

В.В. Веретенников

**ДИСКРЕТНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ФУНКЦИИ КОГЕРЕНТНОСТИ
В ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ
В МАЛОУГЛОВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ**

Рассмотрены численные методы восстановления функции пространственной когерентности по угловому распределению интенсивности многократно рассеянной плоской волны в малоугловом приближении теории переноса излучения, основанные на применении разложений в ряды Фурье – Бесселя и Дини. Точность метода исследована в численных экспериментах для модельной функции, преобразование Ганкеля которой имеет известное аналитическое описание.

Постановка задачи

При решении обратных задач теории переноса излучения в малоугловом приближении важным моментом является восстановление функции пространственной когерентности $F(\rho)$ по угловому распределению интенсивности многократно рассеянной плоской волны $I(\omega)$ [1] :

$$\frac{k^2}{2\pi} \int_0^{2R} \rho J_0(\omega\rho) F(\rho) d\rho = I(\omega), \quad (1)$$

где $J_0(x)$ – функция Бесселя нулевого порядка; $\omega = k \sin \theta$ – пространственная частота; $k = 2\pi/\lambda$; θ – угол рассеяния. Информация о функции когерентности рассеянного поля $F(\rho)$, связанной выражением [2]

$$F(\rho) = \exp[-\tau + \tau\varphi(\rho)/2] - \exp(-\tau) \quad (2)$$

с функцией корреляции тени частиц $\varphi(\rho)$ и оптической толщиной среды τ , позволяет, в свою очередь, определить малоугловую индикатрису рассеяния, оптическую передаточную функцию и функцию рассеяния точки среды, а также ее дисперсный состав.

Особенность задачи состоит в том, что измерения интенсивности $I(\omega)$ представлены, как правило, в дискретном наборе точек ω , на конечном интервале $[\omega_{\min}, \omega_{\max}]$. С одной стороны, ограничение по минимальной частоте ω_{\min} связано с практическими трудностями разделения излучения на прямо прошедшее и рассеянное вблизи направления вперед, с другой стороны, при достаточно больших ω , когда малоугловая интенсивность $I(\omega)$ стремится к нулю, значительно возрастает роль шумовой компоненты. Эта компонента обусловлена как экспериментальными погрешностями измерений, так и вкладом той части рассеянного излучения, которая не описывается малоугловым приближением (1), (2). Выбор максимальной частоты ω_{\max} диктуется стремлением уменьшить влияние этих погрешностей.

В условиях неполноты экспериментальных данных при восстановлении функции когерентности $F(\rho)$ по угловому распределению интенсивности $I(\omega)$ целесообразно учитывать априорную информацию об искомом решении. Такой информацией являются непрерывность, монотонность, ограниченность и выпуклость вниз функции когерентности $F(\rho)$ на интервале $0 \leq \rho \leq 2R$:

$$0,25 \geq F(0) \geq F(\rho) \geq 0, \quad F' \leq 0, \quad F''(\rho) \geq 0. \quad (3)$$

В [1] предложены конечно-разностные алгоритмы обращения уравнения (1) на основе минимизации функционала невязки на множестве функций, удовлетворяющих ограничениям

(3). В настоящем сообщении будут рассмотрены методы восстановления функции когерентности $F(\rho)$ из уравнения (1), основанные на разложении функций с ограниченным спектром в ряды Фурье–Бесселя и Дини. В предлагаемом подходе существенно то, что функция когерентности $F(\rho)$ обращается в нуль вне интервала $0 \leq \rho \leq 2R$.

Метод решения

Рассмотрим известное из теории бesselевых функций интегральное соотношение [3]

$$\int_0^1 x J_0(\alpha_i x) J_0(\alpha_j x) dx = \begin{cases} \frac{1}{2} J_1^2(\alpha_i), & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad (4)$$

в котором α_i – нули функции Бесселя $J_0(x)$: $J_0(\alpha_i) = 0$, $i = 1, 2, \dots$. Из (4) следует ортогональность на интервале $(0, 1)$ системы функций $\{J_0(\alpha_i x)\}$, $i = 1, 2, \dots$ с весом x . Функции $J_0(\alpha_i x) \frac{\sqrt{2}}{J_1(\alpha_i)}$ нормированы на интервале $(0, 1)$.

Функции $J_0(\alpha_i x)$, $i = 1, 2, \dots$ образуют полную систему, что позволяет записать разложение произвольной функции $f(x)$ с ограниченным изменением на интервале $(0, 1)$ в ряд Фурье–Бесселя

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i J_0(\alpha_i x), \quad \text{при } 0 < x < 1 \quad (5)$$

с коэффициентами

$$\alpha_i = \frac{2}{J_1^2(\alpha_i)} \int_0^1 x J_0(\alpha_i x) f(x) dx. \quad (6)$$

Если функция $f(x)$ непрерывная на интервале $(0, 1)$ и произведение $\sqrt{x} f(x)$ абсолютно интегрируемо, то ряд Фурье–Бесселя функции $f(x)$ (5) сходится равномерно к функции $f(x)$ на интервале $(0, 1)$ [3].

Функция когерентности $F(\rho)$ определена на интервале $[0, 2R]$ и удовлетворяет на нем перечисленным условиям. Поэтому ее можно разложить в ряд Фурье–Бесселя

$$F(\rho) = \frac{\pi}{(kR)^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\omega_i \rho)}{J_1^2(\alpha_i)} I(\omega_i), \quad 0 < \rho < 2R, \quad (7)$$

где $\omega_i = \alpha_i/2R$, $I(\omega_i)$ – значение интенсивности излучения в точке $\omega = \omega_i$. Формула (7) выражает функцию когерентности $F(\rho)$ через значения ее преобразования Ганкеля $I(\omega)$ в дискретном наборе точек $\omega_i = \alpha_i/2R$, $i = 1, 2, \dots$, где α_i – нули функции Бесселя $J_0(x)$, и может рассматриваться как формула обращения интегрального уравнения (1). Из формулы (7) следует, что для восстановления функции $F(\rho)$ не требуется информация о распределении интенсивности $I(\theta)$ в окрестности направления рассеяния вперед, для которой $\theta < \alpha_1/2kR \cong (kR)^{-1}$.

При восстановлении функции $F(\rho)$ по формуле (7) необходимо априорно задавать максимальный радиус частиц R , от величины которого зависит положение узлов $\omega_i = \alpha_i/2R$. Ошибки в выборе R могут привести к нарушению аналитических свойств функции $F(\rho)$, определяемых соотношениями (3). Поэтому проверка выполнения условий (3) для восстановленного решения служит критерием правильности априорного задания R .

Суммирование ряда (7) не обладает свойством устойчивости к ошибкам в задании $I(\omega_i)$, если погрешность восстановления $F(\rho)$ оценивать в равномерной метрике. Устойчивые методы суммирования рядов Фурье, основанные на идее регуляризации, описаны в [4]. В простейшем случае этой цели служит ограничение числа членов разложения (7), согласованное с погрешностями в задании $I(\omega_i)$. Подставляя разложение (7) в уравнение (1), получим формулу

$$I(\omega) = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{I(\omega_i) \omega_i J_0(2R\omega)}{J_1(\alpha_i) [\omega_i^2 - \omega^2]}, \quad (8)$$

которая означает, что функция $I(\omega)$ может быть восстановлена по ее значениям в дискретном наборе точек $\omega_i = \alpha_i/2R$, $i = 1, 2, \dots$

Рассмотрим частичную сумму $F_n(\rho)$, соответствующую конечному числу n членов разложения (7). Ей будет соответствовать частичная сумма $I_n(\omega)$ ряда (8). Переходя в (8) к пределу при $\omega \rightarrow \omega_j$, будем иметь для $I_n(\omega)$

$$I_n(\omega_j) = \begin{cases} I(\omega_j), & j \leq n; \\ 0, & j > n. \end{cases} \quad (9)$$

Из (9) следует, что невязка уравнения (1), определенная на дискретном наборе точек ω_j , $j = 1, \dots, n$, будет равна нулю при любом конечном числе n членов разложения (7). Если за меру уклонения функций $I(\omega)$ и $I_n(\omega)$ принять величину

$$\sigma^2 = \int_0^{\infty} [I(\omega) - I_n(\omega)]^2 \omega d\omega, \quad (10)$$

то по формуле Парсеваля будем иметь

$$\sigma^2 = \left(\frac{k^2}{2\pi}\right)^2 \int_0^{2R} [F(\rho) - F_n(\rho)]^2 \rho d\rho = \frac{1}{2R^2} \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{I^2(\omega_i)}{J_1^2(\alpha_i)}. \quad (11)$$

Из формулы (11) следует, что невязка уравнения (1) в метрике L_2 при замене ряда (7) конечной суммой n слагаемых определяется значениями функций $I(\omega)$ в точках $\omega_i = \alpha_i/2R$, $i > n$.

Следует отметить, что для функции $F(\rho)$ можно построить также другие ряды Фурье, в которых коэффициенты определяются ее преобразованием Ганкеля, т.е. интенсивностью $I(\omega)$. Например, если обозначить через β_i корни уравнения $J_0(x) = 0$, $i = 1, 2, \dots$, то получим новую систему функций $J_0(\beta_i x)$, ортогональных на интервале $(0, 1)$ с весом x :

$$\int_0^1 x J_0(\beta_i x) J_0(\beta_j x) dx = \begin{cases} \frac{1}{2} J_0^2(\beta_i), & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (12)$$

Разложение произвольной функции $f(x)$ в ряд по системе функций $\{J_0(\beta_i x), i = 1, 2, \dots\}$ имеет вид, аналогичный формуле (5) с заменой α_i на β_i и коэффициентами

$$b_i = \frac{2}{J_0^2(\beta_i)} \int_0^1 x J_0(\beta_i x) f(x) dx, \quad (13)$$

откуда для функции $F(\rho)$ можно записать ряд

$$F(\rho) = \frac{\pi}{(kR)^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\omega_i \rho)}{J_0^2(\beta_i)} I(\omega_i), \quad 0 < \rho < 2R, \quad (14)$$

где $\omega_i = \beta_i/2R$, $i = 1, 2, \dots$. Следует признать разложение (14) менее удачным по сравнению с разложением (7), поскольку первый нуль функции $J_1(x)$ $\beta_1 = 0$ и в (14) требуется задание $I(\omega_1) = I(0)$.

Наконец, для обращения интегрального уравнения (1) можно использовать разложение в ряд Дини [3]. Рассмотрим функцию $p(x) = qJ_0(x) - xJ_1(x)$, где q – произвольная константа. Известно, что функция $p(x)$ при любом q имеет корень между любыми двумя корнями функции $J_0(x)$. Пусть $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_i, \dots$ – корни уравнения

$$qJ_0(x) - xJ_1(x) = 0. \quad (15)$$

Можно показать, что функции $J_0(\gamma_i x)$, $i = 1, 2, \dots$ ортогональны с весом x на интервале $(0, 1)$, а условие нормировки функций $J_0(\gamma_i x)$ имеет вид

$$\int_0^1 x J_0^2(\gamma_i x) dx = \frac{1}{2} [J_0^2(\gamma_i) + J_1^2(\gamma_i)] = \frac{1}{2} J_0^2(\gamma_i) \left[1 + \frac{q^2}{\gamma_i^2} \right]. \quad (16)$$

Ряд Дини для функции $f(x)$ на интервале $(0, 1)$ имеет вид (5) с заменой α_i на γ_i и с коэффициентами

$$c_i = \frac{2}{J_0^2(\gamma_i)} \frac{\gamma_i^2}{q^2 + \gamma_i^2} \int_0^1 x J_0(\gamma_i x) f(x) dx. \quad (17)$$

Ряд Дини для функции $F(\rho)$ будет иметь вид

$$F(\rho) = \frac{\pi}{(kR)^2} \sum_{i=1}^{\infty} h_i J_0(\omega_i \rho) I(\omega_i), \quad (18)$$

$0 < \rho < 2R$, где $\omega_i = \gamma_i / 2R$, γ_i – корни уравнения (15),

$$h_i = \frac{1}{J_0^2(\gamma_i)} \frac{\gamma_i^2}{q^2 + \gamma_i^2} = \frac{1}{J_1^2(\gamma_i)} \frac{q^2}{q^2 + \gamma_i^2}. \quad (19)$$

Важным свойством разложения (18) является возможность варьирования левой границы ω_{\min} области, в которой требуется производить измерения интенсивности $I(\omega)$ за счет соответствующего выбора параметра q в уравнении (15).

Результаты численного моделирования

Для исследования эффективности использования дискретных разложений при обращении уравнения (1) были выполнены модельные расчеты. В качестве точного решения (1) рассматривалась функция $G(x)$

$$G(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} [\arccos x - x \sqrt{1-x^2}], & x \leq 1, \\ 0, & x > 1, \end{cases} \quad (20)$$

преобразование Ганкеля которой имеет известный аналитический вид

$$\int_0^1 x J_0(x\omega) G(x) dx = 2 \left[\frac{J_1(\omega/2)}{\omega} \right]^2 \equiv I(\omega) \quad (21)$$

и представляет собой нормированную малоугловую индикатрису рассеяния в приближении дифракции Фраунгофера. Восстановление функции $G(x)$ осуществлялось по формуле

$$f(x) = \frac{2}{R^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\omega_i x)}{J_0(\beta_i)} I(\omega_i), \quad 0 < x < R, \quad (22)$$

где $\omega_i = \beta_i / R$, β_i – нули функции $J_1(x)$.

В численных экспериментах исследовалось влияние замены ряда (22) конечной суммой, ошибок в задании $I(\omega_i)$, а также априорного выбора параметра R . Выбор R связан с оценкой верхнего предела интегрирования в (21). Для уравнения (21) ошибки в восстановлении $G(x)$ по формуле (22) могут возникнуть, очевидно, при $R < 1$ и будут определяться вкладом, который вносит в ве-

личину $I(\omega)$ интеграл $\int_R^1 x J_0(x \omega) G(x) dx$. Относительная погрешность задания $I(\omega_i)$ моделировалась по случайному закону с равномерным распределением в интервале $[-\varepsilon, \varepsilon]$.

N	$\varepsilon_G, \%$	n	3	5	10	15	20	40	50
1	$\varepsilon_G, \%$	$\varepsilon = 0$	10	5,2	2,2	1,6	1,1	0,6	0,4
2	$\varepsilon_0, \%$	$R = 1$	17	9,2	4,0	2,8	2,0	1,0	0,8
3	$\varepsilon_G, \%$	$\varepsilon = 10\%, R = 1$	–	6,2	5,5	–	5,5	5,7	5,8
4	$\varepsilon_G, \%$	$\varepsilon = 10\%, R = 1,5$	–	8,1	3,6	–	2,4	2,1	–

Таблица дает представление о сходимости частичных сумм ряда (22), где n – число членов разложения, ε_G – относительная среднеквадратическая погрешность восстановления $G(x)$. Как видно из таблицы, высокая точность аппроксимации функции $G(x)$ (20) рядом (22) достигается уже при $n = 10$ членах разложения ($\varepsilon_G = 2,2\%$), т.е. для восстановления $G(x)$ достаточно иметь данные о величине $I(\omega)$ всего в 10 точках, расположенных в интервале $0 < \omega \leq \beta_{10} \approx 32,19$. При этом получается значительный выигрыш по быстродействию по сравнению с методами, рассмотренными в [1]. Ряд (22) сходится хуже в окрестности точки $x = 0$, для которой в таблице приведены погрешности ε_0 восстановления $G(0)$. Это приводит к нарушению выпуклости функции $G(x)$ в окрестности $x = 0$, коррекция которой может осуществляться на основе априорной информации о решении, определяемой из (3).

В таблице показано также влияние ошибки ε задания $I(\omega_i)$ на погрешность восстановления ε_G при различных n . Результаты, приведенные в 3-й строке, свидетельствуют об устойчивости суммирования (22) по отношению к ошибкам исходных данных. Из таблицы видно, что, начиная с $n = 10$, дальнейшее увеличение числа членов разложения (22) не приводит к повышению точности восстановления модельной функции $G(x)$ при наличии ошибок в исходных данных, а при $n \geq 40$ наблюдается даже небольшое возрастание ошибки ε_G . При $n = 50$ зависимость ε_G от ε практически линейная с «коэффициентом усиления» ошибки $\varepsilon_G / \varepsilon \approx 0,6$ в интервале изменения $1 \leq \varepsilon \leq 10\%$. Случайные ошибки в исходных данных оказывают наиболее заметное влияние на точность восстановления функции $G(x)$ при $x \rightarrow 1$.

На рис. 1 изображено семейство функций $f(x)$, восстановленных по формуле (22) при точных исходных данных ($\varepsilon = 0$), $n = 50$ и различных значениях $R \leq 1$. Кривая 1 соответствует $R = 1$ и практически совпадает с точным решением $G(x)$. Остальные кривые 2 – 5 получены для убывающей последовательности значений $R = 0,9; 0,8; 0,7; 0,6$. Приведенные на рис. 1 примеры иллюстрируют влияние ошибок в выборе R на вид восстановленных решений. Поскольку формула (22) представляет собой разложение функции $G(x)$ на интервале $(0, R)$, то каждую из приведенных на рис. 1 кривых следует рассматривать также на соответствующем интервале, например, кривую 2 на интервале $0 < x < 0,9$ и т.д.

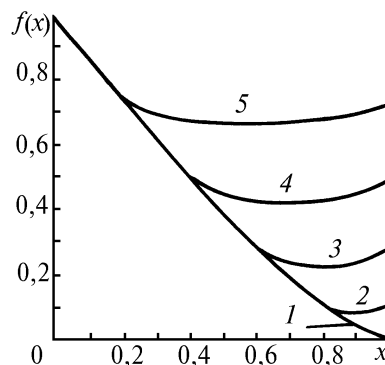


Рис. 1. Восстановление модельной функции $G(x)$ (20) методом суммирования ряда Фурье-Бесселя (22) при $n = 50$, $R = 1$ (1); 0,9 (2); 0,8 (3); 0,7 (4) и 0,6 (5) и точном задании $I(\omega)$

Можно заметить, что при фиксированном значении R каждая из восстановленных функций $f(x)$ сохраняет монотонно убывающий характер на интервале $(0, R)$, достигая минимума на

границе $x = R$, а затем при $R < x \leq 1$ незначительно возрастает. Если обозначить $\Delta = 1 - R$ как ошибку в выборе R , то функция $f(x)$ удовлетворительно аппроксимирует функцию $G(x)$ на интервале $0 \leq x < R - \Delta$, а правее точки $x = R - \Delta$ наблюдается их расхождение. Этот интервал сжимается в точку при $R \rightarrow 1/2$, определяя тем самым нижнюю границу допустимых значений R равной половине от истинного значения $R = 1$.

Таким образом, выбор $R < 1$ существенно влияет на отклонение $f(x)$ от $G(x)$. Среднеквадратическая погрешность восстановления $G(x)$ на интервале $(0, 1)$ в зависимости от R приведена на рис. 2. Из рис. 2 видно, что поведение ε_G не симметрично относительно точки $R = 1$ и выбор $R > 1$ практически не приводит к ухудшению качества восстановления. Данные закономерности в поведении ошибки $\varepsilon_G(R)$ следует учитывать при априорном выборе R .

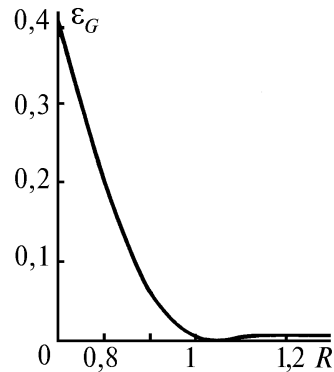


Рис. 2. Зависимость от R относительной погрешности восстановления модельной функции $G(x)$ методом суммирования ряда Фурье–Бесселя на интервале $(0, 1)$

В заключение отметим еще одну особенность, которая проявляется при выборе $R > 1$. Как видно из последней строки таблицы, выбор $R > 1$ при наличии ошибок ($\varepsilon \neq 0$) приводит к уменьшению погрешности восстановления функции $G(x)$ для $n = 10$ и более членов разложения. Причем в отличие от случая точного задания $R = 1$ (3-я строка) увеличение n вплоть до 40 сопровождается монотонным снижением погрешности ε_G .

1. Вагин Н. И., Веретенников В. В. //Изв. АН СССР. Сер.ФАО. 1989. Т. 25. N 7. С. 723–731.
2. Белов В. Ф., Боровой А. Г., Вагин Н. И., Волков С. Н. //Изв. АН СССР. Сер.ФАО. 1984. Т. 20. N 3. С. 323–327.
3. Коренев Б. Г. Введение в теорию бесселевых функций. М.: Наука, 1971. 288 с.
4. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 288 с.

Институт оптики атмосферы СО РАН,
Томск

Поступила в редакцию
8 июня 1995 г.

V. V. Veretennikov. Coherence Function Discrete Expansion in Inverse Problems of Radiation Transfer Theory Using Its Small-angle Approximation.

Numerical techniques for spatial coherence function reconstructing from the angular distribution of multiply scattered plane wave intensity using the small-angle approximation of the radiation transfer theory are treated based on the Fourier–Bessel and Dini expansion series. The technique accuracy was estimated in numerical experiments with model function, for which the Hankel transform analytical description is known.