

Д.А. Безуглов

КУМУЛЯНТНЫЙ МЕТОД ОЦЕНКИ ЭФФЕКТИВНОСТИ СЕГМЕНТИРОВАННОГО ЗЕРКАЛА АДАПТИВНОЙ ОПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Эффективность функционирования адаптивных оптических систем во многом зависит от качества аппроксимации фазового фронта сегментированным зеркалом. Данная статья посвящена разработке нового метода анализа эффективности функционирования сегментированного зеркала адаптивной системы на базе кумулянтного критерия эффективности на фоне пуассоновских шумов в каналах управления.

1. Введение

В настоящее время при создании адаптивных оптических систем, компенсирующих нестационарные искажения световых пучков при их распространении в турбулентной атмосфере, широко используются сегментированные адаптивные зеркала [1,2]. Это обусловлено прежде всего тем, что, несмотря на ступенчатую аппроксимацию фазового фронта, они обеспечивают достаточно высокое качество коррекции, вполне сравнимое с качеством коррекции гибким зеркалом. При построении на базе таких зеркал адаптивных оптических систем возникает проблема оценки их эффективности. Оценка потенциальных характеристик адаптивного зеркала при компенсации искажений волнового фронта оптического излучения позволяет предсказать, насколько эффективна система, использующая данное зеркало. При рассмотрении данной проблемы следует четко разграничивать два возникающих при этом вида ошибок. Первый вид ошибок, методика оценки которых изложена в [3], возникает из-за конечного числа приводов сегментированного адаптивного зеркала. Такие ошибки будем называть в дальнейшем ошибками аппроксимации. Второй вид ошибок – это ошибки, обусловленные наличием шумов в каналах управления адаптивной оптической системы. В дальнейшем эти ошибки будем называть шумовыми. Специфика этих двух видов ошибок заключается в том, что при увеличении числа приводов зеркала адаптивной оптической системы величина первой ошибки уменьшается, зато возрастает величина второй. Таким образом, возникает стандартная задача оптимизации вида

$$\min_N \sigma^2 = \sigma_a^2 + \sigma_c^2, \quad (1)$$

где σ^2 – дисперсия суммарной ошибки; σ_a^2 – дисперсия ошибки аппроксимации; σ_c^2 – дисперсия шумовой ошибки.

Следует отметить, что наиболее интересным с точки зрения анализа эффективности является случай наличия в каналах управления адаптивной оптической системы пуассоновских шумов, обусловленных дробовыми шумами фотоприемников. Именно такой случай возникает при анализе эффективности системы апертурного зондирования с сегментированным зеркалом.

В данной статье предложен принципиально новый подход к решению задачи оценки эффективности функционирования сегментированного зеркала адаптивной оптической системы на основе использования кумулянтного критерия эффективности.

Преимущество использования аппарата кумулянтного анализа [4] вызвано тем, что кумулянты в отличие от моментов случайных величин имеют четко выраженный статистический смысл и могут быть заданы независимо друг от друга. Это приводит к тому, что различные статистические средние на выходе нелинейной системы достаточно просто выражаются именно через кумулянты входных переменных. Второе преимущество кумулянтов связано с тем, что учет их высших порядков позволяет достаточно просто описать любую степень негауссовости случайных величин. Именно по этой причине основную ценность кумулянтное описа-

ние приобретает для негауссовых переменных, которыми являются, например, пуассоновские случайные величины. Следует отметить, что конечному набору кумулянтов всегда соответствует некоторая вещественная функция, аппроксимирующая вероятностное распределение, в то время как несингулярной функции, все высшие моменты которой равнялись бы нулю, не существует. Это обстоятельство имеет особо важное значение при приближенном представлении вероятностных распределений тех случайных величин, для которых возможно отыскать лишь конечные наборы кумулянтов. Именно такой подход является целесообразным при исследовании преобразований пуассоновских случайных величин, описывающих процессы, протекающие в адаптивных оптических системах.

2. Кумулянтный критерий эффективности

Рассмотрим задачу анализа эффективности сегментированного адаптивного зеркала в следующей постановке. Введем евклидово пространство P со скалярным произведением вида

$$\int U(r) V(r) dr = (U, V) \quad (2)$$

и нормой

$$||U, V|| = (U, V)^{0,5}. \quad (3)$$

В пространстве P рассмотрим систему ортонормированных функций S таких, что:

$$\begin{aligned} (S_i, S_j) &= 0 \quad \text{при } i \neq j, \\ (S_i, S_j) &= 1 \quad \text{при } i = j. \end{aligned} \quad (4)$$

Поверхность адаптивного зеркала может быть представлена как линейная комбинация функций $S_i(r)$ [3], которые в дальнейшем будем называть функциями отклика сегментированного зеркала:

$$W(r) = \sum_{i=1}^N S_i(r) a_i, \quad r \in \Omega, \quad (5)$$

где $W(r)$ – функция, описывающая профиль сегментированного адаптивного зеркала; a_i – управляющее воздействие в i -м канале управления; Ω – плоскость апертуры адаптивной оптической системы; N – число приводов.

Функции отклика $S_i(r)$ представим следующим образом:

$$\begin{aligned} S_i(r) &= 1 \quad \text{при } r \in \Omega_i, \\ S_i(r) &= 0 \quad \text{при } r \notin \Omega_i, \end{aligned} \quad (6)$$

где Ω_i – поверхность i -й субапертуры адаптивной оптической системы.

В принципе форма субапертуры адаптивной оптической системы может быть произвольной, например шестиугольной (гексагональная упаковка), круглой или прямоугольной. В последнем случае функция отклика имеет вид, например:

$$\begin{aligned} S_i(r) &= 1 \quad \text{при } x \in [x_i + \Delta x] \quad y \in [y_i + \Delta y], \quad r = \{x, y\}; \\ S_i(r) &= 0 \quad \text{при } x \notin [x_i + \Delta x] \quad y \notin [y_i + \Delta y]. \end{aligned} \quad (7)$$

Обычно при описании субапертур различной формы используют индексы i и j . Однако при конечном числе субапертур для уменьшения числа индексов их всегда можно перенумеровать. Также следует отметить, что $W(r)$ будет отличаться от требуемого фазового профиля $\phi(r)$. Это отличие и есть собственно ошибка аппроксимации, которая в данной статье рассматриваться не будет.

Ограничения на динамический диапазон управляющих воздействий можно не рассматривать, так как диапазон перемещений современных зеркал на базе пьезоэлектрических приводов [1] удовлетворяет предъявляемым к нему требованиям (как правило, $\pm 2 \lambda_1$, где λ_1 – длина волны оптического излучения).

При функционировании адаптивной системы независимо от алгоритма управления сегментированным зеркалом в каналах управления присутствуют аддитивные шумы, которые в дальнейшем будем описывать системой случайных величин n_i . Следует отметить, что такой подход позволяет существенно упростить математические выкладки, а полученные результаты легко обобщить на стационарные случайные процессы. Положим, что известна система кумулянтов κ , описывающих систему пуассоновских случайных величин n_i . Для такого случая все совместные кумулянты κ_{ij} необходимо положить равными нулю, а все остальные кумулянты κ_i равными λ , где λ – параметр пуассоновского распределения. Для реальной адаптивной системы кумулянтные характеристики могут быть всегда пересчитаны ко входу сегментированного адаптивного зеркала. В таком случае шумовая ошибка запишется следующим образом:

$$\Delta W(r) = W(r) - W^*(r, n), \quad r \in \Omega$$

или

$$\Delta W(r) = \sum_{i=1}^N S_i(r) a_i - \sum_{i=1}^N S_i(r) (a_i + n_i) = \sum_{i=1}^N S_i(r) n_i, \quad (8)$$

где $W^*(r, n)$ – отклик зеркала при наличии шумов в каналах управления.

Усреднив величину ошибки по апертуре адаптивной оптической системы, получим

$$\Delta W_s(r) = 1/s \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N S_i(r) n_i dr. \quad (9)$$

Очевидно, что $\Delta W_s(r)$ есть случайная величина. Во многих работах [3, 5] ранее априорно предполагалось, что математическое ожидание

$$M[(\Delta W_s(r))] = m_w = 0. \quad (10)$$

При этом рассматривался только второй центральный момент $M[(\Delta W_s(r) - m_w)^2]$ – дисперсия. Однако в реальных адаптивных оптических системах соотношение $m_w = 0$, как правило, не выполняется, а с учетом негауссовости случайных величин n_i остается открытым вопрос о величине высших моментов случайной величины $\Delta W_s(r)$. В этом случае целесообразно рассматривать критерий эффективности сегментированного зеркала адаптивной оптической системы вида

$$\theta_k = \langle (1/s \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N S_i(r) n_i dr)^k \rangle, \quad k = 1, L, \quad (11)$$

где $\langle * \rangle$ – угловые скобки, обозначающие здесь и в дальнейшем усреднение по множеству реализаций.

По сути, элементы вектора θ есть моменты высшего порядка случайной величины $\Delta W_s(r)$. В дальнейшем мы будем получать и анализировать выражения $\theta_k = f(S_i(r) n_i, N, \kappa)$. Такое описание оказалось чрезвычайно удобным и позволило получить аналитические выражения для многих практически важных случаев.

3. Вывод основных соотношений

При $k = 1$ выражение (11) будет иметь вид

$$\theta_1 = \langle (1/s \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N S_i(r) n_i dr) \rangle = N \alpha_1, \quad (12)$$

где α_1 – момент первого порядка случайной величины n_i ; s – площадь апертуры адаптивной оптической системы.

При наличии в каналах управления адаптивной оптической системы пуассоновских шумов будем иметь $\alpha_1 = \lambda = \kappa_1$, где λ – параметр распределения Пуассона.

Для θ_2 можно записать следующее выражение:

$$\theta_2 = \langle (1/s \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N S_i(r) n_i dr_1 \times 1/s \int_{\Omega} \sum_{j=1}^N S_j(r) n_j dr_2) \rangle. \quad (13)$$

В выражении (13) в соответствии со свойствами кумулянтов пуассоновских случайных величин

$$\langle n_i n_i \rangle = \alpha_2 = \lambda^2 + \lambda, \quad (14)$$

где α_2 – момент второго порядка случайной величины n_i .

С учетом (14) и того, что все произведения $S_i S_j$ при $i \neq j$ в соответствии с (4) в итоге дадут 0, выражение (13) запишется следующим образом:

$$\theta_2 = N (\lambda^2 + \lambda). \quad (15)$$

Для θ_3 будем иметь

$$\theta_3 = \langle (\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \int_{\Omega} \int_{\Omega} \int_{\Omega} S_m S_n S_r dr_1 dr_2 dr_3 n_i n_j n_k) \rangle. \quad (16)$$

В выражении (16) в соответствии со свойствами кумулянтов пуассоновских случайных величин

$$\langle n_i n_i n_i \rangle = \alpha_3 = \kappa_3 + 3 \kappa_1 \kappa_2 + \kappa_1^3 = \lambda^3 + 3 \lambda^2 + \lambda. \quad (17)$$

Поступая аналогичным образом, с учетом (4), (17) имеем

$$\theta_3 = N (\lambda^3 + 3 \lambda^2 + \lambda). \quad (18)$$

Выражение для θ_4 запишется в виде

$$\theta_4 = \langle (\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \int_{\Omega} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \int_{\Omega} S_m S_n S_r S_t dr_1 dr_2 dr_3 dr_4 n_i n_j n_k n_l) \rangle. \quad (19)$$

Для пуассоновских случайных величин будем иметь

$$\langle n_i n_i n_j n_j \rangle = \alpha_4 = \lambda^4 + 2 \lambda^3 + \lambda^2. \quad (20)$$

С учетом (20) выражение (19) можно записать как

$$\theta_4 = N (\lambda^4 + 2 \lambda^3 + \lambda^2). \quad (21)$$

Поступая аналогичным образом, учитывая свойства ортогональности ступенчатых функций отклика и пользуясь соответствующими выражениями для моментов высшего порядка случайной величины n_i через кумулянты пуассоновского распределения, можно получить соответствующие аналитические выражения для θ_k при заданном значении k .

4. Плотность распределения шумовой ошибки для гипотетического зеркала

Аппроксимируем значения элементов вектора θ с учетом нормировки на N следующим выражением:

$$\theta_k = \sum_{m=1}^k (m \lambda)^{k-m} + \lambda^k. \quad (22)$$

Такая аппроксимация достаточно близка к выражениям (12), (15), (18), (21), особенно при $\lambda \gg 1$. Характеристическая функция такого распределения запишется в следующем виде [4]:

$$Q(i u) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \theta_k (i u)^k / k!. \quad (23)$$

Подставив (22) в выражение (23), получим

$$Q(i u) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k (i u)^k / k! + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^k (m \lambda)^{k-m} (i u)^k / k!. \quad (24)$$

Первые два слагаемых соотношения (24) запишутся в следующем виде:

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{2k} (-1)^k (u)^k / (2k)! + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{2k-1} (-1)^k (u)^{k-1} / (2k-1)! = \cos(\lambda u) + i \sin(\lambda u) = \exp(i \lambda u). \quad (25)$$

Третье слагаемое выражения (24) преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^k (m \lambda)^{k-m} (i u)^k / k! &= \sum_{m=1}^{\infty} (m \lambda)^{-m} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (m \lambda)^{2k} (-1)^k (u)^{2k} / (2k)! + i \sum_{k=1}^{\infty} (m \lambda)^{2k-1} (-1)^k (u)^{2k-1} / (2k-1)! \right) = \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} (\exp(i m \lambda u) - 1) / (\lambda m)^m, \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (26)$$

В окончательном виде характеристическая функция искомой плотности запишется:

$$Q(i u) = \exp(i \lambda u) + \sum_{k=1}^{\infty} (\exp(i m \lambda u) - 1) / (\lambda m)^m. \quad (27)$$

Для нахождения ненормированной плотности распределения P^* необходимо вычислить обратное преобразование Фурье от характеристической функции $Q(iu)$:

$$P^*(x) = 1/2 \pi \int_{-\infty}^{\infty} Q(i u) \exp(i x u) dx. \quad (28)$$

Подставив (27) в (28), получим

$$\begin{aligned} P^*(x) &= 1/2 \pi \int_{-\infty}^{\infty} (\exp(i \lambda u) + \sum_{m=1}^{\infty} (\exp(i m \lambda u) - 1) / (\lambda m)^m) \exp(i x u) dx = \delta(\lambda - x) + \sum_{m=1}^{\infty} (\delta(m \lambda - x) - \\ &- \delta(x)) / (\lambda m)^m, \quad n = \overline{1, \infty}. \end{aligned} \quad (29)$$

Окончательное выражение для плотности $P^*(x)$ запишется следующим образом:

$$P^*(m) = 1 / (\lambda m)^m. \quad (30)$$

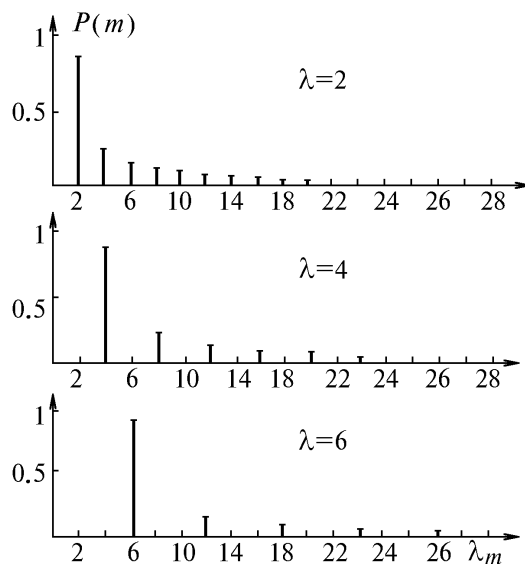
Для вычисления нормировочного множителя для искомой плотности распределения просуммируем ряд (30) при $m \rightarrow \infty$:

$$\sum_{m=1}^{\infty} 1 / (\lambda m)^m = 1/m! \lambda^m = \exp(1/\lambda) - 1. \quad (31)$$

Выражение для плотности распределения с учетом нормировки запишется в следующем виде:

$$P(m) = 1/((\lambda m)^m \exp(1/\lambda - 1)). \quad (32)$$

Таким образом, как и следовало ожидать, полученная плотность распределения оказалась дискретной. Вид полученной плотности при различных значениях λ приведен на рисунке.



5. Выводы

Разработанный метод оценки эффективности гибкого адаптивного зеркала целесообразно использовать на этапе проектирования адаптивной оптической системы при обосновании выбора числа каналов управления с учетом качества аппроксимации фазового фронта сегментированным зеркалом. Если ставится задача получения точных значений элементов кумулянтного критерия, то при вычислении сумм вида (12), (15), (18), (21) целесообразно использовать конкретные значения моментов высшего порядка, вычисленные с использованием системы кумулянтов соответствующих случайных величин, например пуассоновских. Следует особо подчеркнуть универсальность разработанного метода. Так, если вместо системы кумулянтов пуассоновского распределения задать систему кумулянтов другого вида, то уже не представляет труда получение соответствующих аналитических выражений для элементов вектора θ при конкретном значении параметров распределения шумов в каналах управления.

1. Безуглов Д. А. //Оптика атмосферы. 1990. N 2. С. 211–213.
2. Канев Ф. Ю., Лукин В. П., Фортес Б. В. //Оптика атмосферы и океана. 1992. N 12. С. 1324–1328.
3. Воронцов М. А., Шмальгаузен В. И. Принципы адаптивной оптики. М.: Наука, 1985. 335 с.
4. Малахов А. Н. Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований. М.: Сов. радио, 1978. 376 с.
5. Лукьянов Д. П., Корниенко А. А., Рудницкий Б. Е. Оптические адаптивные системы. М.: Радио и связь, 1989. 240 с.

Поступила в редакцию
6 апреля 1995 г.

D.A. Bezuglov. **Cumulant Method of Estimation of Segmented Adaptive Mirror Efficiency.**

The efficiency of an adaptive optical system operation depends on the quality of the phase front approximation by segmented mirror. This paper describes a new method of analysis of the efficiency based on the cumulant criterion of the efficiency against the background of Poisson noises in the controlling channels.