

И.А. Мальцев, А.Г. Мальцев, В.С. Смирнов

## Феноменологическая модель распространения излучения в пространственно-неоднородной среде

Белорусский национальный технический университет, г. Минск

Поступила в редакцию 28.10.2002 г.

Исследуется трансформация углового спектра излучения, проходящего через неоднородную усиливающую среду. Сформулированы условия, при которых можно эффективно увеличивать длину усиливающей среды до размеров, при которых расходимость пучка будет минимальной. Показано, что угловой спектр излучения в нелинейной усиливающей среде является вполне управляемой величиной.

### Введение

В настоящее время общепринятой моделью, описывающей распространение излучения в средах с различными типами пространственно-временных неоднородностей, является модель, основанная на параболическом приближении для уравнений Максвелла [1]. На основе этой модели рассчитываются характеристики открытых резонаторов и волноводов [2] в линейной электродинамике, в нелинейной электродинамике решаются задачи о самофокусировке и солитонном распространении излучения [3], задачи статистической нелинейной оптики [4] и т.д. Простота модели, широкие пределы применимости и обусловили ее широкое использование в различных областях физики. В данной статье используется указанная модель для описания трансформации углового спектра излучения, проходящего через неоднородную усиливающую среду.

### 1. Параболическое приближение

Данное приближение основывается на следующих соображениях. В зависимости от геометрии задачи выбирается локальная система координат, в которой граничные поверхности отображаются на плоскости, ортогональные направлению распространения излучения. Ось  $Z$  выбирается в направлении распространения ( $Z \parallel \mathbf{k}$  – волновой вектор). При этом граничные условия становятся плоскими, а среда неоднородной, т.е. кривизна границ (неоднородность) переносится на саму среду, которую, в свою очередь, можно промоделировать неоднородной диэлектрической восприимчивостью. Следующее приближение связано с квазимонохроматичностью излучения: поле в среде ищется в виде

$$E = E(\mathbf{r}, t) \exp[-i(\omega t - kz)] + \text{к.с.}, \quad (1)$$

где  $E(\mathbf{r}, t)$  – медленно меняющаяся, в сравнении с временной частью экспоненты, комплексная амплитуда поля;  $\omega$  – частота поля.

Сформулируем конкретную задачу, которая будет рассматриваться ниже. В однопроходном приближении (усиление за один проход) можно пренебречь отражением света от границ и без ограничения общности границы считать плоскими. Тогда, выбирая направление оси  $Z$  в соответствии с (1), граничное условие ставится на плоскости  $z = 0$ . Так как нас будет интересовать трансформация углового спектра излучения, т.е. поперечная структура светового пучка в зависимости от  $z$ , то падающее на среду поле зададим в виде гауссова распределения амплитуд

$$\varepsilon(\mathbf{r}_\perp, 0) = \exp(-b_0 r_\perp^2). \quad (2)$$

Смысл параметров распределения следующий: комплексная амплитуда в центре пучка единичная,  $r_0 = (b'_0)^{-1/2}$  – радиус поперечного сечения ( $r_\perp^2 = x^2 + y^2$ ),  $R_0 = (b''_0 \cdot 2\bar{\kappa})^{-1}$  – радиус кривизны волнового фронта пучка ( $b_0 = b'_0 + ib''_0$ ) [5],  $\bar{\kappa} = 1/k = \lambda/2\pi$ .

Особенности распространения излучения в неоднородной усиливающей среде рассмотрим на примере линзоподобной среды, в которой зададим диэлектрическую восприимчивость среды  $\chi(r_\perp)$  в виде

$$\chi(r_\perp) = \chi_0 [1 - a(r_\perp/r_0)^2], \quad (3)$$

где

$$\chi_0 = \chi'_0 - i\chi''_0.$$

Вещественный параметр  $a$  определяет тип «линзы», при  $a > 0$  усиление больше в центре пучка, при  $a < 0$  усиление в центре минимально,  $\chi''_0 > 0$  – усиливающая среда. На рисунке показан график распределения коэффициента усиления, представляющий собой обратную величину мнимой части диэлектрической восприимчивости, а именно  $-\chi''$ , в поперечном сечении светового пучка  $\mathbf{r}_\perp$  в усиливающей среде [6]. При выборе  $\chi(r_\perp)$  в виде (3) гауссово распределение сохраняется вдоль всей длины усиления.

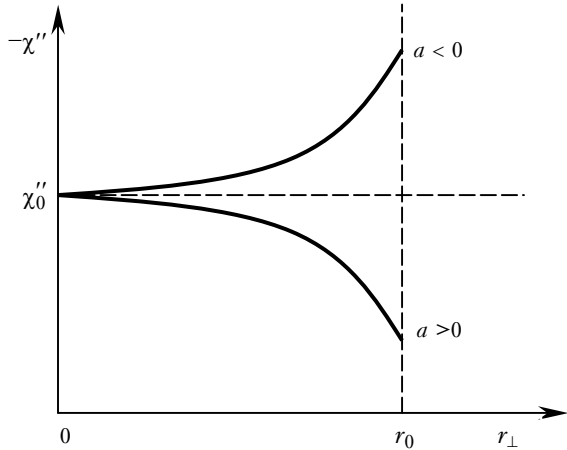


График распределения коэффициента усиления в поперечном сечении светового пучка

Уравнение Максвелла для поля  $E$  в приближении гладких крупномасштабных неоднородностей  $|\nabla\chi(\mathbf{r})|\tilde{\lambda} \ll 1$

$$\Delta E - [1 + 4\pi\chi(\mathbf{r})] \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0. \quad (4)$$

После подстановки решения уравнение (1) преобразуется в параболическое уравнение для амплитуд

$$\left[ i\tilde{\lambda} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\tilde{\lambda}^2}{2} \Delta_{\perp} + 2\pi\chi(r_{\perp}) \right] \varepsilon = 0 \quad (5)$$

в приближении  $\left| \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right| \tilde{\lambda} \ll 1$ . В (5)  $\Delta_{\perp}$  – поперечная часть лапласиана, а само уравнение (5) – математическая формулировка стационарного параболического приближения для плоских границ.

## 2. Искажение углового спектра

Для выяснения вопроса об искажении углового спектра излучения за счет прохождения пучком света усиливающего слоя предположим, что на входе линзоподобной среды плоский фронт, т.е.  $b_0'' = 0$ . Тем самым мы сейчас оставляем в стороне вопрос о согласовании фронтов и рассматриваем искажения только за счет усиливающей среды.

Таким образом, в задаче остались два характерных параметра, характеризующих падающий пучок:  $r_0$  – радиус пучка и  $l_d^{(0)} = 2r_0^2/\tilde{\lambda}$  – дифракционная длина. Целесообразно ввести безразмерные переменные

$$\xi = \frac{z}{l_d^{(0)}}; \quad \rho = \frac{r_{\perp}}{r_0}, \quad (6)$$

по отношению к которым будут сравниваться характерные размеры искажений, а также параметры, характеризующие усиливающую среду:

$$X = 2\pi\chi_0'' = \frac{\tilde{\lambda}}{L}; \quad 2\pi\chi_0' = n - 1; \quad (7)$$

$$q = [\pi a \chi_0]^{1/2} r_0 / \tilde{\lambda} = q' - iq''.$$

Смысл этих параметров следующий:  $L$  – длина усиления;  $n$  – показатель преломления;  $|q| \sim l_d^{(0)}/l_d$  – относительное изменение дифракционной длины в усиливающей среде.

В силу цилиндрической симметрии задачи гауссово распределение поля в среде сохраняется и в переменных (6), (7) выглядит следующим образом (автомодельное решение):

$$\varepsilon(\rho, \xi) = A(\xi) \exp[-b(\xi)\rho^2]. \quad (8)$$

Учитывая граничные условия  $A(0) = 1$  и  $b(0) = 1$ , находим амплитуду волны

$$A(\xi) = \frac{\cos(i\beta/2)}{\cos(4q\xi - i\beta/2)} \exp\left[ \frac{l_d^{(0)}}{L} \xi + i(n-1) \frac{l_d^{(0)}}{\tilde{\lambda}} \xi \right] \quad (9)$$

и поперечное распределение вдоль луча

$$b(\xi) = iqtg(4q\xi - i\beta/2). \quad (10)$$

Комплексный параметр  $\beta = \beta' + i\beta''$ , определяемый условием  $qth\beta/2 = 1$ , связан с дифракционным параметром  $q$  соотношениями:

$$\text{ch } \beta' = \frac{|q|^2 + 1}{|q^2 - 1|}, \quad \text{sh } \beta' = \frac{2q'}{|q^2 - 1|}; \quad (11)$$

$$\cos \beta'' = \frac{|q|^2 - 1}{|q^2 - 1|}, \quad \sin \beta'' = \frac{2q''}{|q^2 - 1|}.$$

Радиус поперечного сечения  $r_{\perp}(\xi)$  и радиус кривизны волнового фронта  $R(\xi)$  найдем из формулы (10), вычисляя реальную и мнимую части в  $b(\xi)$ :

$$\frac{r_{\perp}(\xi)}{r_0} = \left[ \frac{\text{ch}(8q''\xi + \beta') + \cos(8q'\xi + \beta'')}{q' \text{sh}(8q''\xi + \beta') + q'' \sin(8q'\xi + \beta'')} \right]^{1/2}; \quad (12)$$

$$\frac{R(\xi)}{l_d^{(0)}} = \frac{\text{ch}(8q''\xi + \beta') + \cos(8q'\xi + \beta'')}{q'' \text{sh}(8q''\xi + \beta') - q' \sin(8q'\xi + \beta'')}. \quad (13)$$

В пределе, когда неоднородности в среде отсутствуют,  $a \rightarrow 0$ , получим обычную дифракционную расходимость пучка  $r_{\perp}(\xi)/r_0 = \sqrt{1 + (4\xi)^2}$  и радиус кривизны  $R(\xi)/l_d^{(0)} = (4\xi + 1/4\xi)$ .

В усиливающей неоднородной среде расходимость пучка существенно зависит от типа неоднородности, так как знак  $q''$  определяется знаком  $a$ :  $\text{sgn } q'' = \text{sgn } a$ . При  $a > 0$  (усиление падает к краям пучка) расходимость компенсируется усилением и асимптотически радиус пучка стремится к конечному пределу

$$\frac{r_{\perp}(\infty)}{r_0} = \frac{1}{\sqrt{q'}}. \quad (14)$$

Если же центр пучка усиливается слабее периферии  $a < 0$ , то гауссово распределение (8) становится неустойчивым. Как следует из (12), при  $q'' = -|q''|$  и  $\beta'' = -|\beta''|$ , радиус пучка обращается в бесконечность на конечном расстоянии  $\xi_0$ , определяемом из уравнения

$$q' \text{sh}(\beta' - 8|q''|\xi_0) - |q''| \sin(8q'\xi_0 - |\beta''|) = 0. \quad (15)$$

При  $\xi > \xi_0$  подкоренное выражение в (12) меняет знак, что и означает неустойчивость гауссова распределения: пучок будет распадаться и возникнет отраженная от объема волна. Исключим из рассмотрения этот случай и обсудим подробнее формулу (14) ( $a > 0$ ). Поведение решения (12) с асимптотикой (14) качественно отличается от обычного поведения в среде с такой же неоднородностью, но без усиления [5] (т.е.  $q'' = 0$ ,  $\beta'' = 0$  при  $q' > 1$  и  $\beta'' = \pi$  при  $q' < 1$ ).

В прозрачной среде

$$\frac{r_{\perp}(\xi)}{r_0} = \frac{1}{\sqrt{2}|q'|} \sqrt{1+(q')^2+(q'^2-1)\cos 8q'\xi}, \quad (16)$$

радиус пучка периодически меняется от 1 до  $1/|q'|$ . В среде с усилением колебания радиуса затухают на длине  $l_d$ , которая зависит от соотношения между  $q'$  и  $q''$ . Оценим эту длину при  $n-1=0$ . В этом случае  $q' = q'' = q_0/\sqrt{2}$ , где

$$q_0 = r_0^2/r_n \sqrt{2\lambda L}, \quad (17)$$

а  $a = (r_0/r_n)^2$  ( $r_n$  – размер неоднородности). Амплитуда колебаний  $r_{\perp}(\xi)$  затухает в два раза на расстоянии  $l_d$

$$\frac{l_d}{l_d^{(0)}} = \frac{1}{q_0} \frac{\sqrt{2} \ln(2+\sqrt{5})}{8} \cong \frac{0,26}{q_0}. \quad (18)$$

При  $n-1 \neq 0$ , но  $q' \sim q''$  результат (18) по порядку величины остается верным, поэтому примем соотношение (18) за определение величины  $l_d$ .

### 3. Числовые оценки результатов

Для проведения числовых оценок будем все длины ( $r_0$ ,  $r_n$ ,  $L$ ) измерять в сантиметрах, а длины волн переведем в энергетические  $\varepsilon$ , которые измеряем в электрон-вольтах. Тогда

$$q_0 = \frac{r_0^2}{r_n} \sqrt{\frac{\varepsilon}{L}} \cdot 1,59 \cdot 10^2, \quad l_d^{(0)} = 2,53 \cdot 10^4 \varepsilon r_0^2 \text{ см.} \quad (19)$$

Подставляя эти оценки в (18) и (14), найдем

$$l_d = r_n \sqrt{\varepsilon L} \cdot 40,5 \text{ см;} \quad r_{\perp}(\infty) = \sqrt{r_n} \sqrt{\frac{L}{\varepsilon}} \cdot 9,43 \cdot 10^{-2} \text{ см.} \quad (20)$$

*I.A. Maltsev, A.G. Maltsev, V.S. Smirnov. Phenomenological model of radiation propagation in a spatially inhomogeneous medium.*

In the present paper, the subject of investigation is transformation of the angular spectrum of radiation passing through a heterogeneous amplifying medium. The conditions allowing the effective increase of the medium length up to the size, at which the beam divergence is minimal, are formulated. It is shown that the angular radiation spectrum in the non-linear amplifying medium is quite a controllable parameter.

Следует отметить, что моделирование неоднородности параболой (3) справедливо на участках среды, где размер неоднородности велик по сравнению с размером пучка ( $r_0/r_n < 1$ ). Если, например,  $r_n = 10r_0$ , энергия перехода  $\varepsilon = 4$  эВ, длина усиления  $L = 10$  см, то  $l_d = r_0 \cdot 2,56 \cdot 10^3$  см, а  $r_{\perp}(\infty) = \sqrt{r_0} \cdot 0,375$  см, т.е. на длине  $\sim 25$  м пучок будет уже начального в 3 раза (при  $r_0 = 1$  см).

### Выводы

Итак, как следует из проведенных расчетов, неоднородность среды может сыграть положительную роль при  $a > 0$  и  $r_n \sim r_0$ . Образующаяся «линза» может компенсировать даже дифракционную расходимость. Кроме того, выбирая длину усиливающей среды из условия

$$q'' \text{sh}(8q''\xi + \beta') - q' \sin(8q'\xi + \beta'') = 0, \quad (21)$$

при котором фронт волны становится плоским, и отражая в этом месте волну в обратном направлении, можно эффективно увеличить длину усиливающей среды до нужных размеров, при которых расходимость пучка будет минимальной. Следовательно, угловой спектр излучения в усиливающей среде является вполне управляемой величиной.

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: ГИТТЛ, 1957. 532 с.
2. Вайнштейн Л.А. Открытые резонаторы и открытые волноводы. М.: Сов.радио, 1966. 476 с.
3. Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986. 527 с.
4. Ахманов С.А., Дьяков Ю.Е., Чиркин А.С. Введение в статистическую радиофизику и оптику. М.: Наука, 1981. 640 с.
5. Оравский А.Н. Резонансное взаимодействие излучения с веществом // Тр. ФИАН. М.: Наука, 1988. Т. 187. С. 3–59.
6. Способ управления расходимостью и волновым фронтом когерентного излучения в квантовых усилителях: Пат. 2069925. Россия, МКИ6, Н 01 S 3/00, 3/10. Смирнов В.С., Мальцев А.Г., Мальцев И.А.; Бел. гос. политех. академия. № 4920798/25; Заявл. 22.03.91; Оpubл. 27.11.96. Бюл. № 33.