«Оптика атмосферы и океана», **9**, N 1 (1996)

УДК 621.372.542

**И.В. Кузнецова, В.А. Федоров**

# ПОВЫШЕНИЕ ОПЕРАТИВНОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЙ АВТОКОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ МЕТОДОМ БЫСТРОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Рассматривается оперативный способ вычисления первых, статистически значимых отсчетов автокорреляционной функции на основе модификации известного алгоритма двукратного быстрого преобразования Фурье (БПФ). Повышение оперативности обеспечивается соответствующей заменой одного исходного обратного БПФ несколькими, меньшей размерности. Обсуждаются два частных случая предложенного алгоритма. Приведены количественные оценки повышения быстродействия относительно стандартного варианта.

При проведении экспериментальных исследований часто существует необходимость в получении дополняющей друг друга спектрально-корреляционной информации об изучаемом объекте. Достаточно типично, когда требуемое спектральное разрешение обеспечивается только всей длиной исходной реализации $T$. В ряде случаев необходимы и интерполированные значения спектральной плотности. Так, в акустическом зондировании атмосферы при вычислении интегральных спектральных характеристик, несущих количественную информацию о поле скорости ветра в стробируемом пространственном объеме, интервал частотных отсчетов рекомендуется выбирать равным $1/2T$ [1]. При этом целесообразно использование известного алгоритма [2], где вначале с помощью дискретного преобразования Фурье (ДПФ) определяется спектральная плотность $G(k/2T)$, а затем обратным ДПФ (ОДПФ) автокорреляционная функция (АКФ) $B(r\Delta t)$ исходной выборки

$$B(r\,\Delta t) = \frac{1}{L\,\Delta t}\sum_{k=0}^{L-1} G(k/L\,\Delta t)\exp(j2\pi kr/L), \tag{1}$$

где $r = 0, 1, \ldots, L-1$; $L = 2N$; $N$ – число отсчетов, а $\Delta t$ – интервал дискретизации обрабатываемой реализации длины $T = N\Delta t$. Эффективность обработки обеспечивается применением соответствующих вычислительных алгоритмов, в частности, соотношение (1) реализуется обратным быстрым преобразованием Фурье (ОБПФ). При этом получаются оценки всех $N$ возможных значений АКФ. Однако в данной ситуации статистически значимыми являются только ее первые $R \approx (0{,}1 - 0{,}15)N$ отсчетов. Расчет же последующих значений приводит к неоправданному увеличению объема вычислений, что является нежелательным при проведении оперативных измерений.

Преобразуем выражение (1) для вычисления только первых $R$ отсчетов АКФ. Для этого разобьем последовательность $G(k)$ на $R$ равных частей с длинами $M = L/R$ отсчетов и, опуская нормирующий множитель, запишем (1) в виде

$$b(r) = B(r)\,L\,\Delta t = \sum_{m=0}^{R-1}\ \sum_{k=mM}^{(m+1)M-1} G(k)\exp(j\,2\pi\,kr/L).$$

Делая замену $l = k - mM$ во внутренней сумме и меняя затем порядок суммирования, получим

$$b(r) = \sum_{k=0}^{M-1} g(r, k)\exp(j\,2\pi\,kr/L), \quad r = 0, 1, \ldots, R-1, \tag{2}$$

где $g(r, k) = \sum_{m=0}^{R-1} G(m\,M + k)\exp(j2\pi mr/R)$ – $k$-е ОДПФ размерности $R$ соответствующих спектральных отсчетов. Для их вычисления стандартным алгоритмом ОБПФ полагаем, что $N$ и $R$ – целые числа, равные некоторым степеням двойки. Тогда величина $M$, обеспечивающая статистически значимые отсчеты АКФ, может быть равной 16 или 32.

Уменьшим объем вычислительных операций в (2). Заметим, что для рассматриваемой вещественной выборки ее спектральная плотность $G(k)$ является ДПФ-четной последовательностью на интервале $L$ (в терминах работы [3]), т.е. выполняется равенство

$$G(k) = G(L - k), \quad k = 1, 2, ..., L/2 - 1. \tag{3}$$

Отсюда, в частности, следует аналогичная ДПФ-четность и вещественность АКФ $B(r\Delta t)$ при реализации соотношения (1). С учетом (3), рассматривая выражение для $g(r, M - k)$ и осуществляя замену индекса суммирования $m$ на $l = R - m - 1$, получаем $g(r, M - k) = g^*(r, k)\exp(-j2\pi r/R)$, где $k = 1, 2, ... , M/2 - 1$; * – символ комплексного сопряжения. Тогда для суммируемой последовательности в (2) $X(r, k) = g(r, k)\exp(j2\pi kr/L)$ следует важное практическое свойство ее эрмитовой симметрии относительно $k = M/2$, т.е. выполняется $X(r, M - k) = X^*(r, k)$, $k = 1, 2, ... , M/2-1$. Это позволяет привести соотношение (2) к более простому виду

$$b(r) = g(r, 0) + X(r, M/2) + 2\sum_{k=1}^{M/2-1} \operatorname{Re} X(r, k), \quad r = 0, 1, ..., R - 1.$$

Очевидно также, что $g(r, k)$, как ОДПФ вещественных спектральных отсчетов $G(mM + k)$, являются, в общем случае, эрмитово симметричными последовательностями по индексу $r$, т.е. справедливо $g(R-r, k) = g^*(r, k)$, $r = 1, 2, ... , R/2 - 1$. Отсюда непосредственно следует $X(R-r, k) = X^*(r, k)\exp(j2\pi k/M)$, $r = 1, 2, ... , R/2 - 1$. Тогда последнее выражение для $b(r)$ можно представить в виде

$$\begin{cases} b(r) = g(r, 0) + X(r, M/2) + 2\displaystyle\sum_{k=1}^{M/2-1} \operatorname{Re} X(r, k), \\ b(R - r) = g^*(r, 0) - X^*(r, M/2) + 2\displaystyle\sum_{k=1}^{M/2-1} \operatorname{Re} X(R - r, k), \end{cases} \tag{4}$$

где $r = 1, 2, ... , R/2 - 1$; $\operatorname{Re}X(R-r, k) = \operatorname{Re}\{X^*(r, k)\exp(j2\pi k/M)\}$. Конкретизируем некоторые величины в (4). Рассмотрим $g(r, 0) = \sum_{m=0}^{R-1} G(mM)\exp(j2\pi mr/R)$. Нетрудно показать, что ДПФ-четность исходных спектральных отсчетов (3) приводит к ДПФ-четности $G(mM)$, $m = 0,1, ..., R-1$. Отсюда следуют вещественность и ДПФ-четность $g(r, 0)$ [3].

Далее рассмотрим величину $X(r, M/2) = g(r, M/2)\exp(j\pi r/R)$, где $g(r, M/2) = \sum_{m=0}^{R-1} G(mM + M/2)\exp(j2\pi mr/R)$. В данном случае из (3) следует четность в обычном смысле последовательности $G(mM + M/2) = \hat{G}(m)$, т.е. выполняется $\hat{G}(R - m - 1) = \hat{G}(m)$, $m = 0, 1, ... , R/2$. Это позволяет при вычислении $X(r, M/2)$ обойтись без непосредственного расчета $g(r, M/2)$ с одновременным уменьшением размерности требуемого ОБПФ в 4 раза. Представим $g(r, M/2)$ в виде

$$g(r, M/2) = \sum_{i=0}^{3}\sum_{m=0}^{R/4-1} G[(4m + i)M + M/2]\exp[j2\pi r(4m + i)/R] = \sum_{i=0}^{3} g_i(r)\exp(j2\pi ir/R), \tag{5}$$

где $g_i(r) = \sum_{m=0}^{R/4-1} G[(4m + i)M + M/2]\exp[j2\pi mr/(R/4)]$ – ОДПФ соответствующих спектральных последовательностей с периодом $R/4$ отсчетов и для которых выполняется $g_i(r) = g_i^*(R/4 - r)$, $r = 1, 2, ... , R/8 - 1$. Осуществляя в выражениях для $g_2(r)$ и $g_3(r)$ замену индекса суммирования $l = R/4 - m - 1$, с учетом свойства (3) получаем $g_2(r) = g_1^*(r)\exp(-j8\pi r/R)$, $g_3(r) = g_0^*(r)\exp(-j8\pi r/R)$. Тогда (5) для основного периода $g_i(r)$ принимает вид

$$g(r, M/2) = 2\,[\mathrm{Re}\,\beta_0(r) + \mathrm{Re}\,\beta_1(r)]\,\exp(-j\pi r/R),$$

где $\beta_0(r) = g_0(r)\exp(j\pi r/R)$; $\beta_1(r) = g_1(r)\exp(j3\pi r/R)$, $r = 0, 1, \dots, R/4{-}1$. Следовательно, $X(r, M/2) = 2[\mathrm{Re}\beta_0(r) + \mathrm{Re}\beta_1(r)]$ – чисто вещественная последовательность. Для нахождения $X(r, M/2)$ при $r > R/4 - 1$ воспользуемся вышеуказанными свойствами $g_i(r)$ и их следствиями: $g_i(R/2 - r) = g_i^*(r)$, $r = 1, 2, \dots, R/8 - 1$; $\mathrm{Im} g_i(0) = \mathrm{Im} g_i(R/8) = \mathrm{Im} g_i(3R/8) = \mathrm{Im} g_i(R/4) = \mathrm{Im} g_i(R/2) = 0$. Одновременно для снижения вычислительных затрат уменьшим в два раза интервал определения ОДПФ $g_i(r)$. В итоге для $r = 1, 2, \dots, R/8 - 1$ получим

$$\begin{cases}\mathrm{Re}\,X(r, M/2) = 2\,[\mathrm{Re}\,\beta_0(r) + \mathrm{Re}\,\beta_1(r)],\\ \mathrm{Re}\,X(R/4 - r, M/2) = 2\,[\mathrm{Re}\,\{\beta_0^*(r)\exp(j\pi/4)\} + \mathrm{Re}\,\{\beta_1^*(r)\exp(j3\pi/4)\}],\\ \mathrm{Re}\,X(R/4 + r, M/2) = 2\,[\mathrm{Re}\,\{\beta_0(r)\exp(j\pi/4)\} + \mathrm{Re}\,\{\beta_1(r)\exp(j3\pi/4)\}],\\ \mathrm{Re}\,X(R/2 - r, M/2) = 2\,[\mathrm{Im}\,\beta_0(r) - \mathrm{Im}\,\beta_1(r)].\end{cases} \tag{6}$$

И для особых точек

$$\begin{cases}\mathrm{Re}\,X(0, M/2) = 2\,[\mathrm{Re}\,g_0(0) + \mathrm{Re}\,g_1(0)],\ \mathrm{Re}\,X(R/2, M/2) = 0,\\ \mathrm{Re}\,X(R/8, M/2) = 2\,[\mathrm{Re}\,g_0(R/8)\cos(\pi/8) + \mathrm{Re}\,g_1(R/8)\cos(3\,\pi/8)],\\ \mathrm{Re}\,X(R/4, M/2) = \sqrt{2}\,[\mathrm{Re}\,g_0(0) - \mathrm{Re}\,g_1(0)],\\ \mathrm{Re}\,X(3R/8, M/2) = 2\,[\mathrm{Re}\,g_0(R/8)\cos(3\,\pi/8) - \mathrm{Re}\,g_1(R/8)\cos(\pi/8)].\end{cases} \tag{7}$$

С учетом вышеизложенного окончательные формулы (4) вычисления первых $R$ отсчетов АКФ принимают вид

$$\begin{cases} b(r) = \mathrm{Re}\,g(r, 0) + \mathrm{Re}\,X(r, M/2) + 2\sum\limits_{k=1}^{M/2-1}\mathrm{Re}\,X(r, k),\\ b(R-r) = \mathrm{Re}\,g(r, 0) - \mathrm{Re}\,X(\mathrm{r}, \mathrm{M}/2) + 2\sum\limits_{k=1}^{M/2-1}\mathrm{Re}\,X(R-r, k),\end{cases} \tag{8}$$

где $r = 1, 2, \dots, R/2 - 1$. И для особых точек

$$\begin{cases} b(0) = \mathrm{Re}\,g(0, 0) + \mathrm{Re}\,X(0, M/2) + 2\sum\limits_{k=1}^{M/2-1}\mathrm{Re}\,g(0, k),\\ b(R/2) = \mathrm{Re}\,g(R/2, 0) + 2\sum\limits_{k=1}^{M/2-1}\mathrm{Re}\,g(R/2, k)\cos(\pi k/M).\end{cases} \tag{9}$$

Резюмируя вышеизложенное, представим алгоритм в полном виде:

1. Из исходных спектральных величин $G(k)$, $k = 0, 1, \dots, L - 1$ сформировать $M/4$ комплексных последовательностей $R$ отсчетов каждая по правилу

$$Z_i(m) = G(2\,i + m\,M) + j\,G[(2\,i + 1) + m\,M],$$

где $i = 0, 1, \dots, M/4 - 1$; $m = 0, 1, \dots, R - 1$.

2. Вычислить $M/4$ комплексных ОБПФ размерностью $R$

$$z_i(r) = \sum_{m=0}^{R-1} Z_i(m)\exp(j2\pi mr/R),\ \ r = 0, 1, \dots, R - 1.$$

3. Восстановить отдельные ОБПФ $g(r, k)$, $k = 0, 1, \dots, M/2 - 1$, используя полную аналогию в данном случае с такой же процедурой для прямого БПФ [2]

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}\,g(r, 2i) = [\mathrm{Re}\,z_i(r) + \mathrm{Re}\,z_i(R - r)]/2,\\ &\mathrm{Im}\,g(r, 2i) = [\mathrm{Im}\,z_i(r) - \mathrm{Im}\,z_i(R - r)]/2,\\ &\mathrm{Re}\,g(r, 2i + 1) = [\mathrm{Im}\,z_i(r) + \mathrm{Im}\,z_i(R - r)]/2,\\ &\mathrm{Im}\,g(r, 2i + 1) = [\mathrm{Re}\,z_i(R - r) - \mathrm{Re}\,z_i(r)]/2,\end{aligned}$$

где $r = 1, 2, \ldots, R/2 - 1$;

$$\mathrm{Re}\, g(0, 2i) = \mathrm{Re}\, z_i(0),\ \mathrm{Re}\, g(R/2, 2i) = \mathrm{Re}\, z_i(R/2),$$

$$\mathrm{Re}\, g(0, 2i+1) = \mathrm{Im}\, z_i(0),\ \mathrm{Re}\, g(R/2, 2i+1) = \mathrm{Im}\, z_i(R/2).$$

4. Для $k = 1, 2, \ldots, M/2 - 1$ произвести умножение $g(r, k)$ на фазовые множители, т.е. осуществить формирование

$$X(r, k) = g(r, k) \exp (j2\pi kr/L),\ r = 1, 2, \ldots, R/2 - 1.$$

5. Для $k = M/2$ сформировать комплексную последовательность длиной $R/4$

$$Z(m) = G[4mM + M/2] + j\, G[(4\,m + 1)\, M + M/2] = G_0(m) + j\, G_1(m),\ m = 0, 1, \ldots, R/4 - 1$$

и осуществить ОБПФ размерностью $R/4$ с дальнейшим восстановлением $g_0(r)$ и $g_1(r)$, $r = 0, 1, \ldots, R/8$ аналогично пункту 3 с заменой $R$ на $R/4$. Затем, используя соотношения (6), (7), получить $\mathrm{Re}\, X(r, M/2)$, $r = 0, 1, \ldots, R/2 - 1$.

6. Следуя (8), (9), вычислить первые $R$ отсчетов АКФ.

Несмотря на достаточно громоздкий вид предложенного алгоритма, он эффективнее в вычислительном отношении классического варианта (1) из-за уменьшения числа комплексных умножений, правда, за счет увеличения количества других, но более элементарных операций. Указанный выигрыш обеспечивается заменой одного исходного ОБПФ (1) несколькими ОБПФ меньшей размерности. Также предполагается, что используемые в представленном алгоритме последовательности комплексных экспонент рассчитываются по известным рекуррентным соотношениям [4], т.е. за одно комплексное умножение. Используя соотношения, приведенные в [4] для объема вычислительных операций ОБПФ, получаем следующие оценки для числа комплексных умножений: $P_1 \approx (L/2)\log_2 L$ – для традиционного варианта (1), $P \approx (L/8)(\log_2 R + 5)$ – для предлагаемого. Следовательно, ожидаемый выигрыш по быстродействию $\gamma = P_1/P$ для используемых алгоритмом значений $M = 16$ или $M = 32$, характеризующих уменьшение объема корреляционной информации, составляет величину $\gamma \approx (3{,}6 \div 4)$ раза. Реальный же выигрыш, полученный на основе непосредственных расчетов АКФ, по обоим вариантам несколько ниже и составляет в среднем $(3{,}4 \div 3{,}8)$ раза.

Практический интерес представляет также частный случай $M = 2$ рассмотренного выше алгоритма. При этом, как следует из (2), необходимо сформировать одну комплексную последовательность $Z(m) = G(2m) + jG(2m + 1)$, $m = 0, 1, \ldots, L/2 - 1$ и вычислить ее ОБПФ размерности $L/2$, т.е. определить $z(r)$, $r = 0, 1, \ldots, L/2 - 1$. Заметим, что $G(2m)$ – ДПФ-четная последовательность, а $G(2m + 1)$ – четная в обычном смысле. Тогда, используя вышеизложенное, можно показать, что для вычисления первых $R \le L/4$ отсчетов АКФ достаточно реализовать следующие операции:

$$b(r) = \mathrm{Re}\, g(r, 0) + \mathrm{Re}\, \{g(r, 1) \exp (j2\pi\, r/L)\},\ r = 0, 1, \ldots, R - 1, \qquad (10)$$

где для $r = 1, 2, \ldots, R - 1$:

$$\mathrm{Re}\, g(r, 0) = [\mathrm{Re}\, z(r) + \mathrm{Re}\, z(L/2 - r)]/2,$$

$$\mathrm{Re}\, g(r, l) = \mathrm{Im}\, z(r),\ \ \mathrm{Im}\, g(r, 1) = [\mathrm{Re}\, z(L/2 - r) - \mathrm{Re}\, z(r)]/2,$$

$$\mathrm{Re}\, g(0, 0) = \mathrm{Re}\, z(0),\ \ \mathrm{Re}\, g(0, 1) = \mathrm{Im}\, z(0).$$

Достоинства данного метода заключаются в его простоте и гибкости в выборе числа рассчитываемых точек АКФ. Однако в оперативности он уступает основному варианту (8), (9). Непосредственные расчеты показывают, что по быстродействию он хуже ранее рассмотренного алгоритма примерно в 1,9 раза, во столько же раз превосходя при этом стандартный вариант (1).

Еще большего выигрыша можно добиться при необходимости расчета первых $R$ точек АКФ с прореживанием, т.е. при $r = n\, R_p$, где $n = 0, 1, \ldots, R/R_p - 1$; $R_p$ – шаг прореживания. Это оправданно, например, при достаточно гладких АКФ. Тогда для $L = M_p R_p$ снова справедливо соотношение (2). Но, в отличие от предыдущего случая, рассмотрим величину $g(r, k)$ за ее найквистовым интервалом однозначности, а именно в точках $r = nR_p$, кратных ее периоду $R_p$. Так как $g(nR_p, k) = g(0, k)$, то соотношение (2) принимает вид

$$b(n\,R_p) = \sum_{k=0}^{M_p-1} g(k)\exp\,(j2\pi kn/M_p), \quad n = 0, 1, ..., M_p-1, \qquad (11)$$

где $g(k) = \sum_{m=0}^{R_p-1} G(mM_p + k)$.

Таким образом, в общем случае для получения только каждого $R_p$-го отсчета АКФ необходимо предварительно просуммировать $R_p$ соответствующих значений исходной спектральной плотности и вычислить ОБПФ размерностью $M_p = L/R_p$. По существу, выражение (11) иллюстрирует процесс наложения спектральных отсчетов при увеличении интервала дискретизации в корреляционной области относительно первоначального.

Нетрудно показать ДПФ-четность последовательности $g(k)$, т.е. $g(M_p - k) = g(k)$, $k = 1, 2, ..., M_p/2 - 1$. Для этого достаточно в выражении для $g(M_p - k)$ осуществить замену $l = R_p - m - 1$ и воспользоваться ДПФ-четностью исходных спектральных отсчетов (3). Следовательно, для вычисления первых $R/R_p$ отсчетов прореженной АКФ можно воспользоваться ранее полученными алгоритмами (8), (9) или (10) с заменой $L$ на $M_p$ и $R$ на $R/R_p$. А при определении $g(k)$ целесообразно использовать исходные спектральные отсчеты, соответствующие только положительным частотам:

$$g(0) = G(0) + G(L/2) + 2\sum_{m=1}^{R_p/2-1} G(m\,M_p),$$

$$g(M_p/2) = 2\sum_{m=0}^{R_p/2-1} G[M_p\,(m + 1/2)],$$

$$g(k) = \sum_{m=0}^{R_p/2-1} \{G(m\,M_p + k) + G[(m+1)\,M_p - k]\},\ k = 1, 2, ..., M_p/2 - 1.$$

Повышение оперативности расчета прореженной АКФ предложенным методом относительно классического варианта (1) характеризуется величиной $\gamma \approx 4R_p$.


1. Красненко Н.П. Акустическое зондирование атмосферы. Новосибирск: Наука, 1986. 166 с.
2. Бендат Дж., Пирсол А. Прикладной анализ случайных данных. М.: Мир, 1989. 540 с.
3. Хэррис Дж.Ф. Использование окон при гармоническом анализе методом дискретного преобразования Фурье. ТИИЭР, 1978. Т. 66. №. 1. С. 60.
4. Рабинер Л., Гоулд Б. // Теория и применение цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1978. 848 с.



Институт оптики атмосферы СО РАН,
Томск



Поступила в редакцию
11 июля 1995 г.


I.V. Kuznetsova, V.A. Fedorov. **Speedup of the Autocorrelation Function Computation by Fast Fourier Transform Method.**


Quick way to compute the autocorrelation function first statistically significant references based on the known double fast Fourier transform (FFT) modification is treated in the paper. The speedup of the computation is due to corresponding replacement of one initial reversal FFT by several of lesser dimension representation. Two special cases of the algorithm proposed are under discussion. Quantitative estimates of the speedup relative to the standard are presented.