $\delta - g = 0,7$, $\tau = 1$

Точное решение изображается сплошной, МСГ — штриховой, МУП — пунктирной линиями, а штрихпунктирной линией показана модификация диффузионного приближения с частичным учетом дисперсии траекторий лучей [1]. Из анализа приведенных зависимостей можно сделать следующие выводы:

1. Областью применимости малоуглового приближения является вся передняя полусфера углов визирования, поэтому название «малоугловое» отражает не область применимости, а сущность лежащего в его основе допущения.

2. Изменение оптических характеристик среды (увеличение Λ или уменьшение анизотропии рассеяния) сужает область применимости, однако оно достаточно хорошо описывает решение либо в области меньших углов, либо для меньших оптических толщ. Областью справедливости МСГ является требование анизотропии тела яркости, когда основной вклад имеют высокие гармоники, а не анизотропии рассеяния.

3. Следовательно, МСГ носит не асимптотический, а промежуточно-асимптотический характер, когда приближенное решение аппроксимирует точное практически на всей области его определения.

4. Диффузионное приближение с учетом дисперсии траекторий лучей [1] достаточно хорошо описывает интегральные параметры поля, однако абсолютно не пригодно для описания тела яркости (сходится в среднем, но не в равномерной метрике).

5. МСГ является наиболее общей формой малоуглового приближения, из которого следуют все остальные формы в случае малых углов визирования или сильной анизотропии рассеяния.

1. Зега Э.П., Иванов А.П., Кацев И.Л. Перенос изображения в рассеивающих средах. Минск: Наука и техника, 1985. 240 с.
2. Масленников М.В. Аксиоматическая модель явлений переноса частиц. М.: Наука, 1989. 192 с.
3. Будаков В.П., Козельский А.В., Савицкий Е.Н. Улучшение сходимости метода сферических гармоник при

сильно анизотропном рассеянии // Оптика атмосф. и океана. 2004. Т. 17. № 1. С. 36–41.

4. Wentzel G. Zur Theorie der Streuung von β -Strahlen // Ann. d. Phys. 1922. B. 69. H. 5. S. 335–368.
5. Bothe W. Das allgemeine Fehlergesetz, die Schwankungen der Feldstärke in einem Dielektricum und die Zerstreuung der β -Strahlen // Zeit. f. Physik. 1921. B. 5. H. 1. S. 63–69.
6. Bothe W. Die Streuabsorption der Elektronenstrahlen // Zeit. f. Physik. 1929. B. 54. H. 3. S. 161–178.
7. Williams E.J. Concerning the scattering of fast electrons and cosmic-ray particles // Proc. Roy. Soc. London. A. 1939. V. 169. P. 531–580.
8. Goudsmit S., Saunderson J.L. Multiple Scattering of Electrons // Phys. Rev. 1940. Pt. I. V. 57. P. 24–29; Pt. II. V. 58. P. 36–42.
9. Компанеев А.С. Многократное рассеяние быстрых электронов и α -частиц в тяжелых элементах // Ж. эксперим. и теор. физ. 1945. Т. 15. Вып. 6. С. 235–243.
10. Компанеев А.С. Многократное рассеяние тонких пучков быстрых электронов // Ж. эксперим. и теор. физ. 1947. Т. 17. Вып. 12. С. 1059–1062.
11. Molière G. Theorie der Streuung schneller geladener Teilchen. I. Einzelstreuung am abgeschirmten Coulomb-Feld // Zeit. f. Natur. 1947. B. 2a. H. 3. S. 133–145; II. Mehrfach- und Vielfachstreuung // Ibidem. 1948. B. 3a. H. 2. S. 78–97.
12. Snyder H.S., Scott W.T. Multiple scattering of fast charged particles // Phys. Rev. 1949. V. 76. N 2. P. 220–225.
13. Lewis H.W. Multiple Scattering in an Infinite Medium // Phys. Rev. 1950. V. 78. N 5. P. 526–529.
14. Wang M.C., Guth E. On the Theory of Multiple Scattering, Particular of Charged Particles // Phys. Rev. 1951. V. 84. N 6. P. 1092–1111.
15. Muehlschlegel B., Koppe H. Theorie der Vielfachstreuung polarisierter Elektronen // Zeit. f. Physik. 1958. B. 150. S. 474–496.
16. Будаков В.П., Сармин С.Э. Решение уравнения переноса излучения методом сферических гармоник в малоугловой модификации // Оптика атмосф. 1990. Т. 3. № 9. С. 981–987.
17. Астахов И.Е., Будаков В.П., Лисицин Д.В., Селиванов В.А. Решение векторного уравнения переноса в малоугловой модификации метода сферических гармоник // Оптика атмосф. и океана. 1994. Т. 7. № 6. С. 753–761.

18. Будак В.П., Векленко Б.Б. Поляризация светового поля точечного мононаправленного источника света в мутной среде с анизотропным рассеянием // Оптика атмосф. и океана. 2002. Т. 7. № 6. С. 753–761.

19. de Rooij W.A., van der Stap C.C.A.H. Expansion of Mie scattering matrices in generalized spherical functions // Astron. and Astrophys. 1984. V. 131. P. 237–248.

V.P. Budak, A.V. Kozelskii. On the accuracy and application range of the small angle approximation in radiative transfer theory.

The small angle approximation in solution of the radiative transfer equation is one of the most efficient methods for solution of applied problems of atmospheric and ocean optics. The analytical complexities of the radiative transfer equation (RTE) have allowed formulating only primary, qualitative estimate of the accuracy and application range of the small angle approximation (SAA). Another approach based on the comparison of the SAA calculations with the similar numerical solutions of RTE is possible. However, numerical methods of the RTE solution in media with strong anisotropic scattering are ineffective.

This approach can be readily generalized for cases of arbitrary boundary conditions.