

В.П. Будак, А.В. Козельский, Е.Н. Савицкий

## Улучшение сходимости метода сферических гармоник при сильно анизотропном рассеянии

Московский энергетический институт (технический университет)

Поступила в редакцию 7.10.2003 г.

Предлагается алгоритм ускорения сходимости метода сферических гармоник, основанный на использовании малоуглового приближения (МУП), учитывающего анизотропию по углу визирования часть решения. На основе численного решения уравнения переноса излучения (УПИ) методом сферических гармоник находится разность между точным решением УПИ и МУП. Использование в качестве МУП малоугловой модификации метода сферических гармоник позволяет получить решение в аналитической форме, что обеспечивает высокую эффективность алгоритма.

### Введение

Большинство природных образований, будь то атмосфера или морская вода, имеют взвешенные частицы с размерами, существенно превышающими длину волны, что приводит к сильно анизотропному рассеянию света в них. Трудности использования в инженерной практике больших ЭВМ и сложных алгоритмов определили разработку группы специальных приближенных методов решения краевых задач уравнения переноса излучения (УПИ), получивших общее название малоуглового приближения (МУП) [1]. Однако стремительное развитие вычислительной техники, численных методов и программных средств, происходящее в последнее время, заставляет переосмыслить роль приближенных методов в теории переноса излучения. На сегодня решение краевой задачи УПИ численными методами во многих ситуациях требует не больше времени, чем расчет светового поля при тех же условиях в малоугловом приближении.

Тем не менее и сегодня при условиях сильной анизотропии рассеяния сохраняются сложности решения краевых задач УПИ. Представляется, что речь идет о сложностях принципиального характера, связанных с математической некорректностью решения УПИ в этом случае. В методе сферических гармоник (СГ) плохо обусловленная матрица приводит к сильным осцилляциям в решении, в методе Монте-Карло обратное рассеяние является маловероятным событием с большим весом. В МУП обратное рассеяние находится методом возмущений, что делает точность расчетов эквивалентной точности транспортного приближения.

В настоящей статье предлагается подход, в котором на основе численного решения УПИ находится разность между точным решением УПИ и МУП. Поскольку МУП содержит все особенности точного решения, то указанная разность является гладкой

функцией, численное нахождение которой не должно представлять проблем. Тип и аналитическая форма МУП определяют характер используемого численного метода. Возьмем за исходное решение малоугловую модификацию метода сферических гармоник (МСГ) [3], которая аналитически представляется в виде ряда по сферическим гармоникам, что соответственно определяет в качестве численного метода метод СГ [4].

Краевая задача УПИ для слоя мутной среды с оптической толщиной  $\tau_0$  при освещении плоским мононаправленным источником (ПМ) в направлении  $\hat{\mathbf{I}}_0 = \{\sqrt{1 - \mu_0^2}, 0, \mu_0\}$ ,  $\mu_0 = \cos \vartheta_0$ , имеет вид

$$\begin{aligned} \int_{\hat{\mathbf{I}}} \mu \frac{dL(\tau, \mu, \varphi)}{d\tau} + L(\tau, \mu, \varphi) - \frac{\Lambda}{4\pi} \oint x(\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}') L(\tau, \mu, \varphi) d\hat{\mathbf{I}}' = 0, \\ \int_{\hat{\mathbf{I}}} L(\tau, \mu, \varphi) \Big|_{\tau=0, \mu^2=0} = \delta(\hat{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{I}}_0), \quad L(\tau, \mu, \varphi) \Big|_{\tau=\tau_0, \mu=0} = 0, \end{aligned}$$

где  $L(\tau, \mu, \varphi) \equiv L(\tau, \hat{\mathbf{I}})$  — яркость светового поля на оптической глубине  $\tau$  в направлении визирования  $\hat{\mathbf{I}} = \{\sqrt{1 - \mu^2} \cos \varphi, \sqrt{1 - \mu^2} \sin \varphi, \mu\}$ ,  $\mu = \cos \vartheta$ ; ось  $OZ$  перпендикулярна к границе слоя;  $\Lambda$  — альbedo однократного рассеяния;  $x(\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}')$  — индикатриса рассеяния. Здесь и далее символом « $\hat{\mathbf{I}}$ » над буквой будем обозначать единичные векторы.

Сущностью метода СГ является разложение искомой яркости светового поля и индикатрисы рассеяния по сферическим функциям, что приводит к бесконечной системе дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами [3]. Для решения систему делают конечной, полагая все коэффициенты разложения поля, начиная с номеров, больших некоторого  $N$ , равными нулю ( $P_N$ -приближение). Однако при освещении ПМ-источником в решении содержится сингулярность, которая оп-

ределяется прямым нерассеянным излучением источника. Поэтому при любом  $N$  решение сильно сглаживается, что приводит к значительным его осцилляциям. Для устранения этого из решения вычитается прямое излучение, а краевая задача формулируется только для рассеянного излучения [4]. Нетрудно видеть, что разложение рассеянного излучения имеет тот порядок разложения, что и индикатриса рассеяния.

Система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами метода СГ имеет аналитическое решение в виде линейной комбинации экспонент с показателями, являющимися собственными числами матрицы системы [3]. Поскольку матрица имеет парные собственные числа с различными знаками, сильно отличающиеся по абсолютной величине, то решение системы становится неустойчивым уже при  $N > 30$  [5]. Для устойчивого решения такой системы был предложен метод пошаговой ортогонализации решения [6], получивший изящное завершение в аналитическом виде преобразования подобия [3]. Метод сферических гармоник в форме [3] позволяет получать решение при любом  $N$ , но для углов падения, отличных от нормального, это приводит к осцилляциям из-за ограничений количества азимутальных гармоник, что породило различные сглаживающие процедуры [7, 8]. Однако они оказываются не только требовательными ко времени счета, но и вносят неконтролируемый произвол в строгий алгоритм численного решения.

Для устранения указанной неустойчивости будем искать решение краевой задачи (1) в виде суммы

$$L(\tau, \mu, \varphi) = \tilde{L}(\tau, \mu, \varphi) + L_{\text{МУП}}(\tau, \hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}_0), \quad (2)$$

где решение в малугловом приближении [9] имеет вид

$$L_{\text{МУП}}(\tau, \hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi} Z_k(\tau) P_k(\hat{\mathbf{I}}_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi} Z_k(\tau) \sum_{m=0}^k (2 - \delta_{m0}) Q_k^m(\mu_0) Q_k^m(\mu) \cos m\varphi, \quad (3)$$

причем

$$Z_k(\tau) = \exp\left\{-\frac{(1 - \Lambda x_k)\tau}{\mu_0}\right\};$$

$P_l^m(\mu)$  — присоединенные полиномы Лежандра, при этом

$$P_l(\mu) \equiv P_l^0(\mu);$$

$$Q_l^m(\mu) = \sqrt{\frac{(l-n)!}{(l+n)!}} P_l^m(\mu)$$

— перенормированные полиномы Лежандра [3], для которых справедлива нормировка

$$\int_{-1}^1 Q_l^m(\mu) Q_k^m(\mu) d\mu = \frac{2}{2k+1} \delta_{lk}. \quad (4)$$

Решение (3) удовлетворяет краевой задаче аналогичной (1), но с граничными условиями в преобращении обратным рассеянием

$$L_{\text{МУП}}(\tau, \hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}_0) \Big|_{\tau=0} = \delta(\hat{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{I}}_0) \quad (5)$$

содержит всю анизотропную часть поля, что делает  $\tilde{L}(\tau, \mu, \varphi)$  гладкой функцией, удовлетворяющей краевой задаче:

$$\begin{aligned} \mu \frac{d\tilde{L}(\tau, \mu, \varphi)}{d\tau} + \tilde{L}(\tau, \mu, \varphi) - \frac{\Lambda}{4\pi} \hat{\mathbf{O}} x(\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}') \tilde{L}(\tau, \mu, \varphi) d\hat{\mathbf{I}}' = \\ = -\mu \frac{dL_{\text{МУП}}(\tau, \hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}_0)}{d\tau} - L_{\text{МУП}}(\tau, \hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}_0) + \\ + \frac{\Lambda}{4\pi} \hat{\mathbf{O}} x(\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}') L_{\text{МУП}}(\tau, \hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}_0) d\hat{\mathbf{I}}'; \\ L(\tau, \mu, \varphi) \Big|_{\tau=0, \mu \neq 0} = 0, \quad L(\tau, \mu, \varphi) \Big|_{\tau=\tau_0, \mu \neq 0} = -L_{\text{МУП}}(\tau_0, \hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}_0). \end{aligned}$$

Представим решение и индикатрису рассеяния в виде разложения в ряды по сферическим гармоникам

$$\tilde{L}(\tau, \mu, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^l \frac{2l+1}{4\pi} C_l^n(\tau) Q_l^n(\mu) e^{-in\varphi}, \quad (7)$$

$$x(\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}') = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) x_l P_l(\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}').$$

Вследствие симметрии светового поля относительно плоскости  $OZX$  коэффициенты разложения поля в (7) должны обладать симметрией  $C_l^n(\tau) = C_l^{-n}(\tau)$ , что приводит (7) к классическому разложению [4]:

$$L(\tau, \mu, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (2 - \delta_{0n}) \cos n\varphi \sum_{l=n}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} C_l^n(\tau) Q_l^n(\mu).$$

Представление индикатрисы рассеяния в (7) с учетом теоремы сложения для полиномов Лежандра можно переписать в виде

$$x(\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}') = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=-l}^l x_l Y_l^n(\hat{\mathbf{I}}) \overline{Y_l^n(\hat{\mathbf{I}}')}, \quad (8)$$

где  $Y_l^n(\hat{\mathbf{I}}) = \sqrt{\frac{2k+1}{2}} Q_k^m(\mu) e^{-in\varphi}$  — сферические функции, образующие полную ортонормированную систему на сфере; чертой сверху обозначено комплексное сопряжение.

Подставим выражения (3) и (7) в УПИ краевой задачи (6) и учтем (8). После чего умножим полученное уравнение на  $Q_k^m(\mu) e^{-im\varphi}$  и проинтегрируем по всей области изменения  $\mu, \varphi$ . Тогда с учетом ортогональности сферических функций получим бесконечную систему связанных дифференциальных уравнений метода сферических гармоник

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2k+1} \frac{d}{d\tau} \left[ \sqrt{(k-m+1)(k+m+1)} C_{k+1}^m + \right. \\
& \left. + \sqrt{(k-m)(k+m)} C_{k-1}^m \right] + (1 - \Lambda x_k) C_k^m(\tau) = \\
& = -\frac{1}{2k+1} \frac{1}{\mu_0} \frac{d}{d\tau} \left[ \sqrt{(k-m+1)(k+m+1)} \times \right. \\
& \quad \times (1 - \Lambda x_{k+1}) Q_{k+1}^m(\mu_0) Z_{k+1} + \\
& \quad \left. + \sqrt{(k-m)(k+m)} (1 - \Lambda x_{k-1}) Q_{k-1}^m(\mu_0) Z_{k-1} \right] - \\
& \quad - (1 - \Lambda x_k) Q_k^m(\mu_0) Z_k(\tau). \quad (9)
\end{aligned}$$

Решение бесконечной системы (9) невозможно, поэтому ее делают конечной, положив  $C_k^m(\tau) \equiv 0$ ,  $\forall k \geq N$ . Однако при этом возникает известная проблема при решении краевой задачи: приближенное решение не может удовлетворить точным граничным условиям, которые должны быть заменены приближенными. Наилучшим вариантом являются граничные условия в форме Маршака [10], выражающие закон сохранения энергии в форме равенства потоков излучения на границе раздела среды

$$\forall j \in \left\{ \frac{m+1}{2}, \frac{N+1}{2} \right\}, \forall m \in \overline{0, N} :$$

$$\int_{\Omega_+} L(0, \hat{\mathbf{I}}) Y_{2j-1}^m(\hat{\mathbf{I}}) d\hat{\mathbf{I}} = 0,$$

$$\int_{\Omega_-} L(\tau_0, \hat{\mathbf{I}}) Y_{2j-1}^m(\hat{\mathbf{I}}) d\hat{\mathbf{I}} = - \int_{\Omega_{\text{МП}}} L(\tau_0, \hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{I}}_0) Y_{2j-1}^m(\hat{\mathbf{I}}) d\hat{\mathbf{I}}, \quad (10)$$

где  $\Omega_{\pm} = \{ \hat{\mathbf{I}} : (\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{z}})_{\pm} > 0 \}$ ,  $\hat{\mathbf{z}}$  – единичный вектор нормали к границе.

Конечная система дифференциальных уравнений (9) с постоянными коэффициентами имеет в решении  $N+1-m$  константы, которые определяются из системы граничных условий (10). Практически оказываются лучше нечетные  $N$  для четных  $m$ , и наоборот [3]. Поэтому далее предполагается, что система (9) имеет  $N_m = N + \delta_m$  уравнений, где

$$\delta_m = \begin{cases} 1, & \text{при четном } m, \\ 0, & \text{при нечетном } m. \end{cases}$$

С учетом разложений (3) и (7) граничные условия (10) приобретают вид

$$\begin{aligned}
C_{2j+1}^m(0) + \sum_{l=m/2-1}^{\frac{N+\delta_m-1}{2}} G_{jl}^m C_{2l-2}^m(0) &= 0, \\
C_{2j+1}^m(\tau_0) - \sum_{l=m/2-1}^{\frac{N+\delta_m-1}{2}} G_{jl}^m C_{2l-2}^m(\tau_0) &= -Y_j^m(\tau_0), \quad (11)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
Y_j^m(\tau, \mu_0) &= \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) Z_k(\tau) Q_k^m(\mu_0) \int_{-1}^0 Q_k^m(\mu) Q_{2j-1}^m(\mu) d\mu = \\
&= Z_{2j-1}(\tau) Q_{2j-1}^m(\mu_0) - \sum_{l=0}^{\infty} G_{jl}^m Z_{2l-2}(\tau) Q_{2l-2}^m(\mu_0),
\end{aligned}$$

коэффициенты

$$G_{jl} = (4l-3) \int_0^1 Q_{2j-1}^m(\mu) Q_{2l-2}^m(\mu) d\mu,$$

для которых приведены простые рекуррентные соотношения в [11].

Для аналитического удобства конечной системе (9) можно придать матричный вид аналогично [7]:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{A}}^m \frac{d}{d\tau} \tilde{\mathbf{C}}^m(\tau) + \tilde{\mathbf{D}} \tilde{\mathbf{C}}^m(\tau) &= \\
= (\tilde{\mathbf{A}}^m / \mu_0 - \tilde{\mathbf{I}}) \tilde{\mathbf{D}} \tilde{\mathbf{Q}}^m \tilde{\mathbf{Z}}(\tau) + a_{N+1}^m \tilde{\mathbf{Z}}_{N+1}(\tau), \quad (12)
\end{aligned}$$

где

$$(\tilde{\mathbf{A}}^m)_{i,i+1} = \frac{\sqrt{(i-m)(i+m)}}{2i-1},$$

$$(\tilde{\mathbf{A}}^m)_{i,i-1} = \frac{\sqrt{(i-m-1)(i+m-1)}}{2i-1},$$

$$\tilde{\mathbf{C}} = \{C_{i-1}^m(\tau)\}, \quad \tilde{\mathbf{D}} = \text{Diag}\{(1 - \Lambda x_{i-1}) / \mu_0\};$$

$$\tilde{\mathbf{Q}}^m = \text{Diag}\{Q_{i-1}^m(\mu_0)\}; \quad \tilde{\mathbf{Z}} = \{Z_{i-1}(\tau)\};$$

$$a_{N+1}^m = \frac{\sqrt{(N+1-m)(N+1+m)}}{2N+1} \frac{1 - \Lambda x_{N+1}}{\mu_0} Q_{N+1}^m(\mu_0);$$

$$\tilde{\mathbf{Z}}_{N+1} = \left\{ \underset{N}{0, \dots, 0}, Z_{N+1}(\tau) \right\}.$$

Здесь и далее двойной стрелкой над символом будем обозначать матрицу, одинарной правой – вектор-столбец, одинарной левой – вектор-строку. Для упрощения записи там, где очевидно, будем опускать азимутальный индекс  $m$ .

В  $P_N$ -приближении метода СГ в правую часть уравнения входит с учетом выражения (9) коэффициент  $Z_{N+1}(\tau)$ , что матрица  $\tilde{\mathbf{A}}^m$  непосредственно не учитывает, поскольку формируется в предположении  $C_{N+1}^m(\tau) = 0$ . Это определяет последний член в правой части уравнения (12).

Решение системы (12) представимо в виде

$$\begin{aligned}
-\tilde{\mathbf{C}}(0) + e^{-\tilde{\mathbf{B}}\tau_0} \tilde{\mathbf{C}}(\tau_0) &= \frac{1}{\mu_0} \int_0^{\tau_0} e^{-\tilde{\mathbf{B}}t} (\tilde{\mathbf{I}} - \mu_0 \tilde{\mathbf{A}}^{-1}) \tilde{\mathbf{D}} \tilde{\mathbf{Q}} \tilde{\mathbf{Z}}(t) dt + \\
&+ a_{N+1}^m \int_0^{\tau_0} e^{-\tilde{\mathbf{B}}t} \tilde{\mathbf{A}}^{-1} \tilde{\mathbf{Z}}_{N+1}(t) dt,
\end{aligned}$$

где  $\tilde{\mathbf{B}} = \tilde{\mathbf{A}}^{-1} \tilde{\mathbf{D}}$ .

Матричная экспонента всегда представима в виде

$$e^{-\tilde{B}t} = \tilde{U} e^{-\tilde{\Gamma}t} \tilde{U}^{-1}, \quad (14)$$

где  $\tilde{\Gamma}$  — диагональная матрица собственных значений;  $\tilde{U}$  — матрица соответствующих собственных векторов матрицы  $\tilde{B}$ .

С учетом последнего выражения (14) интеграл, входящий в уравнение (13), можно переписать в форме следующего выражения:

$$\begin{aligned} \tilde{J}(\tau) = & \frac{1}{\mu_0} \int_0^{\tau_0} e^{-\tilde{\Gamma}t} \tilde{T} \tilde{Z}(t) dt + \\ & + a_{N+1}^m \int_0^{\tau_0} e^{-\tilde{\Gamma}t} Z_{N+1}(t) dt \tilde{U}^{-1} \tilde{A}_{N+1}^{-1}, \end{aligned} \quad (15)$$

где  $\tilde{T} = \tilde{U}^{-1}(\tilde{I} - \mu_0 \tilde{A}^{-1}) \tilde{D} \tilde{Q}$ .

Поскольку матрица  $e^{-\tilde{\Gamma}t}$  диагональная, а

$$\tilde{Z}(t) = \left\{ \exp \left[ -(1 - \Lambda x_{i-1}) / \mu_0 \right] \right\}$$

— вектор-столбец, то все элементы матрицы  $\tilde{J}$  легко вычисляются

$$\begin{aligned} \tilde{J} = & \left\{ \sum_{j=1}^{N+1} (\tilde{T})_{ij} \frac{[1 - \exp[-\Gamma_{ii} \tau_0 - (1 - \Lambda x_{j-1}) \tau_0 / \mu_0]]}{\Gamma_{ii} \mu_0 + (1 - \Lambda x_{j-1})} \right\} + \\ & + a_{N+1}^m (\tilde{\Gamma} + b_{N+1} \tilde{I})^{-1} \left\{ \tilde{I} - \exp[-(\tilde{\Gamma} + b_{N+1} \tilde{I})] \right\} \tilde{U}^{-1} \tilde{A}_{N+1}^{-1}, \end{aligned} \quad (16)$$

а выражение (13) приобретает вид

$$-\tilde{C}(0) + \tilde{U} e^{-\tilde{\Gamma}t} \tilde{U}^{-1} \tilde{C}(\tau_0) = \tilde{U} \tilde{J}(\tau_0). \quad (17)$$

Последнее соотношение (17) представляет собой систему из  $(N_m - m)$  линейных алгебраических уравнений с  $2(N_m - m)$ . Недостающие  $(N_m - m)$  уравнений дают граничные условия (11), которым также придадим аналогично [6] матричный вид:

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{odd}(0) + \tilde{G} \tilde{C}_{even}(0) &= 0, \\ \tilde{C}_{odd}(\tau_0) - \tilde{G} \tilde{C}_{even}(\tau_0) &= -\tilde{Y}(\tau_0, \mu_0), \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$(\tilde{G})_{jl} = G_{jl}; \quad \tilde{Y}(\tau_0, \mu_0) = \{Y_j^m(\tau_0, \mu_0)\},$$

а индексы *odd*, *even* обозначают столбцы, составленные соответственно из нечетных или четных элементов  $\tilde{C}$ .

Устранить проблему разделения в граничных условиях четных и нечетных элементов можно, введя матрицу, сортирующую столбцы на четные или нечетные элементы [6]:

$$\tilde{P} \tilde{C} \equiv \begin{bmatrix} \tilde{C}_{odd} \\ \tilde{C}_{even} \end{bmatrix},$$

что позволит граничным условиям (18) придать следующую форму:

$$\begin{bmatrix} \tilde{I} & \tilde{G} \end{bmatrix} \tilde{P} \tilde{C}(0) = \tilde{0}, \quad \begin{bmatrix} \tilde{I} & -\tilde{G} \end{bmatrix} \tilde{P} \tilde{C}(\tau_0) = \begin{bmatrix} \tilde{0} \\ -\tilde{Y}(\tau_0) \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Тогда выражения (17) и (19) образуют замкнутую систему линейных алгебраических уравнений, из решения которой можно определить искомые коэффициенты. Обусловленность матрицы системы быстро ухудшается с ростом толщины слоя. Для устранения этого явления следует воспользоваться масштабным преобразованием [3]. Предположим, что собственные значения матрицы  $\tilde{B}$  отсортированы по возрастанию

$$\tilde{\Gamma} = \begin{bmatrix} \tilde{\Gamma}_- & 0 \\ 0 & \tilde{\Gamma}_+ \end{bmatrix}, \quad \tilde{\Gamma}_+ = \tilde{\Gamma}_- = \text{Diag}\{\gamma_i\}, \quad \gamma_i < \gamma_{i+1}.$$

Тогда

$$e^{-\tilde{\Gamma}\tau} = \begin{bmatrix} e^{-\tilde{\Gamma}_-\tau} & 0 \\ 0 & e^{-\tilde{\Gamma}_+\tau} \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Для преобразования подобия умножим (17) на матрицу  $\tilde{S} \tilde{U}^{-1}$ , где

$$\tilde{S} = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{I} \\ e^{\tilde{\Gamma}_-\tau_0} & 0 \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Откуда уравнение (17) с учетом (20) и (21) примет вид

$$-\tilde{S} \tilde{U}^{-1} \tilde{C}(0) + \tilde{H} \tilde{U}^{-1} \tilde{C}(\tau_0) = \tilde{S} \tilde{J}(\tau_0), \quad (22)$$

где

$$\tilde{H} = \tilde{S} e^{-\tilde{\Gamma}\tau_0} = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{I} \\ e^{\tilde{\Gamma}_-\tau_0} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-\tilde{\Gamma}_-\tau_0} & 0 \\ 0 & e^{-\tilde{\Gamma}_+\tau_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & e^{-\tilde{\Gamma}_+\tau_0} \\ \tilde{I} & 0 \end{bmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что в уравнение (22) входят экспоненты только с отрицательными показателями и уравнение сохраняет устойчивость при любых значениях  $N$  и  $\tau_0$ . Из решения системы линейных уравнений (19) и (22) определяются искомые коэффициенты разложения тела яркости на верхней и нижней границах среды.

Изложенный алгоритм относится к случаю  $\Lambda \neq 1$ . При  $\Lambda = 1$  матрица  $\tilde{B}$  становится вырожденной и представление (14) невозможно. Однако выражение (14) можно заменить жордановой формой. Это ничего, по сути, не изменяет в самом алгоритме, только усложняет его изложение. Алгоритм при  $\Lambda = 1$  строится полностью по аналогии с [3] при учете изменения правой части (22) в соответствии с (16). Не представляет труда

обобщение метода решения на стратифицированный слой: слой разбивается на совокупность однородных слоев, для каждого из которых выписывается общая система, аналогичная описанной. Описанный алгоритм был реализован в системе The MathWorks Matlab v.6.5 Release 13, предоставляющей простой интерфейс к любым матричным операциям. Время счета на компьютере с процессором Intel Pentium IV 2,4 ГГц ни при каких входных данных не превышало 30 с.

Поскольку точное решение при малых оптических толщах мало отличается для передней полусферы от малоуглового приближения [9], то выражение (3) позволяет оценить количество необходимых азимутальных гармоник. Нетрудно видеть из (3), что коэффициент разложения решения УПИ для ПМ-источника будет приблизительно равен  $(2 - \delta_{m0})Z_k(\tau)Q_k^m(\mu_0)$ , т.е. зависимость от  $m$  определяется  $Q_k^m(\mu_0)$ , что в общем случае при больших углах падения требует для расчета  $m \approx k$ , а  $k$  определяется степенью анизотропии индикатрисы рассеяния.

Для определения связи оптических характеристик среды с микрофизическими (функция распределения частиц по размерам и показатель преломления частиц) программа была дополнена результатами теории Ми в форме [12], представляющей разложение индикатрисы рассеяния непосредственно по сферическим функциям.

На рис. 1–4 приведены графики расчета световых полей, наглядно демонстрирующие ускорение сходимости метода сферических гармоник при использовании описанного в настоящей статье алгоритма.

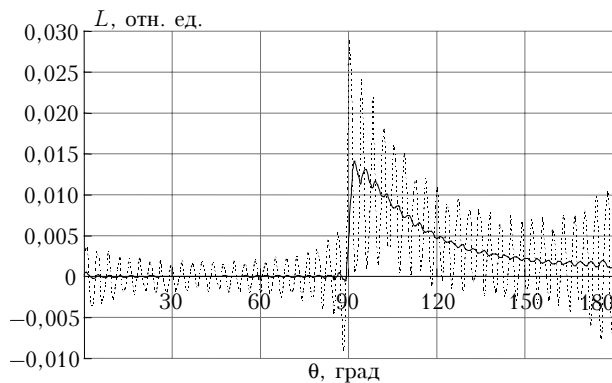


Рис. 1. Яркость отраженного слоя излучения при  $\tau_0 = 20,0$ ,  $\Lambda = 0,8$ ,  $\theta_0 = 40^\circ$ . Количество полиномов Лежандра в разложении  $N = 99$ , по азимуту  $M = 4$ . Пунктиром отображены расчеты методом СГ [3]

На всех графиках непрерывной линией нанесены результаты расчетов по настоящему алгоритму. Для простоты анализа тестовые расчеты выполнялись для индикатрисы Хенби–Гринштейна, зависящей от одного параметра  $g$  — среднего косинуса угла рассеяния. Все графики соответствуют  $g = 0,97$ , что является хорошим представлением для океанских и облачных индикатрис.

Рис. 1 и 2 демонстрируют ускорение сходимости при расчете отраженного слоя излучения: для достижения приблизительно одинаковой точности расчетов по методу СГ [3] требуется вдвое большее число гармоник, что увеличивает время счета более чем в 4 раза. При  $N = 299$  и  $M = 8$  оба алгоритма имеют одинаковую точность расчетов.

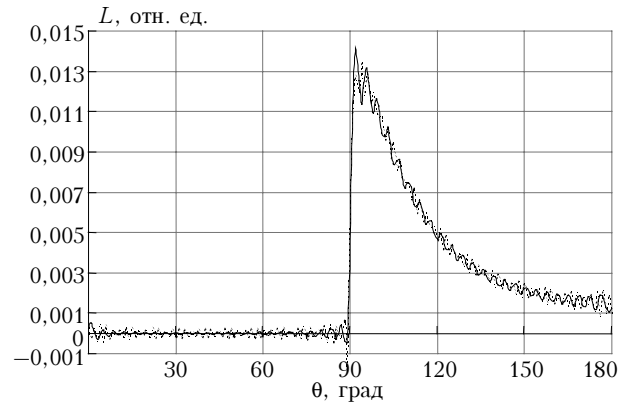


Рис. 2. То же, что и на рис. 1, но при расчетах по [3]:  $N = 299$ ,  $M = 8$

На рис. 3 при этих значениях параметров показано сравнение яркости отраженного излучения с расчетами в приближениях однократного рассеяния и «квазиоднократном», при котором рассеяние назад учитывается в однократном приближении, а вперед в малоугловом. Нетрудно видеть, что квазиоднократное сильно завышает значение яркости.

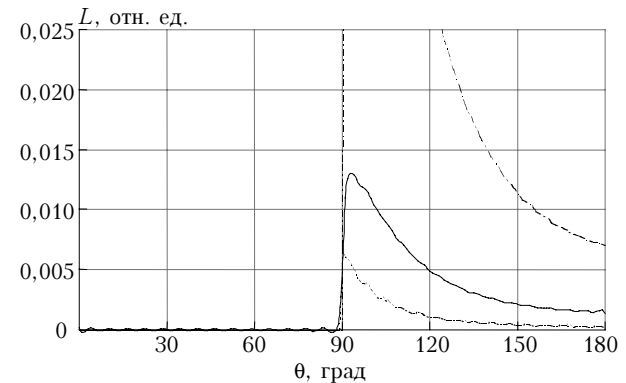


Рис. 3. Яркость отраженного слоя излучения при:  $\tau_0 = 20,0$ ,  $\Lambda = 0,8$ ,  $\theta_0 = 40^\circ$ . Количество полиномов Лежандра в разложении  $N = 299$ , по азимуту  $M = 8$ . Пунктиром отображены расчеты в приближении однократного рассеяния, штрихпунктир — малоугловое приближение

На рис. 4 представлено сравнение расчетов для прошедшего излучения. Расчеты проведены для оптической толщи  $\tau_0 = 0,5$ , когда малоугловое приближение, входящее в предлагаемый в настоящей статье алгоритм, можно считать совпадающим с точным решением УПИ. Нетрудно видеть, что метод СГ [3] сходится к решению по предлагаемому алгоритму с увеличением количества гармоник, однако при кривой 5 время счета уже превышает 30 мин, в то время как расчет по предложенной модификации СГ занимает 5 с.

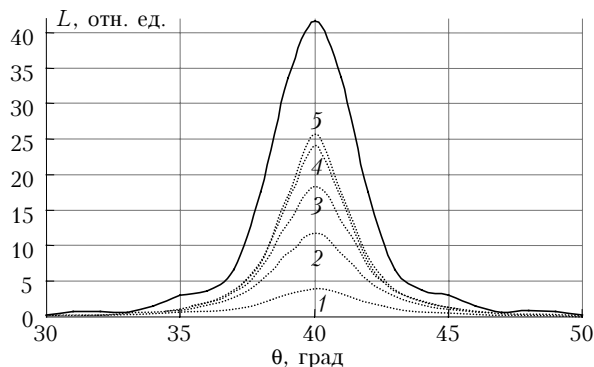


Рис. 4. Яркость прошедшего слой излучения при:  $\tau_0 = 0,5$ ,  $\Lambda = 0,8$ ,  $\theta_0 = 40^\circ$ . При расчетах по настоящему алгоритму  $N = 99$ ,  $M = 4$ . Пунктиром отображены расчеты методом СГ [3] при: 1 –  $N = 99$ ,  $M = 4$ ; 2 –  $N = 399$ ,  $M = 16$ ; 3 –  $N = 399$ ,  $M = 32$ ; 4 –  $N = 399$ ,  $M = 64$ ; 5 –  $N = 399$ ,  $M = 128$

В заключение отметим, что рассмотренный на примере плоской среды алгоритм повышения сходимости метода СГ еще большее значение будет иметь для задач сосредоточенных источников, где кроме  $\delta$ -особенности по углу в прямом излучении содержатся гиперболическая и логарифмическая особенности в первой и второй кратностях [13], а малоугловая модификация метода СГ их учитывает точно [14].

1. Зега Э.П., Иванов А.П., Кацев И.Л. Перенос изображения в рассеивающих средах. Минск: Наука и техника, 1985. 240 с.
2. Boudak V.P., Kozelsky A.V. Backscattering radiance calculation in turbid medium with anisotropic scattering by spherical harmonics method // Proc. SPIE. 2003. V. 5026. P. 135–139.
3. Karp A.H., Greenstadt J., Fillmore J.A. Radiative

transfer through an arbitrary thick, scattering atmosphere // J. Quant. Spectrosc. and Radiat. Transfer. 1980. V. 24. P. 391–406.

4. Чандрасекар С. Перенос лучистой энергии. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1953. 431 с.
5. Devaux C., Fouquart Y., Herman M., Lenoble J. Comparaison de diverses methodes de resolution de l'equation de transfert du rayonnement dans un milieu diffusant // J. Quant. Spectrosc. and Radiat. Transfer. 1973. V. 13. P. 1421–1431.
6. Canosa J., Penafiel H.R. A direct solution of the radiative transfer equation: application to Rayleigh and Mie atmosphere // J. Quant. Spectrosc. and Radiat. Transfer. 1973. V. 13. P. 21–39.
7. Karp A.H., Petrack S. On the spherical harmonics and discrete ordinate methods for azimuth-dependent intensity calculations // J. Quant. Spectrosc. and Radiat. Transfer. 1983. V. 30. P. 351–356.
8. Muldashev U.M., Sultangazin A.I., Lyapustin A.I. Spherical harmonics method in the problem of radiative transfer in the atmosphere-surface system // J. Quant. Spectrosc. and Radiat. Transfer. 1999. V. 61. N 3. P. 393–404.
9. Goudsmit S., Saunderson J.L. Multiple Scattering of Electrons // Phys. Rev. 1940. Part I. V. 57. P. 24–29; Part II. V. 58. P. 36–42.
10. Marshak R.E. Note on the spherical harmonics method as applied to the Milne problem for a sphere // Phys. Rev. 1947. V. 71. P. 443–446.
11. Dave J.V. A direct solution of the spherical harmonics approximation to the radiative transfer equation for an arbitrary solar elevation // J. Atmos. Sci. 1975. V. 32. P. 790–798.
12. de Rooij W.A., van der Star C.C.A.H. Expansion of Mie scattering matrices in generalized functions // Astron. and Astrophys. 1984. V. 131. P. 237–248.
13. Герможенова Т.А. Локальные свойства решений уравнения переноса. М.: Наука, 1986. 272 с.
14. Будаков В.П., Сармин С.Э. Решение уравнения переноса излучения методом сферических гармоник в малоугловой модификации // Оптика атмосф. 1990. Т. 3. № 9. С. 981–987.

**Boudak V.P., Kozelsky A.V., Savitsky E.N. Convergence acceleration of a spherical harmonics method at strongly anisotropic scattering.**

The technique of convergence acceleration of a spherical harmonics method based on the usage of the small angle approximation (SAA) considering the sighting-angle anisotropic part of the solution is offered. On the basis of the numerical solution of the radiative transfer equation (RTE) by the method of spherical harmonics, the difference between the precise solution of RTE and SAA is found. The usage of the small angle modification of the spherical harmonics method as SAA allows the solution to be obtained in the analytical form, which ensures the high performance of the algorithm.