<Оптика атмосферы и океана>, **7**, N1 (1994)

УДК.551.521

О.Б. Васильев, А.В. Васильев

ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИНДИКАТРИСЫ РАССЕЯНИЯ

На основании классификации индикатрис рассеяния, по О.Д. Бартеневой, получены два параметра, характеризующие индикатрису. Получены формулы, выражающие связь этих параметров с метеорологическими характеристиками. Построен алгоритм получения индикатрисы рассеяния с наперед заданными значениями двух параметров. Проведено тестирование известных аналитических формул для аппроксимации индикатрис применительно к построенной модели, и предложена новая аналитическая формула для аппроксимации индикатрис рассеяния.

Хорошо разработанные методы расчета характеристик поля яркости в атмосфере – сферических гармоник, дискретных ординат, Монте–Карло и другие – позволяют учесть практически все особенности взаимодействия излучения с атмосферой и поверхностью. Поэтому при сравнении экспериментально измеренных и рассчитанных характеристик излучения главной задачей становится выбор адекватных моделей атмосферы и поверхности.

Для сравнения экспериментальных и расчетных данных такие модели строят, как правило, основываясь на микрофизических параметрах атмосферного аэрозоля, характерного для местности, где проводились измерения. Однако в задачах численного моделирования экспериментов, коррекции аэрокосмических изображений, в обратных задачах оптики атмосферы, где важно уметь рассчитать зависимости измеряемых характеристик излучения от параметров атмосферы, использование микрофизических моделей атмосферы с их огромным числом варьируемых параметров делает подобные расчеты практически невозможными. Для таких задач обычно используют эмпирические модели атмосферы, характеризуемые небольшим числом параметров.

Наиболее сложные проблемы возникают при задании индикатрисы рассеяния атмосферы, так как она может принимать разнообразную форму в зависимости от свойств ансамбля аэрозольных частиц. Существуют два способа параметризации индикатрисы: подбор искусственно созданных аналитических функций [1–3] и подбор параметров для экспериментально измеренных индикатрис [4–6]. В частности, в [6] приведена двухпараметрическая модель индикатрисы морской дымки, параметрами которой являются коэффициент ослабления и влажность воздуха.

Недостатком моделей [5] и [6] является то, что они получены на основе измерений в определенном климатическом регионе, где состав и структура атмосферного аэрозоля были относительно постоянными и именно поэтому авторам удалось получить простые корреляционные связи между формой индикатрисы и коэффициентом ослабления, и влажностью воздуха. Для наблюдений, выполненных в различных регионах, как будет показано ниже, эти связи имеют более сложную форму.

В Главной геофизической обсерватории (ГГО) на протяжении многих лет выполнялись экспериментальные измерения индикатрис рассеяния в приземном слое атмосферы, результаты которых обобщены в [7, 8]. Несмотря на то, что измерено очень большое количество индикатрис и измерения проводились в различных регионах, оказалось, что все индикатрисы можно сгруппировать в относительно небольшое число классов. Используем эту классификацию для построения параметрической модели индикатрисы рассеяния.

Исходные экспериментальные индикатрисы рассеяния (усредненные по классам), нормированные по условию

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi} x(\gamma)\sin\gamma d\gamma = 1, \qquad (1)$$

приведены в табл. 1.

Таблица 1

Индикатрисы рассеяния по [7, 8]

γ°	Типы индикатрис								
	1,0	2,0	3,0	3,1	4,0	4,1	5,0	5,1	6,0
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1,500	3,575	4,957	7,540	7,277	9,421	8,872	12,204	10,931
10	1,477	3,423	4,506	6,329	6,439	7,864	7,738	6,497	9,528
20	1,412	2,739	3,502	3,944	4,568	5,276	5,341	6,129	6,527
30	1,313	2,054	2,523	2,578	3,019	3,002	3,504	3,705	3,866
40	1,190	1,559	1,790	1,663	1,961	1,884	2,189	2,193	2,241
50	1,060	1,112	1,262	1,117	1,303	1,217	1,381	1,306	1,295
60	0,938	0,875	0,919	0,826	0,903	0,814	0,891	0,805	0,771
70	0,838	0,702	0,706	0,617	0,652	0,577	0,597	0,527	0,499
80	0,773	0,615	0,581	0,525	0,511	0,442	0,443	0,336	0,353
90	0,750	0,592	0,527	0,451	0,441	0,377	0,353	0,294	0,270
100	0,773	0,592	0,515	0,473	0,413	0,349	0,314	0,260	0,233
110	0,838	0,621	0,532	0,486	0,410	0,335	0,302	0,251	0,219
120	0,938	0,677	0,573	0,503	0,428	0,368	0,307	0,266	0,219
130	1,060	0,776	0,644	0,599	0,467	0,413	0,331	0,306	0,228
140	1,190	0,938	0,745	0,719	0,534	0,490	0,374	0,396	0,241
150	1,313	1,192	0,854	0,902	0,603	0,623	0,413	0,531	0,270
160	1,412	1,458	1,002	1,147	0,701	0,811	0,466	0,725	0,307
170	1,477	1,686	1,172	1,585	0,805	1,102	0,529	1,011	0,354
180	1,500	1,762	1,236	1,637	0,843	1,232	0,555	1,137	0,367
γ°	6,1	6,2	7,0	7,1	7,2	7,3	8,0	8,1	8,2
0	13,225	26,740	14,298	14,767	22,756	24,378	17,559	18,703	22,754
10	10,751	14,276	12,153	12,167	13,506	14,539	14,366	14,752	13,990
20	6,782	6,571	7,123	6,825	7,265	7,747	7,808	7,284	7,805
30	3,894	3,624	3,886	3,978	4,035	4,003	4,017	3,912	4,201
40	2,110	1,877	2,093	2,184	2,089	2,001	1,995	2,107	2,126
50	1,204	1,069	1,178	1,200	1,103	1,010	1,047	1,077	1,083
60	0,698	0,555	0,690	0,671	0,571	0,506	0,569	0,593	0,547
70	0,433	0,308	0,430	0,400	0,305	0,253	0,341	0,341	0,275
80	0,289	0,175	0,294	0,266	0,173	0,139	0,223	0,216	0,140
90	0,220	0,116	0,220	0,195	0,112	0,085	0,166	0,151	0,086
100	0,186	0,094	0,183	0,159	0,090	0,062	0,134	0,124	0,071
110	0,176	0,098	0,168	0,146	0,090	0,062	0,124	0,108	0,080
120	0,185	0,146	0,166	0,149	0,123	0,101	0,121	0,108	0,108
130	0,214	0,175	0,174	0,172	0,160	0,121	0,125	0,122	0,115
140	0,268	0,838	0,182	0,214	0,514	0,563	0,136	0,145	0,320
150	0,357	0,640	0,207	0,283	0,396	0,393	0,153	0,194	0,253
160	0,486	0,469	0,239	0,374	0,244	0,266	0,172	0,261	0,207
170	0,685	0,387	0,269	0,512	0,211	0,222	0,190	0,378	0,183
180	0,772	0,394	0,277	0,569	0,298	0,261	0,200	0,432	0,179

γ°	8,3	8,4	9,0	9,1	9,2	9,3	10,0	10,2
0	26,898	30,968	23,276	25,670	32,020	25,252	33,147	23,538
10	15,376	16,740	18,250	19,613	17,809	15,312	21,214	15,380
20	7,746	7,732	8,173	7,952	8,369	8,309	9,281	9,005
30	4,009	3,944	3,756	3,576	3,701	4,245	3,712	4,284
40	2,050	1,966	1,772	1,708	1,780	2,084	1,326	2,078
50	1,043	0,944	0,886	0,853	0,870	0,985	0,610	0,872
60	0,519	0,409	0,463	0,478	0,449	0,476	0,292	0,417
70	0,252	0,212	0,267	0,251	0,245	0,233	0,159	0,203
80	0,130	0,103	0,168	0,148	0,137	0,113	0,095	0,110
90	0,077	0,057	0,120	0,101	0,088	0,062	0,070	0,068
100	0,056	0,042	0,094	0,080	0,064	0,043	0,060	0,051
110	0,060	0,043	0,082	0,071	0,057	0,041	0,056	0,053
120	0,083	0,074	0,078	0,071	0,061	0,061	0,053	0,059
130	0,091	0,085	0,081	0,081	0,077	0,078	0,053	0,069
140	0,407	0,487	0,087	0,095	0,150	0,243	0,056	0,132
150	0,252	0,307	0,099	0,117	0,126	0,194	0,058	0,108
160	0,187	0,232	0,112	0,147	0,088	0,155	0,064	0,086
170	0,161	0,199	0,130	0,173	0,071	0,135	0,070	0,072
180	0,174	0,210	0,135	0,183	0,076	0,132	0,073	0,065

В качестве основного параметра классификации в [7] используется отношение доли излучения, рассеянного в переднюю полусферу, к доли излучения, рассеянного в заднюю полусферу, – вытянутость индикатрисы G

$$G = \frac{\int\limits_{0}^{\pi/2} x(\gamma)\sin\gamma d\gamma}{\int\limits_{\pi/2}^{\pi} x(\gamma)\sin\gamma d\gamma}. \tag{2}$$

Различным величинам G соответствует первая (до точки) цифра типа индикатрисы, которую назовем классом, сохранив нумерацию классов из [7, 8]. Индикатрисы соседних классов отличаются по вытянутости примерно в 1,5 раза.

Для описания наблюдавшихся при измерениях индикатрис одного параметра – вытянутости – недостаточно, так как в один класс попадают индикатрисы, существенно отличающиеся по форме. В [7] все индикатрисы разделены по форме кривой на <пологие>, <острые> и <острые с максимумом>, причем отмечено, что <пологие> индикатрисы характерны для континентальных воздушных масс, <острые> – для морских, а <острые с максимумом> – для дымок и туманов. Для последних характерен выраженный максимум для угла 140°, являющийся максимумом первой радуги. Это позволило для них ввести в [7] количественную характеристику – отношение значения индикатрисы для угла 140 к значению для угла 105°. Назовем ее остротой индикатрисы, обозначим P и распространим на все индикатрисы

$$P = \frac{2\,x(140°)}{x(100°) + x(110°)}. \tag{3}$$

Примем эту величину за второй параметр классификации. В табл. 1, ему соответствует вторая (после точки) цифра типа индикатрисы, определяющая подкласс индикатрис (в табл. 1 подкласс 0 – это <пологие> индикатрисы, подкласс 1 – <острые>, а подкласс 2 и более – <острые с максимумом>).

Значения вытянутости G и остроты P исходных индикатрис приведены в табл. 2.

Таблица 2

Параметры исходных индикатрис

Тип	1,0	2,0	3,0	3,1	4,0	4,1	5,0	5,1	6,0	6,1	6,2	7,0	7,1
G	1,0	1,46	2,08	2,14	3,13	3,43	4,76	4,58	7,22	7,06	6,76	9,65	8,96
P	1,48	1,55	1,42	1,50	1,30	1,43	1,21	1,55	1,07	1,48	8,75	1,04	1,41
Тип	7,2	7,3	8,0	8,1	8,2	8,3	8,4	9,0	9,1	9,2	9,3	10,0	10,2
G	9,95	11,06	13,55	12,73	13,91	15,16	14,40	20,82	20,99	23,77	20,77	33,56	27,10
P	5,74	9,08	1,05	1,25	4,22	7,06	11,51	0,99	1,26	2,47	5,78	0,97	2,54

Отметим еще некоторые особенности исходных индикатрис, по данным [7]. Точность измерений составляла 10% для диапазона углов 20–60°; 15% – для диапазона 70–140° и 20% – для диапазона 150–160°. Значения 0, 10, 170 и 180° получены экстраполяцией.

Индикатриса 1,0 – рэлеевская индикатриса, которую естественно включить в семейство в качестве предельного случая.

Существует сильная корреляция между вытянутостью индикатрисы и метеорологической дальностью видимости. В табл. 3 приведены частоты появления индикатрис подклассов 0 (без скобок) и 1 (в скобках), наблюдавшиеся при измерениях в зависимости от метеорологической дальности видимости. Данные по индикатрисам подклассов 2 и более отсутствуют.

Каждую строку табл. 3 можно рассматривать как гистограмму распределения вытянутости индикатрисы для данной дальности видимости. Эти распределения хорошо аппроксимируются так называемым логнормальным распределением. В свою очередь, дальность видимости S можно рассматривать как параметр такого распределения. По данным табл. 3 построена следующая аппроксимация:

$$\rho(G) = \frac{1}{\sigma\, G\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(G) - \mu}{\sigma}\right)^2\right), \tag{4}$$

где для индикатрис подкласса 0: $\mu = 3{,}041 - 0{,}4881\, nS$, $\sigma = 0{,}340 - 1{,}55 \cdot 10^{-3}\, S$; для индикатрис подкласса 1: $\mu = 3{,}424 - 0{,}6181\, nS$, $\sigma = 0{,}347 - 2{,}92 \cdot 10^{-3} S$; $\rho(G)$ – плотность вероятности вытянутости индикатрисы; S – метеорологическая дальность видимости в километрах.

Таблица 3

Частота встречаемости (в %) индикатрис в зависимости от метеорологической дальности видимости по [7, 8]

S, км	Класс индикатрисы									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$S > 200$	100									
$100 < S < 200$		31	67	2						
$50 < S < 100$		4	73	22	1					
				(71)	(29)					
$20 < S < 50$			3	49	45	3				
				(9)	(60)	(31)				
$10 < S < 20$				7	42	33	13			
						(75)	(25)			
$4 < S < 10$					7	21	45	23	4	
							(92)	(8)		
$2 < S < 4$						18	32	30	18	2
								(55)	(45)	
$1 < S < 2$							12	49	31	8
								(31)	(38)	(31)

Не выявлен метеорологический параметр, от которого сильно зависит острота индикатрис. Как показано в [7], корреляция P с влажностью воздуха незначительна. Аналогичный вывод сделан и в [6]: область корреляции существует только для сильно замутненной атмосферы (малой дальности видимости). В [6–8] делается вывод, что острота должна зависеть от среднего размера водяных капель в воздухе, но эту величину трудно измерить при наблюдениях. Поэтому предлагается при использовании формулы (4) брать параметры для типов воздушных масс: подкласс 0 для континентальных воздушных масс и подкласс 1 для морских.

Для практических целей необходимо получение индикатрис с любыми промежуточными значениями G и P, наблюдаемыми в реальной атмосфере. Интерполирование по сетке значений G и P, даваемой классификацией согласно [7, 8], затруднено, так как эта сетка не является прямоугольной.

С помощью специального алгоритма проведем двумерную интерполяцию и экстраполяцию по этим данным для создания прямоугольной сетки значений G и P, т.е. базовой таблицы модели индикатрисы (табл. 4). Нахождение индикатрисы $x(\gamma, G, P)$ с параметрами G и P внутри прямоугольника базовой таблицы $G_1 \le G < G_2$, $P_1 \le P < P_2$ производится следующим образом.

Определяются коэффициенты $R_i(\gamma)$ ($i = 0, 1, 2, 3$) интерполяционной формулы:

$$\begin{aligned}
R_0(\gamma) &= \frac{x(\gamma, G_1, P_1) G_2 P_2 - x(\gamma, G_2, P_1) G_1 P_2 - x(\gamma, G_1 P_2) G_2 P_1 + x(\gamma, G_2 P_2) G_1 P_1}{(G_2 - G_1)(P_2 - P_1)}; \\
R_1(\gamma) &= \frac{-x(\gamma, G_1, P_1) P_2 + x(\gamma, G_2, P_1) P_2 + x(\gamma, G_1, P_2) P_1 - x(\gamma, G_2 P_2) P_1}{(G_2 - G_1)(P_2 - P_1)}; \\
R_2(\gamma) &= \frac{-x(\gamma, G_1, P_1) G_2 + x(\gamma, G_2, P_1) G_1 + x(\gamma, G_1 P_2) G_2 - x(\gamma, G_2 P_2) G_1}{(G_2 - G_1)(P_2 - P_1)}; \\
R_3(\gamma) &= \frac{x(\gamma, G_1, P_1) - x(\gamma, G_2, P_1) - x(\gamma, G_1, P_2) + x(\gamma, G_2 P_2)}{(G_2 - G_1)(P_2 - P_1)}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Затем вычисляются вспомогательные величины $r_0 - r_3$ и x, y:

$$r_i = PR_i(110°) + PR_i(100°) - 2\,R_i(140°)\,,\; i = 0,\, ...,\, 3; \tag{6}$$

$$x = \frac{G(1 + G_1 + G_2) - G_1 G_2}{G + 1}\,;$$

$$y = \frac{r_1 G_2 G_1 - r_0(G + 1) - r_1 G(1 + G_1 + G_2)}{r_2(G + 1) + r_3 G(1 + G_1 + G_2) - r_3 G_1 G_2}\,. \tag{7}$$

Вычисляем искомую индикатрису

$$x(\gamma,\, G,\, P) = R_0(\gamma)\; + R_1(\gamma)\, x + R_2(\gamma)\, y + R_3(\gamma)\, xy\,. \tag{8}$$

Табл. 4 и формулы (5)–(8) являются моделью индикатрисы рассеяния с двумя параметрами – вытянутостью G и остротой P. Заметим, что частными случаями в нашей модели являются сферическая ($G = 1$, $P = 1$) и релеевская индикатрисы ($G = 1$, $P = 1{,}48$).

Определим точность аппроксимации экспериментальных индикатрис предлагаемой моделью. В табл. 5 в графе <Модель 1> приведены значения среднего отклонения модельных индикатрис от экспериментальных (в %), максимального отклонения (в %) и угла, при котором отклонение максимально.

Так как в экспериментальных индикатрисах значения 0, 10, 170 и 180° получены экстраполяцией, то при тестировании моделей сравнение для этих углов не проводилось.

Таблица 4

Базовые модели индикатрисы

γ°	G = 1,0						G = 1,5			
	P = 1,0	P = 1,25	P = 1,5	P = 2,3	P = 3,5	P = 5,3	P = 1,0	P = 1,25	P = 1,5	P = 2,3
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	1,000	1,288	1,518	2,018	2,433	2,758	3,349	3,347	3,637	5,458
10	1,000	1,275	1,495	1,972	2,368	2,679	2,986	3,070	3,344	4,783
20	1,000	1,238	1,427	1,840	2,182	2,450	2,290	2,482	2,670	3,432
30	1,000	1,180	1,324	1,636	1,896	2,099	1,755	1,909	2,005	2,093
40	1,000	1,110	1,197	1,387	1,545	1,669	1,361	1,473	1,532	1,531
50	1,000	1,035	1,062	1,122	1,172	1,211	1,133	1,165	1,172	1,116
60	1,000	0,964	0,935	0,873	0,821	0,780	0,984	0,952	0,917	0,805
70	1,000	0,906	0,832	0,670	0,535	0,430	0,887	0,814	0,750	0,591
80	1,000	0,869	0,764	0,537	0,348	0,201	0,841	0,734	0,646	0,452
90	1,000	0,856	0,741	0,491	0,283	0,121	0,814	0,699	0,607	0,405
100	1,000	0,869	0,764	0,537	0,348	0,201	0,801	0,694	0,608	0,423
110	1,000	0,906	0,832	0,670	0,535	0,430	0,788	0,712	0,648	0,499
120	1,000	0,964	0,935	0,873	0,821	0,780	0,792	0,755	0,724	0,653
130	1,000	1,035	1,062	1,122	1,172	1,211	0,792	0,810	0,822	0,840
140	1,000	1,110	1,197	1,387	1,545	1,669	0,794	0,879	0,943	1,060
150	1,000	1,180	1,324	1,636	1,896	2,099	0,785	0,943	1,067	1,323
160	1,000	1,238	1,427	1,840	2,182	2,450	0,803	1,024	1,205	1,607
170	1,000	1,275	1,493	1,972	2,368	2,679	0,892	1,121	1,337	1,935
180	1,000	1,288	1,518	2,018	2,433	2,758	0,917	1,159	1,397	2,078

γ°	G = 1,5			G = 2,3						
	P = 3,5	P = 5,3	P = 8,0	P = 1,0	P = 1,25	P = 1,5	P = 2,3	P = 3,5	P = 5,3	P = 8,0
0	6,889	7,944	8,666	5,993	5,809	6,219	9,177	11,31	12,81	13,84
10	5,914	6,748	7,321	5,268	5,184	5,528	7,789	9,421	10,57	11,35
20	4,007	4,434	4,731	3,596	3,780	4,046	5,058	5,787	6,299	6,651
30	2,163	2,218	2,262	2,497	2,589	2,615	2,488	2,397	2,333	2,290
40	1,531	1,533	1,539	1,661	1,772	1,799	1,623	1,496	1,408	1,347
50	1,071	1,039	1,020	1,203	1,247	1,241	1,079	0,962	0,880	0,824
60	0,716	0,650	0,604	0,946	0,920	0,879	0,722	0,608	0,529	0,474
70	0,466	0,373	0,306	0,772	0,715	0,660	0,507	0,397	0,320	0,267
80	0,299	0,184	0,102	0,689	0,601	0,528	0,367	0,251	0,169	0,113
90	0,247	0,128	0,0411	0,633	0,545	0,474	0,322	0,212	0,134	0,0803
100	0,278	0,169	0,0893	0,611	0,525	0,456	0,314	0,211	0,139	0,0884
110	0,381	0,293	0,229	0,599	0,527	0,467	0,331	0,233	0,164	0,116
120	0,598	0,557	0,528	0,593	0,552	0,518	0,441	0,386	0,347	0,320

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
130	0,855	0,866	0,875	0,595	0,593	0,588	0,567	0,552	0,541	0,534
140	1,153	1,223	1,274	0,605	0,657	0,692	0,741	0,777	0,802	0,819
150	1,524	1,674	1,784	0,603	0,725	0,822	1,025	1,171	1,273	1,344
160	1,923	2,160	2,330	0,594	0,817	0,999	1,397	1,684	1,885	2,024
170	2,405	2,755	3,003	0,576	0,919	1,218	1,939	2,459	2,824	3,075
180	2,614	3,012	3,293	0,547	0,961	1,320	2,185	2,810	3,248	3,549

$\gamma°$	$G = 2,3$	$G = 3,5$							$G = 5,3$
	$P = 12$	$P = 1,25$	$P = 1,5$	$P = 2,3$	$P = 3,5$	$P = 5,3$	$P = 8,0$	$P = 12$	$P = 1,25$
0	14,53	8,086	9,956	13,14	15,47	17,16	18,49	19,49	10,24
10	11,89	7,000	8,035	10,28	11,91	13,08	13,96	14,60	8,484
20	6,889	4,865	5,428	6,245	6,843	7,251	7,498	7,663	5,851
30	2,261	3,147	3,064	2,864	2,717	2,615	2,545	2,496	3,648
40	1,307	2,011	1,901	1,691	1,538	1,430	1,353	1,299	2,183
50	0,786	1,312	1,215	1,050	0,930	0,846	0,789	0,750	1,330
60	0,437	0,888	0,802	0,661	0,557	0,485	0,435	0,400	0,830
70	0,230	0,630	0,561	0,448	0,365	0,307	0,268	0,240	0,546
80	0,0746	0,492	0,421	0,313	0,234	0,180	0,141	0,118	0,393
90	0,0439	0,415	0,358	0,265	0,197	0,149	0,117	0,0943	0,310
100	0,0544	0,385	0,329	0,238	0,172	0,126	0,0941	0,0719	0,274
110	0,0847	0,376	0,315	0,215	0,141	0,0900	0,0556	0,0316	0,262
120	0,302	0,391	0,349	0,282	0,232	0,198	0,175	0,158	0,268
130	0,529	0,422	0,395	0,352	0,320	0,297	0,281	0,269	0,291
140	0,832	0,476	0,483	0,521	0,548	0,571	0,599	0,621	0,335
150	1,393	0,537	0,621	0,763	0,866	0,939	0,991	1,027	0,388
160	2,118	0,622	0,818	1,119	1,340	1,491	1,584	1,646	0,463
170	3,245	0,732	1,123	1,715	2,147	2,443	2,619	2,734	0,564
180	3,752	0,778	1,259	1,987	2,520	2,882	3,097	3,238	0,606

$\gamma°$	$G = 5,3$						$G = 8,0$			
	$P = 1,5$	$P = 2,3$	$P = 3,5$	$P = 5,3$	$P = 8,0$	$P = 12$	$P = 1,0$	$P = 1,25$	$P = 1,5$	$P = 2,3$
0	12,11	15,10	18,40	21,78	24,97	27,73	12,01	13,66	14,78	17,06
10	8,565	9,922	11,42	12,50	14,38	15,62	10,47	11,34	11,83	12,29
20	6,193	6,205	6,218	6,231	6,243	6,254	6,808	6,817	6,831	6,904
30	3,724	3,665	3,600	3,534	3,472	3,418	3,881	3,901	3,912	3,917
40	2,155	2,071	1,979	1,884	1,796	1,720	2,180	2,158	2,143	2,113
50	1,281	1,232	1,177	1,122	1,069	1,024	1,251	1,210	1,187	1,163
60	0,780	0,731	0,676	0,620	0,568	0,523	0,745	0,700	0,676	0,648
70	0,504	0,465	0,421	0,376	0,334	0,297	0,477	0,434	0,409	0,383
80	0,341	0,310	0,276	0,240	0,207	0,178	0,337	0,295	0,271	0,245
90	0,276	0,245	0,210	0,174	0,140	0,111	0,257	0,221	0,201	0,178
100	0,242	0,211	0,178	0,143	0,111	0,0830	0,219	0,187	0,168	0,148
110	0,232	0,203	0,171	0,139	0,108	0,0817	0,205	0,174	0,156	0,140
120	0,243	0,222	0,198	0,175	0,152	0,133	0,203	0,177	0,163	0,154
130	0,274	0,254	0,232	0,209	0,188	0,170	0,208	0,194	0,187	0,180
140	0,355	0,476	0,610	0,747	0,876	0,988	0,212	0,225	0,243	0,331
150	0,439	0,503	0,572	0,644	0,711	0,769	0,228	0,280	0,311	0,349
160	0,563	0,570	0,577	0,584	0,590	0,595	0,244	0,357	0,410	0,387
170	0,750	0,710	0,666	0,621	0,577	0,539	0,252	0,471	0,570	0,496
180	0,832	0,779	0,721	0,661	0,604	0,553	0,248	0,518	0,641	0,561

$\gamma°$	$G = 8,0$				$G = 12$				
	$P = 3,5$	$P = 5,3$	$P = 8,0$	$P = 12$	$P = 1,0$	$P = 1,25$	$P = 1,5$	$P = 2,3$	$P = 3,5$
0	19,69	22,55	25,51	28,14	16,49	18,75	19,97	20,91	22,02
10	12,83	13,49	14,38	15,17	13,73	14,87	15,36	14,93	14,43
20	6,988	7,069	7,126	7,177	7,706	7,307	7,137	7,326	7,548
30	3,923	3,912	3,857	3,808	3,979	3,864	3,821	3,930	4,058
40	2,078	2,036	1,980	1,931	1,996	2,050	2,077	2,087	2,099
50	1,136	1,103	1,062	1,026	1,077	1,070	1,067	1,068	1,070
60	0,616	0,580	0,543	0,509	0,598	0,597	0,594	0,578	0,558
70	0,352	0,319	0,286	0,257	0,368	0,345	0,332	0,315	0,295
80	0,216	0,186	0,159	0,135	0,247	0,221	0,206	0,188	0,166
90	0,152	0,126	0,101	0,0800	0,186	0,157	0,142	0,126	0,107
100	0,126	0,102	0,0793	0,0592	0,151	0,129	0,116	0,103	0,0866
110	0,122	0,102	0,0814	0,0630	0,140	0,115	0,101	0,0934	0,0840
120	0,145	0,134	0,120	0,108	0,136	0,115	0,105	0,104	0,104
130	0,173	0,163	0,148	0,134	0,139	0,129	0,124	0,124	0,124
140	0,433	0,541	0,643	0,733	0,146	0,152	0,163	0,225	0,299
150	0,392	0,437	0,477	0,513	0,158	0,197	0,219	0,241	0,266

Продолжение табл. 4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
160	0,362	0,340	0,333	0,327	0,171	0,258	0,296	0,270	0,238
170	0,411	0,331	0,281	0,237	0,175	0,353	0,429	0,353	0,264
180	0,470	0,381	0,320	0,265	0,176	0,395	0,490	0,403	0,301

γ°	G = 12			G = 18				
	P = 5,3	P = 8,0	P = 12	P = 1,0	P = 1,25	P = 1,5	P = 2,3	P = 3,5
0	23,66	24,07	18,41	21,94	24,23	25,38	25,34	25,30
10	14,28	14,64	13,47	17,35	18,62	19,09	17,82	16,38
20	7,724	7,999	8,869	8,109	7,824	7,705	7,892	8,104
30	4,123	4,122	4,453	3,819	3,647	3,586	3,791	4,023
40	2,093	2,038	2,018	1,819	1,789	1,785	1,878	1,982
50	1,063	1,000	0,873	0,922	0,898	0,891	0,922	0,958
60	0,537	0,497	0,426	0,486	0,501	0,507	0,499	0,490
70	0,274	0,248	0,220	0,284	0,269	0,261	0,255	0,247
80	0,146	0,131	0,116	0,181	0,162	0,151	0,141	0,129
90	0,0899	0,0773	0,0639	0,131	0,111	0,100	0,0898	0,0781
100	0,0704	0,0555	0,0413	0,103	0,0891	0,0805	0,0704	0,0590
110	0,0731	0,0537	0,0257	0,0921	0,0786	0,0709	0,0635	0,0551
120	0,100	0,0862	0,0737	0,0882	0,0786	0,0735	0,0718	0,0698
130	0,119	0,109	0,124	0,0911	0,0892	0,0882	0,0874	0,0866
140	0,380	0,437	0,401	0,0978	0,105	0,114	0,154	0,200
150	0,289	0,325	0,422	0,110	0,132	0,145	0,163	0,182
160	0,211	0,224	0,277	0,122	0,169	0,191	0,179	0,166
170	0,189	0,187	0,219	0,137	0,213	0,246	0,209	0,167
180	0,216	0,215	0,249	0,141	0,231	0,271	0,226	0,174

γ°	G = 18			G = 27				
	P = 5,3	P = 8,0	P = 12	P = 1,0	P = 1,25	P = 1,5	P = 2,3	P = 3,5
0	25,00	22,42	16,97	30,08	29,61	29,28	28,60	27,90
10	15,19	14,45	13,06	17,32	20,48	21,84	19,85	17,81
20	8,267	8,454	8,998	9,774	8,727	8,210	8,364	8,522
30	4,231	4,434	4,777	4,237	3,665	3,409	3,670	3,978
40	2,081	2,155	2,216	1,576	1,524	1,521	1,696	1,877
50	0,991	0,991	0,940	0,672	0,720	0,752	0,810	0,870
60	0,483	0,471	0,436	0,256	0,377	0,439	0,438	0,437
70	0,239	0,225	0,210	0,168	0,195	0,209	0,212	0,215
80	0,118	0,105	0,0949	0,112	0,113	0,113	0,110	0,107
90	0,0660	0,0540	0,0433	0,0844	0,0782	0,0741	0,0676	0,0610
100	0,0473	0,0355	0,0255	0,0733	0,0632	0,0569	0,0491	0,0411
110	0,0459	0,0320	0,0139	0,0663	0,0587	0,0536	0,0442	0,0347
120	0,0665	0,0593	0,0530	0,0612	0,0581	0,0558	0,0502	0,0445
130	0,0837	0,0817	0,0947	0,0562	0,0632	0,0666	0,0645	0,0623
140	0,247	0,270	0,237	0,0698	0,0762	0,0829	0,107	0,133
150	0,201	0,231	0,296	0,0639	0,0811	0,0922	0,109	0,126
160	0,158	0,180	0,222	0,0614	0,0902	0,105	0,108	0,111
170	0,138	0,157	0,189	0,111	0,0896	0,0794	0,0856	0,0921
180	0,138	0,157	0,192	0,135	0,0884	0,0658	0,0738	0,0820

γ°	G = 27			G = 40			
	P = 5,3	P = 8,0	P = 12	P = 3,5	P = 5,3	P = 8,0	P = 12
0	26,98	25,59	25,59	29,52	29,07	29,87	30,43
10	15,92	14,42	14,42	18,59	16,48	14,39	12,71
20	8,662	8,759	8,759	8,801	8,921	9,071	9,191
30	4,256	4,499	4,499	3,969	4,233	4,450	4,630
40	2,049	2,196	2,196	1,824	2,014	2,180	2,315
50	0,926	0,973	0,973	0,817	0,879	0,936	0,983
60	0,437	0,438	0,438	0,403	0,404	0,402	0,401
70	0,217	0,217	0,217	0,195	0,204	0,215	0,224
80	0,104	0,0993	0,0993	0,0929	0,0967	0,103	0,108
90	0,0541	0,0470	0,0470	0,0498	0,0481	0,0493	0,0499
100	0,0333	0,0260	0,0260	0,0293	0,0250	0,0227	0,0205
110	0,0254	0,0170	0,0170	0,0205	0,0123	0,00603	0,000780
120	0,0390	0,0344	0,0344	0,0270	0,0202	0,0142	0,00935
130	0,0602	0,0583	0,0583	0,0459	0,0434	0,0415	0,0399
140	0,155	0,172	0,172	0,0871	0,0991	0,115	0,128
150	0,143	0,158	0,158	0,0895	0,102	0,110	0,117
160	0,116	0,127	0,127	0,0765	0,0826	0,0767	0,0716
170	0,102	0,118	0,118	0,0478	0,0729	0,0801	0,0864
180	0,0929	0,110	0,110	0,0277	0,0608	0,0766	0,0895

Анализ представленных результатов показывает, что модель хорошо аппроксимирует экспериментальные индикатрисы. Для большинства индикатрис средняя и даже максимальная погрешности аппроксимации не превышают погрешностей измерений.

Интерполяция по таблице не порождает проблем при использовании ЭВМ, однако для многих теоретических задач аналитическое задание индикатрисы более предпочтительно, в частности, при разложении в ряд по полиномам Лежандра, что необходимо для решения задач переноса излучения по методу сферических гармоник.
Существует ряд аналитических аппроксимаций индикатрис [1–3], в частности, формула Хэнви–Гринстейна [1], которая очень просто разлагается по полиномам Лежандра (коэффициент при полиноме i–й степени $x_i = \frac{2\,i+1}{2}\, g^i$). Известные аппроксимационные выражения для индикатрис всегда можно сделать более общими и более точными, вводя еще один параметр, например, возводя аппроксимационную формулу в некоторую степень α либо представляя индикатрису в виде суммы (с коэффициентами) двух исходных индикатрис, вытянутых назад и вперед.

Используем второй прием для индикатрисы Хэнви–Гринстейна [1] и биномиальной [2]. Из индикатрисы Хэнви–Гринстейна получим

$$x(\gamma) = a\,\frac{1-g^2}{(1+g^2-2\,g\cos\gamma)^{3/2}} + (1-a)\frac{1-g^2}{(1+g^2+2\,g\cos\gamma)^{3/2}}\,. \tag{9}$$

Эта индикатриса легко разлагается по полиномам Лежандра, причем коэффициент при полиноме i–й степени есть

$$x_i = \begin{cases} \dfrac{2\,i+1}{2}\, g^i & \text{для четного } i\,, \\ \dfrac{2\,i+1}{2}\,(2a-1)\, g^i & \text{для нечетного } i. \end{cases} \tag{10}$$

Аналогично получим из биномиальной индикатрисы [2]

$$x(\gamma) = \frac{N+1}{2^N}\,(a\,(1+\cos\gamma)^N + (1-a)\,(1-\cos\gamma)^N\,). \tag{11}$$

Разложение индикатрисы (11) в ряд по полиномам Лежандра дается рекуррентным соотношением

$$x_i = \begin{cases} c_i & \text{для четного } i\,, \\ (2\,a-1)\,c_i & \text{для нечетного } i\,, \end{cases} \tag{12}$$

где

$$c_i = \frac{N+1-i}{N+1+i}\,c_{i-1};\;\; c_0 = 1.$$

Результаты аппроксимации исходных экспериментальных индикатрис формулами (9) и (11) приведены в табл. 5 в графах <Модель–2> и <Модель–3>. Прочерки в таблице означают, что индикатрис (9) или (11) с соответствующими G и P не существует. Анализ таблицы показывает, что биномиальная индикатриса хуже, чем индикатриса Хэнви–Гринстейна, аппроксимирует реальные индикатрисы.

В качестве еще одного аппроксимирующего выражения можно предложить функцию

$$x(\gamma) = (a + b\cos^2(\gamma))\,\exp\,(\alpha\,\cos\gamma), \tag{13}$$

которая имеет достаточно простой вид, ее частными случаями являются выражения для сферической и рэлеевской индикатрис.

Значения коэффициентов a, b и α определяются из условия нормировки (1) и условий равенства вытянутости и остроты индикатрисы (13) значениям G и P – выражения (2) и (3). Таким образом, для определения параметров мы имеем систему из трех уравнений с тремя неизвестными, решив которую, получим:

если $G = 1$, то

$$\alpha = 0,\ a = \frac{3{,}521 - 0{,}411\,P}{1{,}521 + 1{,}559\,P}, \quad \mathrm{b} = 3(1 - \mathrm{a}); \tag{14}$$

если $G > 1$, то

$$a = \frac{4(1 + G) - \mathrm{e}^{\alpha}(2\alpha^2 - 4\,\alpha + 4) - G\mathrm{e}^{-\alpha}(2\,\alpha^2 + 4\alpha + 4)}{(1 + G)(\mathrm{e}^{-\alpha}(2 + \alpha) + \mathrm{e}^{\alpha}(2 - \alpha) - 4)};$$

$$b = 2\,\alpha^2 \frac{\mathrm{e}^{\alpha} + G\mathrm{e}^{-\alpha} - 1 - G}{(1 + G)(\mathrm{e}^{-\alpha}(2 + \alpha) + \mathrm{e}^{\alpha}(2 - \alpha) - 4)}. \tag{15}$$

Для того чтобы получить уравнение для нахождения α, надо подставить выражения (15) в следующее равенство:

$$2\,a + 1{,}174\,b - P(a + 0{,}03\,b)\exp(0{,}5924\,\alpha) - P(a + 0{,}117b)\exp(0{,}424\,\alpha) = 0\ . \tag{16}$$

Уравнение (16) легко решается на ЭВМ методом <вилки> (деления пополам) на интервале [0, 3].

Таблица 5

Результаты сравнения экспериментально измеренных и модельных индикатрис рассеяния

Тип	Модель – 1			Модель – 2			Модель – 3			Модель – 4		
	ср.	max	γ°_{max}	ср.	max	γ°_{max}	ср.	max	γ°_{max}	ср.	max	γ°_{max}
Сферич.	0	0	–	0	0	–	0	0	–	0	0	–
1,0	0	0	–	2,7	7,4	20	0	0	–	0	0	–
2,0	5,1	14	160	4,3	11	70	13	29	20	11	22	20
3,0	1,6	4,8	20	6,0	14	160	14	39	70	9,6	22	60
3,1	5,7	10	50	7,4	18	70	22	56	70	18	36	50
4,0	1,8	3,1	20	7,0	28	160	21	59	70	12	30	60
4,1	1,2	4,2	160	5,9	23	160	27	75	70	19	41	60
5,0	2,4	4,1	60	15	53	160	27	77	70	12	31	60
5,1	3,8	10	160	22	37	160	32	93	80	21	38	60
6,0	2,7	5,7	160	21	65	160	38	110	70	16	48	60
6,1	1,9	8,1	160	46	59	50	41	124	70	24	54	60
6,2	6,1	12	120	–	–	–	–	–	–	–	–	–
7,0	2,0	5,5	160	30	70	160	46	136	70	21	58	60
7,1	2,3	4,3	160	61	75	50	43	138	70	24	55	60
7,2	7,3	16	130	–	–	–	–	–	–	–	–	–
7,3	7,3	21	110	–	–	–	–	–	–	–	–	–
8,0	2,4	4,1	110	51	64	40	60	180	70	25	79	60
8,1	2,3	6,9	160	78	87	40	54	172	70	29	71	50
8,2	5,6	18	120	–	–	–	–	–	–	–	–	–
8,3	9,1	25	110	–	–	–	–	–	–	–	–	–
8,4	15	50	110	–	–	–	–	–	–	–	–	–
9,0	6,5	16	60	74	85	40	75	229	70	33	103	50
9,1	3,6	7,2	160	–	–	–	75	231	70	37	110	50
9,2	11	45	160	–	–	–	70	180	50	46	102	50
9,3	5,3	15	110	–	–	–	–	–	–	–	–	–
10,0	17	52	60	–	–	–	125	389	70	53	182	50
10,2	10	26	160	–	–	–	80	214	70	43	99	50

Примечание: ср. – среднее отклонение модели от экспериментальной индикатрисы, %; max – максимальное отклонение модели от экспериментальной индикатрисы, %; g_{max} – угол максимального отклонения, град.

Аналитические выражения для коэффициентов разложения индикатрисы (13) по полиномам Лежандра получаются не столь простыми, как для индикатрисы Хэнви – Гринстейна, но при вычислениях на ЭВМ их расчет не предствляет труда. Проще всего эти выражения записать с использованием рекуррентных соотношений:

$$x_i = \frac{2i+1}{2}\sum_{k=0}^{i} C_k(i)(aI_k + bI_{k+2}) \,, \tag{17}$$

где

$$c_k(i) = \frac{2i-1}{i}\, c_{k-1}(i-1) - \frac{i-1}{i}\, C_k(i-2);$$

$$C_{-1}(i-1) = C_{i-1}(i-2) = C_i(i-2) = 0; \;\; C_0(0) = 1, \;\; C_0(1) = 0, \;\; C_1(1) = 1;$$

$$I_k = \begin{cases} \dfrac{2}{\alpha}\, sh\alpha - \dfrac{k}{\alpha}\, i_{k-1} & \text{для четного } k, \\ \dfrac{2}{\alpha}\, ch\alpha - \dfrac{k}{\alpha}\, i_{k-1} & \text{для нечетного } k, \end{cases} \qquad I_{-1} = 0 \,.$$

Результаты аппроксимации исходных экспериментальных индикатрис формулой (13) приведены в табл. 5 в графе <Модель 4>. Прочерки в табл. 5 означают, что получаемая по формуле (13) индикатриса лишена физического смысла (присутствуют отрицательные значения).

Индикатриса (13) в большинстве случаев лучше аппроксимирует экспериментальные индикатрисы, чем индикатриса Хэнви – Гринстейна (9), и может быть рекомендована в качестве аналитического выражения для моделирования индикатрис рассеяния света в атмосфере.

Таким образом, нами предложена модель индикатрисы рассеяния, содержащая два параметра – остроту и вытянутость, причем эти параметры имеют физический смысл: вытянутость – отношение доли излучения, рассеиваемого вперед, к доле излучения, рассеиваемого назад; острота – относительная величина максимума первой радуги. Предложено две модели построения индикатрисы рассеяния по заданным значениям вытянутости и остроты: интерполяционная (табл. 4, формулы (5) – (8)) и аналитическая ((13)–(16)). Выбор одной из этих моделей можно рекомендовать, исходя из используемого метода расчета переноса излучения, а также точности, с которой желательно аппроксимировать индикатрисы рассеяния.

Авторы выражают благодарность Л.С. Ивлеву за плодотворное обсуждение полученных результатов.

1. Henyey L., Greenstein J. // Astrophys. J. 1941. V. 93. P. 70–83.
2. Kaps H.G., Shultis J.K., Veninga J.G. // J. Comp. Phys. 1980. V. 6. P. 288–313.
3. Reynolds L.O., McCormik N.J. // J. Opt. Soc. of Am. 1980. V. 70. N 10. P. 1206–1212.
4. Горчаков Г.И., Исаков А.А., Свириденков М.А. // Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1976. Т. 12. №12. С. 1261 – 1262.
5. Горчаков Г.И., Свириденков М.А. // Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1979. Т. 15. №1. С. 53 – 59.
6. Оптические свойства прибрежных атмосферных дымок / М.В. Кабанов, М.В. Панченко, Ю.А. Пхалагов и др. Новосибирск: Наука, 1988. 201 с.
7. Бартенева О.Д., Довгялло Е.Н., Полякова Е.А. // Труды ГГО. 1967. Вып. 220. 244 с.
8. Бартенева О.Д., Лактионов А.Г., Аднашкин В.Н. и др. // Проблемы физики атмосферы. Вып. 15. Л.: Изд–во ЛГУ, 1978. С. 27 – 43.

Санкт–Петербургский государственный университет.
Научно – исследовательский институт физики (НИИФ СПбГУ).

Поступила в редакцию 12 июля 1993 г.

O.B. Vasiliev, A.V. Vasiliev. **A Two – Parameter Model of the Scattering Phase Function.**

Based on the classification of scattering phase functions by O.D. Barteneva, two parameters are isolated that characterize the scattering phase function. To relate these parameters to meteorological characteristics the analytical expressions are derived. An algorithm for obtaining a scattering phase function with preset values of these two parameters is also proposed in this paper. In addition, known analytical formulas used to approximate the scattering phase functions in application to our model is analyzed and a new analytical expression for doing this is proposed.