

ДИСТАНЦИОННОЕ ЗОНДИРОВАНИЕ АТМОСФЕРЫ, ГИДРОСФЕРЫ  
И ПОДСТИЛАЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ

УДК 535.2;551.501

Б.В. Кауль<sup>1</sup>, И.В. Самохвалов<sup>2</sup>

Ориентация частиц в кристаллических облаках *Si*:  
Часть 2. Азимутальная ориентация

<sup>1</sup> *Институт оптики атмосферы СО РАН, г. Томск*

<sup>2</sup> *Томский государственный университет*

Поступила в редакцию 27.09.2005 г.

Приведены теоретические оценки возможности аэродинамического ориентирования частиц кристаллических облаков относительно направления ветра. Показано, что к ориентации могут приводить пульсации скорости ветра и силы, действующие на падающую частицу при наличии вертикального градиента скорости ветра. Полученная оценка параметра функции распределения по углам азимутальной ориентации частиц согласуется с результатами его экспериментального определения в наших лидарных исследованиях матриц обратного рассеяния света.

**Введение**

В первой части работы [1] рассмотрено влияние турбулентности воздуха на распределение по углам ориентации частиц наибольшими диаметрами в горизонтальное положение. Такая ориентация возникает в результате действия аэродинамических сил при падении достаточно крупных несферических частиц. В данной статье обсуждается возможность аэродинамической ориентации частиц кристаллических облаков в азимутальном направлении. Последнее означает: частицы занимают такое положение, что их характерные размеры (скажем для определенности – большие диаметры) оказываются ориентированными относительно некоторого направления, лежащего в горизонтальной плоскости.

Пожалуй, первое указание на возможность такой ориентации следовало из наблюдений наклонных солнечных столбов – явления достаточно редкого [2]. Тем не менее в отдельных случаях отмечалось отклонение столба от вертикали до 10°. Автором работы [2] было высказано предположение, что наклон солнечных столбов обусловлен ветровым сносом частиц.

Прямые указания на наличие азимутальной ориентации были получены нами в результате лидарных измерений матриц обратного рассеяния [3]. Причем проявления азимутальной ориентации наблюдались чаще, чем ее отсутствие. Но в большинстве случаев ориентация слабо выражена. Мы предположили, что за азимутальную ориентацию ответственны пульсации скорости ветра. Так как моменты, ориентирующие частицу, пропорциональны квадрату разности скорости частицы и воздушного потока, можно допустить, что пульсирующие движения частиц могут приводить к ориентации. Априори ясно, что для этого частицы должны не полностью увлекаться пульсационными движения-

ми воздуха, а сами эти движения должны иметь разные характеристики по разным направлениям. Иными словами, ориентацию частиц следует ожидать со стороны пульсаций, принадлежащих области анизотропной турбулентности, сохраняющей ветровую ориентацию. Целью данной работы является обоснование правомочности этой гипотезы посредством количественных оценок, представленных ниже.

**Уравнения движения**

На частицу, движущуюся вместе с воздушным потоком, действует сила, пропорциональная разности скоростей потока и частицы. Уравнение движения имеет следующий вид:

$$m \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \kappa D \eta (\mathbf{v} - \mathbf{u}) - m\mathbf{g}, \quad (1)$$

где  $m$  – масса частицы;  $D$  – диаметр частицы;  $\eta$  – динамическая вязкость воздуха;  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{u}$  – скорости потока и частицы соответственно;  $\mathbf{g}$  – ускорение свободного падения. Множитель  $\kappa$  зависит от формы частицы. Для шара  $\kappa = 3\pi$ . Для сплюснутого и вытянутого эллипсоидов с отношением полуосей 1/2,5  $\kappa \approx 2,5\pi$  и  $2\pi$  соответственно. Под  $D$  понимается размер большого диаметра.

Рассмотрим уравнение, описывающее поведение  $x$ -компоненты скорости, полагая, что ось  $x$  направлена горизонтально вдоль направления ветра, а ось  $z$  вертикально вверх:

$$\frac{du_x}{dt} + \omega_0 u_x = \omega_0 (\langle v_{0,x} \rangle + \frac{\partial \langle v_x \rangle}{\partial z} u_z t + v'_x). \quad (2)$$

Первый член, стоящий в правой части в скобках, означает среднюю скорость ветра на некоторой высоте  $z_0$ , второй описывает приращение средней

скорости ветра при наличии вертикального градиента скорости ветра, а третий – ее пульсационную составляющую. В дальнейшем будем полагать, что  $\partial v_x / \partial z = \text{const}$ . Под  $u_z$  подразумевается скорость падения частицы, которая также считается постоянной. Множитель  $\omega_0 = \kappa D \eta / m$  для сплюснутого и вытянутого эллипсоидов равен соответственно

$$\omega_0 = 15\eta / \rho_p D^2 \sqrt{1 - e^2}, \quad \omega_0 = 12\eta / \rho_p D^2 (1 - e^2), \quad (3)$$

где  $\rho_p$  – плотность вещества частицы;  $e$  – эксцентриситет.

Ввиду линейности дифференциального уравнения (2) его решение можно представить как сумму решений уравнений

$$\frac{du_x}{dt} + \omega_0 u_x = \omega_0 (\langle v_{0,x} \rangle + \frac{\partial \langle v_x \rangle}{\partial z} u_z t), \quad (4)$$

$$\frac{du_x}{dt} + \omega_0 u_x = \omega_0 v_x'. \quad (5)$$

Решение уравнения (4) имеет следующий вид:

$$u(t) = \langle v_0 \rangle [1 - \exp(-t/\tau_0)] + Gt - G\tau_0 [1 - \exp(-t/\tau_0)] \quad (6)$$

при начальных условиях  $u(t=0)=0$ ,  $\langle v(z_0, t=0) \rangle = \langle v_0 \rangle$ .

Здесь введены обозначения:  $G = u_z (\partial \langle v_x \rangle / \partial z)$ ;  $\tau = 1/\omega_0$ .

Решение (6) имеет простой физический смысл. По прошествии времени  $t \gg \tau_0$  скорость частицы, в зависимости от знака  $\partial \langle v_x \rangle / \partial z$ , отстает или опережает значения средней скорости ветра  $\langle v_0 + Gt \rangle$  на постоянную величину  $G\tau_0$  и испытывает постоянное воздействие со стороны воздушного потока. К его влиянию на ориентацию частиц вернемся позже.

Для синусоидальных пульсаций  $v'(t) = A \sin \omega t$  решение уравнения (5) имеет вид [4]:

$$u(t) = \frac{A\omega\tau_0 \exp(-t/\tau_0)}{1 + \omega^2\tau_0^2} + \frac{A \sin(\omega t - \varphi)}{\sqrt{1 + \omega^2\tau_0^2}}, \quad (7)$$

где  $\tau_0 = 1/\omega_0$ ;  $\varphi = \arctg \omega\tau_0$ .

Первый член характеризует переходный процесс, а второй – установившееся гармоническое движение. Амплитуда этого движения меньше амплитуды пульсаций воздуха и отстает от них по фазе. Для дальнейшего будет представлять интерес средний квадрат разности скоростей пульсаций воздуха и частицы при установившемся движении:

$$\langle (\Delta u)^2 \rangle = \langle (v' - u)^2 \rangle = \langle A^2 [\sin \omega t - \sin(\omega t - \varphi) / \sqrt{1 + \omega^2\tau_0^2}]^2 \rangle. \quad (8)$$

Таблица 1

Результаты расчета отношения  $\langle (\Delta u)^2 \rangle / A^2$  как функции от  $\omega\tau_0$

| $\omega\tau_0$                       | 0,1  | 0,2  | 0,4  | 0,5    | 0,7   | 1,0  | 5,0   | 10     | 100   |
|--------------------------------------|------|------|------|--------|-------|------|-------|--------|-------|
| $\langle (\Delta u)^2 \rangle / A^2$ | 0,01 | 0,02 | 0,07 | 0,1050 | 0,166 | 0,25 | 0,481 | 0,4950 | 0,499 |

Как можно видеть из первого столбца табл. 1, при  $\omega \leq 0,1/\tau_0$  квадрат разности амплитуд pulsa-

ций составляет лишь 1% или меньше от квадрата амплитуды пульсаций воздуха. Это отражает тот факт, что в низкочастотных пульсациях аэрозоль выступает как почти полностью увлекаемая примесь. В табл. 2 показаны значения характеристического времени для частиц разных размеров.

Таблица 2

Характеристическое время  $\tau_0 = 1/\omega_0$  (с), определенное формулами (3), при указанных значениях больших диаметров  $D$  частиц

| Вид частицы | $D$ , мкм         |                   |      |      |      |      |      |      |
|-------------|-------------------|-------------------|------|------|------|------|------|------|
|             | 10                | 50                | 100  | 200  | 400  | 600  | 800  | 1000 |
| Пластинки   | $4 \cdot 10^{-4}$ | $4 \cdot 10^{-3}$ | 0,02 | 0,15 | 0,28 | 0,64 | 1,14 | 1,78 |
| Столбики    | $3 \cdot 10^{-4}$ | $2 \cdot 10^{-3}$ | 0,01 | 0,07 | 0,14 | 0,32 | 0,57 | 0,89 |

## Ориентация пульсациями ветра

Из представленных данных найдем нижнюю границу эффективных частот пульсаций. Взяв  $\tau_0 = 2$  с, из условия  $\omega\tau_0 \geq 0,1$  найдем, что  $\omega_n \geq 0,05$  рад/с. При меньших частотах даже самые крупные частицы полностью увлекаются воздушными потоками. Полагая, что изотропная турбулентность не может ориентировать частицы, найдем верхнюю границу эффективных частот как частоту микромасштаба Тейлора [5, 6]:

$$\omega_T = \sqrt{\varepsilon / 15\nu}, \quad (9)$$

где  $\varepsilon$  – скорость диссипации энергии,  $\text{м}^2 \cdot \text{с}^{-3}$ ;  $\nu$  – кинематическая вязкость воздуха, которую для температур на высотах около 10 км принимаем равной  $3 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2 / \text{с}$ .

Скорость диссипации изменяется в широких пределах – от  $5 \cdot 10^{-4}$  в спокойной атмосфере до  $5 \cdot 10^{-1} \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-3}$  в кучевых облаках [6, 7]. При этом тейлоровская частота  $\omega_T$  изменяется в интервале от 2 до 15 рад/с.

Для элементарного объема воздуха, движущегося вместе с потоком, дисперсия скорости равна [8]:

$$\langle v'^2 \rangle = \varepsilon / \omega. \quad (10)$$

Полагая в формуле (8)  $\langle A^2 \rangle = \varepsilon / 2\omega$ , запишем для фиксированного  $\tau_0$ , т.е. фиксированного размера частицы, выражение для квадрата разности скоростей пульсаций  $\langle (\Delta u)^2 \rangle$ , усредненной по значимому интервалу частот  $[\omega_n, \omega_T]$ , с весовой функцией  $1/\omega$  и по интервалу времени  $T \gg \tau_0$ :

$$\langle (\Delta u)^2 \rangle = \frac{1}{2T} \int_0^T dt \int_{\omega_n}^{\omega_T} \varepsilon \omega^{-2} [\sin \omega t - \sin(\omega t - \varphi) / \sqrt{1 + \omega^2\tau_0^2}]^2 d\omega. \quad (11)$$

Полученную величину подставляем в формулу для момента сил, стремящегося повернуть частицу большим диаметром поперек движения [9, 10]:

$$M(\varphi) = \lambda \langle (\Delta u)^2 \rangle \rho V \sin 2\varphi / 2, \quad (12)$$

где  $\varphi$  – угол между направлением скорости воздушного потока и малой осью эллипсоида вращения;

$\rho$  – плотность воздуха;  $V$  – объем эллипсоида;  $\lambda$  – формфактор, зависящий от соотношения между малой и большой полуосями эллипсоида [10]:

$$\lambda = \{e^3 [e - \sqrt{1-e^2} (\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{\sqrt{1-e^2}}{e})]^{-1} - 1\}^{-1}. \quad (13)$$

Объемы сфероида и вытянутого эллипсоида вращения можно выразить через размеры больших диаметров  $D$  и эксцентриситет следующими формулами:

$$V_c = \frac{1}{6} \pi D^3 \sqrt{1-e^2}, \quad V_s = \frac{1}{6} \pi D^3 (1-e^2). \quad (14)$$

Далее, для нахождения функции распределения по углу ориентации  $\varphi$  используем тот же подход, что и в [1]. Основные положения, принятые там, заключаются в том, что за разрушение ориентации ответственны ячейки внутреннего масштаба турбулентности (интервала диссипации), а эффективность взаимодействия частиц с этими ячейками пропорциональна отношению их объемов.

Масштабы длины и скорости в интервале диссипации имеют следующие значения [5, 8]:

$$l_0 = (v^3/\varepsilon)^{\frac{1}{4}}; \quad u_0 = (\varepsilon v)^{\frac{1}{4}}. \quad (15)$$

Ячейка диаметром  $l_0$  обладает в среднем энергией

$$w = \frac{1}{6} \pi l_0^3 \rho \langle u_0^2 \rangle. \quad (16)$$

Из (15) и (16) определяется энергия ячейки как функция средней скорости диссипации

$$w(\varepsilon) = \frac{1}{6} \pi \rho v^{\frac{11}{4}} \varepsilon^{-\frac{1}{4}}. \quad (17)$$

Эффективность передачи энергии частице от турбулентной ячейки  $p$  принимается равной отношению их объемов. Для вытянутых эллипсоидов вращения

$$p(D, \varepsilon) = D^3 (1-e^2) (v^3/\varepsilon)^{-\frac{3}{4}}. \quad (18)$$

Кинетическая энергия, получаемая частицей при столкновении:

$$W(D, \varepsilon) = p(D, \varepsilon) w(\varepsilon). \quad (19)$$

Распределение по углу ориентации находится из дифференциального уравнения, описывающего баланс потенциальной энергии частиц и кинетической энергии турбулентных пульсаций:

$$nM(\varphi, D)d\varphi = -W(D, \varepsilon)dn. \quad (20)$$

Интегрирование этого уравнения и условия нормировки [1] дают следующее распределение по углам азимутальной ориентации возле моды распределения  $\varphi_0$ :

$$n_D(\varphi - \varphi_0) = N_D \exp[k_D \cos 2(\varphi - \varphi_0)] / \pi I_0(k_D), \quad (21)$$

где  $N_D$  – общая концентрация частиц размером  $D$ ;  $I_0(k)$  – модифицированная функция Бесселя первого рода и нулевого порядка. Индексы  $D$  подчеркивают, что распределение относится к частицам с конкретным размером. Угол  $\varphi$  отсчитывается от направления ветра до направления малой оси частицы. Если иметь в виду большие диаметры частиц, то распределение (21) характеризует их группирование возле направления  $\varphi_0 \pm \pi/2$ .

С учетом формул (12)–(19) параметр распределения  $k$  определяется следующим образом:

$$k_p(D, \varepsilon) = \lambda \langle (\Delta u_p)^2 \rangle \xi / \sqrt{\varepsilon}. \quad (22)$$

В (22) введен дополнительный параметр  $\xi$  как характеристика анизотропии турбулентности. Он зависит от отношения лагранжевых интегральных временных масштабов для продольных и поперечных пульсаций и введен для учета деструктивного характера пульсаций вдоль оси  $y$  по отношению к ориентации частиц большими диаметрами поперек оси  $x$ . Пульсации вдоль оси  $z$  не препятствуют этой ориентации. В наших оценках принято, что  $\xi = 0,5$ . Полученные оценки параметра  $k$  для частиц разных размеров при трех значениях скорости диссипации энергии  $\varepsilon$  представлены в табл. 3. Там же приведены усредненные до целых градусов среднеквадратические отклонения осей частиц от моды распределения.

Это дает некоторое представление о степени ориентации. В интервал  $\pm \sigma$  попадает 60–70% частиц. Значение  $\sigma = 52^\circ$  соответствует равномерному азимутальному распределению осей частиц.

Таблица 3

**Величины параметра  $k$  распределения по углам азимутальной ориентации (21) и среднеквадратические отклонения от моды распределения  $\sigma$  для вытянутых эллипсоидов вращения с большими диаметрами  $D$  и отношением осей 1/2,5 при указанных скоростях диссипации энергии  $\varepsilon$**

| $\varepsilon, \text{ м}^2/\text{с}^3$ | $D, \text{ мкм}$ | $D, \text{ мкм}$ |       |      |      |      |      |      |
|---------------------------------------|------------------|------------------|-------|------|------|------|------|------|
|                                       |                  | 400              | 500   | 600  | 700  | 800  | 900  | 1000 |
| $10^{-3}$                             | $k$              | 0,015            | 0,036 | 0,10 | 0,11 | 0,17 | 0,24 | 0,36 |
|                                       | $\sigma^\circ$   | 52               | 51    | 50   | 50   | 49   | 48   | 46   |
| $10^{-2}$                             | $k$              | 0,15             | 0,23  | 0,58 | 0,93 | 0,97 | 1,22 | 1,53 |
|                                       | $\sigma^\circ$   | 50               | 48    | 43   | 38   | 37   | 33   | 30   |
| $10^{-1}$                             | $k$              | 0,78             | 1,25  | 1,78 | 2,53 | 3,29 | 4,02 | 4,89 |
|                                       | $\sigma^\circ$   | 40               | 33    | 27   | 21   | 18   | 16   | 14   |

Уместно отметить, что полученные оценки сопоставимы с экспериментальными результатами, приведенными в [3]. В [11, 12] показано, что определяемый из эксперимента параметр

$$\chi = (m_{22} + m_{33}) / (1 + m_{44}),$$

где  $m_{ii}$  – элементы нормированной матрицы обратного рассеяния, связан с параметром  $k$  распределения (21) соотношением

$$\chi(k) = I_2(k) / I_0(k).$$

Здесь  $I_0$  и  $I_2$  — модифицированные функции Бесселя первого рода соответственно нулевого и второго порядка. Эта зависимость показана на рис. 1.

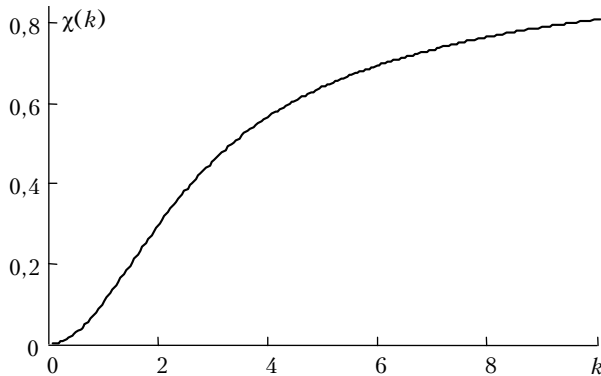


Рис. 1. Теоретическая зависимость параметра  $\chi$ , определенного через элементы нормированной приведенной матрицы обратного рассеяния [12] формулой  $\chi(k) = (m_{22} + m_{33}) / (1 + m_{44})$ , от  $k$  — параметра распределения вида (21)

В [3] приведено распределение параметра  $\chi$ , полученного из большой выборки матриц обратного рассеяния. Мода распределения приходится на значение 0,1. Это соответствует значению  $k \cong 1$ . Из табл. 3 видно, что при  $\epsilon = 10^{-2}$  для достаточно крупных частиц значения  $k$  того же порядка.

Набольшее значение  $\chi$ , полученное в экспериментах, равнялось 0,62, что соответствует  $k = 4,65$ . Последняя цифра в третьей строке не слишком далека от этого значения. Но приведенное экстремальное значение  $\chi$  относится к особой атмосферной ситуации, когда в двух слоях облачности на высотах 6,0 и 6,7 км направления азимутальной ориентации частиц отличались почти на  $90^\circ$ . Число 0,62 относилось к слою на высоте 6 км, а для слоя 6,7 км  $\chi$  равнялось 0,49. Такое необычное поведение вызвало предположение, что на указанных высотах происходил сдвиг ветра, что могло сопровождаться сильно развитой турбулентностью. Ясно, что при этом помимо горизонтальной составляющей могла иметь место и значительная вертикальная компонента градиента скорости ветра. Влияние этого фактора на азимутальную ориентацию можно оценить, обратившись к формуле (6).

### Ориентация при наличии вертикального градиента скорости ветра

Согласно (6) в установившемся режиме разность средней скорости ветра и частицы

$$\delta u = \frac{\partial v_x}{\partial z} u_z \tau_0,$$

где  $\tau_0 = 1/\omega_0$  определено формулой (3);  $u_z$  — скорость падения частицы можно, как это сделано в [1], выразить посредством эмпирического соотношения через размер частицы  $D$ :

$$u_z = 10^{3\beta-2} A D^\beta$$

( $A$  и  $\beta$  — эмпирические константы, приведенные в [13]). Величину  $(\delta u)^2$  нужно подставить вместо  $(\Delta u)^2$  в формулу (12).

На рис. 2 показаны результаты расчета параметра  $k(D)$  распределения вида (21) как функции размера частиц для трех пар значений вертикального градиента скорости ветра и скорости диссипации энергии. При этом предполагалось, что при больших значениях градиента больше и скорость диссипации. Расчет проведен для столбиков с отношением размеров 1:2,5. Константы  $A$  и  $\beta$  равны соответственно 70 и 0,92.

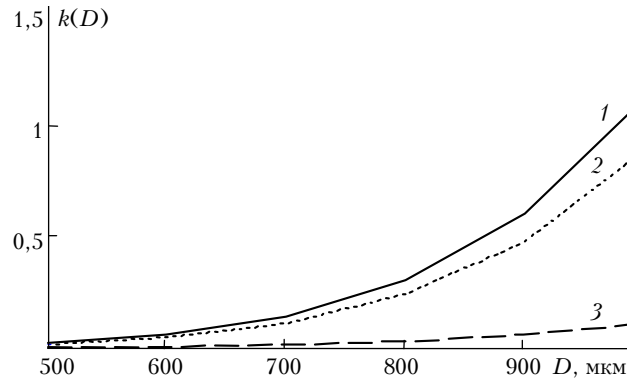


Рис. 2. Зависимость параметра  $k$  распределения (21) от длины столбчатых кристаллов при различных значениях вертикального градиента скорости ветра  $\partial v_x / \partial z$  и скорости диссипации энергии  $\epsilon$ : 1 —  $\partial v_x / \partial z = 0,1 \text{ c}^{-1}$ ,  $\epsilon = 0,1 \text{ м}^2 \cdot \text{c}^{-3}$ ; 2 —  $\partial v_x / \partial z = 0,05 \text{ c}^{-1}$ ,  $\epsilon = 0,01 \text{ м}^2 \cdot \text{c}^{-3}$ ; 3 —  $\partial v_x / \partial z = 0,01 \text{ c}^{-1}$ ,  $\epsilon = 0,001 \text{ м}^2 \cdot \text{c}^{-3}$

На рис. 2 видна сильная ( $\sim 10^6$ ) зависимость от размера частиц. Это понятно. От размера примерно линейно зависят скорость падения частицы и квадратично характеристическое время. Затем обе величины возводятся в квадрат для получения  $(\delta u)^2$ . Существенная ориентация имеет место для столбиков длиной более 800 мкм и только при достаточно больших значениях вертикального градиента скорости ветра. Для достижения сильной ориентации требуется выполнение противоречивых условий — наличие большого градиента скорости ветра и слабо развитой турбулентности (малые значения скорости диссипации энергии). Сравнение с результатами, представленными в табл. 3, позволяет сделать вывод, что этот механизм ориентации уступает по эффективности ориентации пульсациями скорости ветра.

### Заключение

Приведенные выше оценки подтверждают возможность азимутальной ориентации частиц кристаллических облаков пульсациями скорости ветра при достаточно развитой турбулентности воздуха. В оценках использованы следующие предположения. За ориентацию ответственны пульсации, принадлежащие интервалу частот, нижняя граница

которых фиксирована и определяется через характеристическое время наиболее крупных частиц, а верхняя граница определена как частота микромасштаба Тейлора. Последняя зависит от скорости диссипации энергии и поэтому является переменной. В обозначенном эффективном интервале частот турбулентность считается анизотропной так, что лагранжевы интегральные временные масштабы для продольных и поперечных пульсаций разнятся примерно на порядок. Для частот выше границы, определенной микромасштабом Тейлора, турбулентность считается изотропной. Деструктивными по отношению к процессу ориентации считаются ячейки размером внутреннего масштаба турбулентности. Эффективность взаимодействия частиц с этими ячейками пропорциональна отношению их объемов.

Оценки, сделанные при указанных предположениях, согласуются с результатами определения параметра функции распределения по углам азимутальной ориентации в лидарных исследованиях матриц обратного рассеяния света в кристаллических облаках.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 04-05-64495) и Федерального агентства науки и инноваций Министерства образования и науки Российской Федерации (Гос. контракт № РИ 26/071).

1. Кауль Б.В., Самохвалов И.В. Ориентация частиц в кристаллических облаках *Ci*: Часть 1. Ориентация

*B. V. Kaul, I. V. Samokhvalov. Orientation of particles of Ci crystalline clouds: Part 2. Azimuth orientation.*

Possibilities of aerodynamic orientation of crystalline cloud particles relative to wind direction are theoretically estimated. It is shown that the orientation can result from wind speed pulsations and the forces acting on the sinking particle in the presence of the wind speed gradient. The obtained estimate of the parameter of function of distribution over particle azimuth orientation angles agrees with its experimental estimate found from lidar investigations of light backscattering matrices.

- при падении // Оптика атмосф. и океана. 2005. Т. 18. № 11. С. 963–967.
2. Langgenhager K. Zur Erklärung farbiger senkrechter und schräger Nebensonnen – Säulen // Zeitschrift für Meteorol. 1977. Bd 27. N 3. S. 179–183.
  3. Кауль Б.В., Волков С.Н., Самохвалов И.В. Результаты исследований кристаллических облаков посредством лидарных измерений матриц обратного рассеяния света // Оптика атмосф. и океана. 2003. Т. 16. № 4. С. 354–361.
  4. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976.
  5. Рейнольдс А.Дж. Турбулентные течения в инженерных приложениях. М.: Энергия, 1979. 405 с.
  6. Cho H.-R., Iribarne J.V., Richards W.G. On the orientation of ice crystals in a cumulo-nimbus cloud // J. Atmos. Sci. 1981. V. 38. N 5. P. 1111–1114.
  7. Справочник «Атмосфера». Л.: Гидрометеониздат, 1991. 509 с.
  8. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. М.: Физматлит, 2001. 731 с.
  9. Милн-Томпсон Л.М. Теоретическая гидродинамика. М.: Мир, 1964. 497 с.
  10. Фукс Н.А. Механика аэрозолей. М.: Изд. АН СССР, 1955. 450 с.
  11. Ромашов Д.Н., Рахимов Р.Ф. Определение ориентации осесимметричных вытянутых частиц по данным поляризационного зондирования // Оптика атмосф. и океана. 1993. Т. 6. № 8. С. 891–898.
  12. Кауль Б.В. Симметрия матриц обратного рассеяния света в связи с ориентацией несферических аэрозольных частиц // Оптика атмосф. и океана. 2000. Т. 13. № 10. С. 895–900.
  13. Волковицкий О.А., Павлова Л.Н., Петрушин А.Г. Оптические свойства кристаллических облаков. Л.: Гидрометеониздат, 1984. 198 с.