

К.А. Шаповалов

Рассеяние света цилиндром конечной длины в приближении Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна.

1. Амплитуда светорассеяния

Красноярская государственная медицинская академия

Поступила в редакцию 11.07.2006 г.

Получены приближенные выражения для расчета амплитуды светорассеяния Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна оптически «мягким» круговым цилиндром конечной длины при падении света перпендикулярно оси симметрии цилиндра. Проведено численное сравнение индикатрисы светорассеяния (или элемента матрицы рассеяния f_{11}) для бесконечно длинного кругового цилиндра (строгое решение) и для конечного кругового цилиндра в приближении Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна.

Исследование рассеяния света естественными и искусственными аэрозолями, ледяными кристаллами, суспензиями биологических частиц по-прежнему представляет значительный интерес, несмотря на громадное количество экспериментальных и теоретических работ [1, 2]. Частицы таких сред являются часто несферическими, поэтому подробное изучение теоретических характеристик светорассеяния данными частицами достаточно важно.

Для оптически «мягких» ($|m - 1| \ll 1$, где m – относительный показатель преломления частицы) светорассеивающих частиц несферической формы удобно использовать приближения Рэля–Ганса–Дебая (РГД), аномальной дифракции (АД) [3] и Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна (ВКБ). Случай падения света вдоль оси симметрии кругового цилиндра конечной длины в приближении ВКБ рассмотрен нами ранее в [4].

В настоящей статье дан анализ амплитуды и индикатрисы светорассеяния кругового цилиндра конечной длины в приближении Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна для света, падающего перпендикулярно оси симметрии цилиндра.

1. Амплитуда светорассеяния

Предположим, что неподвижный однородный цилиндр высоты H и радиуса a ориентирован осью симметрии вдоль оси z . Пусть плоская электромагнитная волна падает вдоль оси y прямоугольной системы координат.

Используем интегральное представление амплитуды светорассеяния в приближении ВКБ [5]:

$$f(\mathbf{s}, \mathbf{i}) = \frac{k^2}{4\pi} [-\mathbf{s} \times (\mathbf{s} \times \mathbf{e}_i)] \times \int (m^2 - 1) T \exp[ik((m-1)(y' - y_i) + \mathbf{r}'(\mathbf{i} - \mathbf{s}))] dV', \quad (1)$$

где \mathbf{s} , \mathbf{i} – единичные векторы вдоль направления рассеяния и распространения света соответственно; $y_i = -\sqrt{a^2 - x_i'^2}$ – входная координата поверхности частицы для волны, проходящей через точку \mathbf{r}' ; $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число; λ – длина волны в дисперсионной среде; \mathbf{e}_i – единичный вектор в направлении поляризации падающей волны; $T = 2/(m+1)$ – коэффициент пропускания; \mathbf{r}' – радиус-вектор точки внутри частицы.

После интегрирования (1) по z в цилиндрической системе координат в скалярном виде имеем

$$f(\beta) = \frac{kaH\Delta}{4\pi} \times \int_0^{1/2\pi} \int_0^{2\pi} \exp\left[i\left(ka\psi_1(\beta, t, \varphi) + \frac{\Delta}{2}\psi_2(t, \varphi)\right)\right] d\varphi dt, \quad (2)$$

где

$$\psi_1(\beta, t, \varphi) = t(\sin\beta \cos\varphi + [m - \cos\beta] \sin\varphi),$$

$$\psi_2(t, \varphi) = \sqrt{1 - t^2 \cos^2\varphi}; \quad \Delta = 2ka(m - 1)$$

– фазовый сдвиг; β – угол рассеяния, отсчитываемый от направления рассеяния вперед.

При малых фазовых сдвигах $\Delta \ll 1$ в (2) можно полностью пренебречь значением $\psi_2(t, \varphi)$ по сравнению с $\psi_1(\beta, t, \varphi)$. Интегрирование (2) дает

$$f^{(0)}(\beta) = (ka)^2 H(m-1) \frac{J_1[kap(\beta)]}{kap(\beta)}. \quad (3)$$

Здесь $J_1(x)$ – функция Бесселя первого порядка; $p(\beta) = \sqrt{\sin^2\beta + (m - \cos\beta)^2}$.

В приближении РГД [6]:

$$f^{\text{РГД}}(\beta) = \frac{(ka)^2 H(m^2 - 1) J_1[kad(\beta)]}{2 kad(\beta)}, \quad (4)$$

где $d(\beta) = \sqrt{\sin^2 \beta + (1 - \cos \beta)^2} = 2 \sin(\beta/2)$.

Поскольку для оптически «мягких» частиц $m \rightarrow 1$ и $m^2 - 1 \approx 2(m - 1)$, то выражения для амплитуды светорассеяния в приближении ВКБ при малых фазовых сдвигах (3) и в приближении РГД (4) практически будут совпадать.

Другие приближения для расчета амплитуды светорассеяния ВКБ можно получить из (2), разлагая в ряд фазу $\psi_2(t, \varphi) = \sqrt{1 - t^2 \cos^2 \varphi}$, т.е.

$$\psi_2(t, \varphi) = 1 - \frac{(t \cos \varphi)^2}{2} - \frac{(t \cos \varphi)^4}{8} - \frac{(t \cos \varphi)^6}{16} + O((t \cos \varphi)^8). \quad (5)$$

В частности, если $\psi_2(t, \varphi) = 1 - t^2/4$, то имеем первое приближение. Окончательно получим, используя разложение, указанное в [7]:

$$f^{(1)}(\beta) = \frac{kaH \exp\left[i\frac{\Delta}{2}\right]}{2\pi} \times \left[U_2\left(\frac{\Delta}{4}, kap(\beta)\right) h_0^{(2)}\left(\frac{\Delta}{8}\right) - U_1\left(\frac{\Delta}{4}, kap(\beta)\right) h_0^{(1)}\left(\frac{\Delta}{8}\right) \right], \quad (6)$$

где

$$U_1(x, y) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \left(\frac{x}{y}\right)^{2s+1} J_{2s+1}(y),$$

$$U_2(x, y) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \left(\frac{x}{y}\right)^{2s+2} J_{2s+2}(y)$$

– функции Ломмеля;

$$h_0^{(1)}(x) = j_0(x) + iy_0(x), \quad h_0^{(2)}(x) = j_0(x) - iy_0(x)$$

– сферические функции Ганкеля 1-го и 2-го рода.

Если $\psi_2(t, \varphi) = 1 - \frac{t^2}{4} - \frac{t^2 \cos 2\varphi}{4}$, то имеем второе приближение.

Используя тождество Якоби, после преобразований из (2) получим

$$f^{(2)}(\beta) = \frac{kaH \exp\left[i\frac{\Delta}{2}\right]}{2\pi} [R_0(c, b) + S_1(c, b) + S_2(c, b)]. \quad (7)$$

Здесь

$$S_1(c, b) = 2 \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \cos(4j\gamma) R_{2j}(c, b),$$

$$S_2(c, b) = 2i \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \cos((4j+2)\gamma) R_{2j+1}(c, b);$$

$$R_n(c, b) = \int_0^1 J_n(cx) J_{2n}(b\sqrt{x}) e^{-icx} dx;$$

Рассеяние света цилиндром конечной длины в приближении Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна. 1.

$$b = kap(\beta); \quad c = \frac{\Delta}{8}; \quad \gamma = \arctg\left(\frac{m - \cos \beta}{\sin \beta}\right).$$

Представим интеграл $R_n(c, b)$ также в виде ряда:

$$R_n(c, b) = \left(\frac{b^2 c}{8}\right)^n \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (b^2/4)^j}{j!(2n+j)!} \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(n+k+\frac{1}{2}\right) \Gamma(2n+1) (-2ic)^k}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) \Gamma(2n+1+k) (2n+1+k+j)k!}, \quad (8)$$

где $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера.

Проведена численная оценка погрешности расчета ВКБ амплитуды светорассеяния по приближенным выражениям $f^{(1)}(\beta)$ и $f^{(2)}(\beta)$ в сравнении с непосредственным расчетом по формуле (2) при различных фазовых сдвигах Δ и при различном количестве членов ряда в функциях Ломмеля, $S_1(c, b)$ и $S_2(c, b)$. Результаты сравнения для относительного показателя преломления $m = 1,1$ показаны в табл. 1 и 2. Относительная погрешность здесь и далее вычислялась как $(F_{\text{прибл}}/F_{\text{точн}} - 1) \cdot 100\%$.

Таблица 1

Относительная погрешность ВКБ-амплитуды светорассеяния $f^{(1)}(\beta)$, рассчитанной по приближенной формуле (6) в сравнении с (2), для цилиндра при различных фазовых сдвигах Δ и углах рассеяния β

Δ	Угол рассеяния β , град					
	0		45		90	
	Re	Im	Re	Im	Re	Im
1	-0,36	3,52	-15,29	-131,60	-0,13	-0,78
2	-3,09	4,66	-18,89	62,35	-0,91	1,60
3	-22,92	5,71	-38,68	29,44	-6,57	7,05
5	105,85	-10,95	-136,28	5,03	13,05	0,41
6	147,69	-73,55	-689,99	-17,38	54,36	26,65

Таблица 2

Относительная погрешность ВКБ-амплитуды светорассеяния $f^{(2)}(\beta)$, рассчитанной по приближенной формуле (7) в сравнении с (2), для цилиндра при различных фазовых сдвигах Δ и углах рассеяния β

Δ	Угол рассеяния β , град					
	0		45		90	
	Re	Im	Re	Im	Re	Im
1	-0,43	3,10	-5,03	-53,63	-0,84	7,24
2	-2,37	3,14	-8,10	33,69	-3,46	3,74
3	-11,51	3,18	-17,40	18,04	-14,78	4,94
5	32,50	2,25	-68,18	11,17	31,68	-2,59
6	46,86	-1,49	-368,27	1,99	36,54	-1,62

Амплитуда светорассеяния в первом приближении $f^{(1)}(\beta)$ дает надежные результаты с погрешностью менее 10% (как для реальной, так и для мнимой части) только при небольших фазовых сдвигах $\Delta < 3$ для направления рассеяния вперед (см. табл. 1). Второе приближение амплитуды светорассеяния $f^{(2)}(\beta)$ действительно и при больших значениях фазовых сдвигов $\Delta < 10$ (см. табл. 2). Установлено,

что при фазовых сдвигах $\Delta < 3$ приближенные выражения для ВКБ амплитуды $f^{(1)}(\beta)$, $f^{(2)}(\beta)$ имеют хорошую сходимость, в частности в функциях Ломмеля $S_1(c, b)$ и $S_2(c, b)$ достаточно одного или двух членов ряда с погрешностью менее 1%.

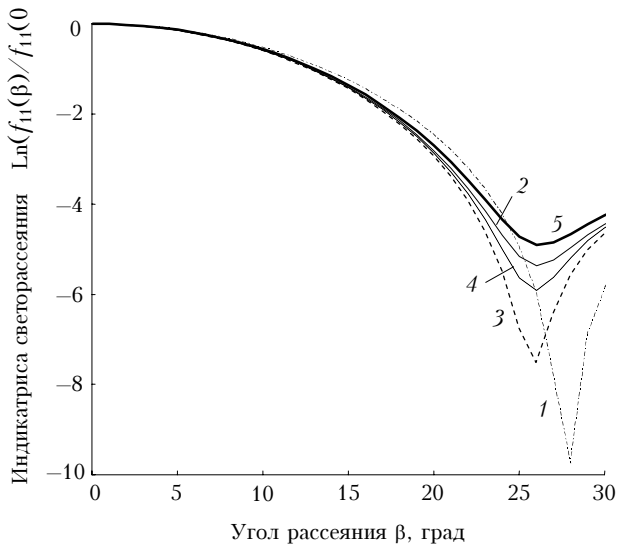
2. Индикатриса светорассеяния

Индикатриса светорассеяния (или элемент матрицы рассеяния f_{11}) для естественного света (поляризация хаотична) рассчитывалась по формуле

$$f_{11}(\beta) = \frac{1 + \cos^2(\beta)}{2} k^2 |f(\beta)|^2, \quad (9)$$

где $|f(\beta)|^2$ – квадрат модуля амплитуды светорассеяния.

Расчеты для бесконечно длинного цилиндра (строгое решение) велись по алгоритму, указанному в [8], а в приближении ВКБ – с использованием амплитуд светорассеяния (2), (6), (7). Индикатриса нормировалась на направление рассеяния вперед.



Зависимость индикатрисы светорассеяния $\text{Ln}[f_{11}(\beta)/f_{11}(0)]$ от угла рассеяния β для конечного цилиндра с использованием в расчете амплитуд рассеяния: РГД (кривая 1), ВКБ $f(\beta)$ (2), ВКБ $f^{(1)}(\beta)$ (3), ВКБ $f^{(2)}(\beta)$ (4) и для бесконечно длинного цилиндра (5) с относительным показателем преломления $m = 1,1$ при $ka = 8$

K.A. Shapovalov. Light scattering of finite length cylinder in Wentzel–Kramers–Brillouin approximation. 1. Light scattering amplitude.

The approximate expressions for calculation of Wentzel–Kramers–Brillouin light scattering amplitude by optically «soft» circular cylinder of finite length for the incident light direction perpendicular to the axis of cylinder are obtained. Numerical results of light scattering phase function (or the element of the scattering matrix f_{11}) for the infinitely long cylinder (rigorous solution) and for finite circular cylinders in the Wentzel–Kramers–Brillouin approximation are compared.

Численное сравнение показало, что величина относительной погрешности индикатрисы светорассеяния для цилиндра в приближении ВКБ по сравнению с результатами строгого решения бесконечно длинного цилиндра не превышает 9% в области углов рассеяния до 25°. Индикатрисы светорассеяния в приближениях РГД, ВКБ и для бесконечно длинного цилиндра с относительным показателем преломления $m = 1,1$ и $ka = 8$ показаны на рисунке. Очевидно, что приближенная амплитуда $f^{(2)}(\beta)$ обеспечивает для индикатрисы светорассеяния ВКБ (см. рисунок) большую точность по сравнению со строгим решением, чем приближенная амплитуда $f^{(1)}(\beta)$.

Заключение

Получены приближенные выражения для расчета ВКБ амплитуды светорассеяния оптически «мягким» цилиндром конечной длины, когда свет падает перпендикулярно оси симметрии цилиндра. Проведено сравнение численных результатов расчета индикатрисы светорассеяния кругового цилиндра в приближении ВКБ и бесконечно длинного цилиндра (строгое решение). Относительная погрешность индикатрисы светорассеяния для цилиндра в приближении ВКБ по сравнению с результатами строгого решения бесконечно длинного цилиндра не превышает 9% в области углов рассеяния до 25°.

1. Зуев В.В. Лидарный контроль стратосферы. Новосибирск: Наука, 2004. 307 с.
2. Лопатин В.Н., Сидько Ф.Я. Введение в оптику взвешенных клеток. Новосибирск: Наука, 1988. 240 с.
3. Петрушин А.Г. Рассеяние и ослабление излучения «мягкими» цилиндрами конечной длины // Оптика и спектроскопия. 1983. Т. 54. Вып. 5. С. 882–884.
4. Лопатин В.Н., Шаповалов К.А. Оценка максимальных значений факторов эффективности светорассеяния в ВКБ-приближении // Оптика и спектроскопия. 1991. Т. 71. Вып. 3. С. 494–497.
5. Исимару А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах / Пер. с англ. М.: Мир, 1981. Т. 1. 280 с.
6. Ван де Хюлст Г. Рассеяние света малыми частицами. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1961. 536 с.
7. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1970. 856 с.
8. Борен К., Хафмен Д. Поглощение и рассеяние света малыми частицами / Пер. с англ. М.: Мир, 1986. 660 с.