«Оптика атмосферы», т. 4, № 1 (1991)

УДК 621.391

А.Л. Вольпов, Ю.А. Зимин, А.И. Толмачев

АДАПТИВНЫЕ МЕТОДЫ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ (ОБЗОР)

Сделан обзор адаптивных методов решения задачи «видения» через турбулентную атмосферу. Приведена постановка задачи, введена модель светового поля, описаны два подхода к адаптации: измерение фазовых искажений и использование функций резкости. Рассмотрены известные функции резкости, проведен их анализ на абсолютный максимум. Описан бейесовский подход к задаче адаптивного восстановления изображений. Показано, что лишь у некоторых из большого числа функций резкости абсолютный максимум соответствует восстановлению изображения. Рассмотрены способы поиска абсолютного максимума, проведен анализ функций резкости на возможность его последовательного поиска по ячейкам адаптивного элемента. Показано, что для функций резкости, имеющих вторичные максимумы, такой поиск невозможен. По результатам анализа сделаны выводы о применении той или иной функции резкости в различных условиях.

1. Введение. Задача «видения» через атмосферу

При наблюдении за объектами в астрономии и оптической локации часто приходится сталкиваться с тем, что турбулентная атмосфера, через которую ведется наблюдение, искажает информацию о форме объектов, содержащуюся в волновом фронте отраженной от их поверхности или излученной ими волны. При формировании изображений объектов при помощи телескопической системы турбулентность атмосферы приводит к ограничению разрешающей способности оптической системы величиной 1÷5 угл. с в видимом диапазоне [1]. В последние годы в связи с интенсивным развитием науки и техники проблема видения через атмосферу приобрела особую актуальность. Для ее решения привлечены не только методы классической оптики, но и хорошо развитые методы квантовой электроники и статистической радиотехники. В результате появились новые методы обработки световых полей, отличные от обычного телескопического приема.

Методы видения через турбулентную атмосферу условно группируют по трем основным направлениям: интерферометрические, голографические и адаптивные [2]. Интерферометрические методы обработки используются для определения геометрических характеристик объектов, испускающих или рассеивающих некогерентное по времени излучение. В основе большинства из них лежит определение квадрата модуля спектра пространственных частот объекта [3–5] или его самого [6–9], по которым согласно теореме Ван – Циттерта – Цернике формируется соответственно изображение объекта или его автокорреляция. К недостаткам этих методов относятся сложность и большая продолжительность обработки. Например, в пятенной интерферометрии для регистрации ста независимых спекл-изображений требуется время порядка 0,1 ÷ 1 с. Голографические методы используют когерентное излучение и также позволяют восстанавливать автокорреляцию [10] и изображение [11] объектов. Однако большинство голографических методов требует наличия (что редко практически выполняется) опорного точечного источника в изопланарной с объектом наблюдения области, чтобы скомпенсировать атмосферные фазовые искажения. Адаптивные методы видения через турбулентную атмосферу являются более перспективными, чем интерферометрические и голографические, так как они позволяют формировать дифракционно-ограниченные изображения объектов, как в естественном, так и в когерентном свете при подсвете лазерным пучком. При этом изображения строятся в реальном времени, т.е. за время, меньшее времени замороженности атмосферы. Основная идея адаптации состоит в следующем. Как известно [12], влияние атмосферы на световое излучение от объекта, расположенного в пределах области изопланарности, может быть описано приближением амплитудно-фазового экрана. Если перед приемной апертурой ввести фазовый транспарант, компенсирующий вносимые атмосферой фазовые флуктуации, то разрешающая способность оптической системы будет близка к дифракционной, в связи с тем, что амплитудные флуктуации сигнала от объекта слабо искажают изображение [13]. Так как состояние атмосферы изменяется со временем, то коррекцию при помощи управляемого фазового транспаранта нужно производить в течение времени замороженности атмосферы. Данный способ называют методом адаптивной оптики.

Для того, чтобы скомпенсировать вносимые турбулентной атмосферой фазовые искажения полезного сигнала, нужно найти их. Это и является главным моментом адаптации. Наибольшее распространение получили два подхода: использование датчиков волнового фронта и максимизация функций резкости [14].

Первый подход основан на измерении фазовых искажений оптического поля в плоскости входного или выходного зрачка приемной оптической системы. Как известно, в оптике в силу специфики квадратичного детектирования прямое измерение фазы невозможно, поэтому обычно регистрируются распределения разностей фаз. Методы измерения разностей фаз могут быть как прямыми, так и косвенными. Прямые основаны на разбиении всей площади зрачка на отдельные участки и построении в каждом из них неразрешаемого изображения объекта. Центры тяжести изображений точечного объекта в отсутствие искажений (т.е. при падении на приемную оптическую систему плоской волны) образуют координатную сетку. При наличии локального наклона в каждом из элементарных участков центр тяжести изображения сдвинется от соответствующего узла сетки на пропорциональную наклону величину. Пересчет векторных отклонений изображений от узлов сетки дает возможность определить локальный наклон в каждом участке, который в дискретном представлении пропорционален разности фаз между краями участка. Это так называемый датчик Гартмана [25]. Сшивка разностей фаз позволяет определить [14] фазу волнового фронта.

Косвенные методы основаны на интерференции оптического поля либо с опорной волной, либо с самим собой, смещенным на некоторый вектор в плоскости зрачка. Регистрация интерферограмм с опорной волной вызывает значительные технические трудности вследствие ограниченной временной когерентности объектного оптического поля и в датчиках волнового фронта практически не используется. В то же время большое применение нашли модифицированные интерферометры Майкельсона [10] и интерферометры сдвига [22, 24], позволяющие получать интерференционную картину от взаимодействия оптического поля с самим собой. Если первый случай используется для получения информации о самом объекте, то второй предназначен для измерения распределений разности фаз волнового фронта. Искомые распределения рассчитываются по искривлению интерференционных полос в каждом элементарном участке картины. Две интерферограммы при сдвигах поля в двух взаимно ортогональных направлениях позволяют определить соответствующие разности фаз. Как и в предыдущем случае, сшивка разностей приводит к определению значений фазы волнового фронта. Измеряемые значения фазы после необходимой обработки подаются на исполнительные механизмы (например, толкатели) адаптивного устройства (зеркала или фазового транспаранта), которое в результате «подстраивается» под форму волнового фронта.

Второй подход [26—29] основан на непрерывном изменении фазы волнового фронта за счет регулирования отдельных участков адаптивного элемента при пропускании через него оптического поля. Из измеренной интенсивности прошедшего поля формируются различные функционалы, называемые функциями резкости. Изменение фазы волнового фронта в ту или иную сторону за счет адаптивного элемента приводит к соответствующему изменению значения функционала. Максимум или минимум функции резкости должен достигаться при компенсации адаптивным элементом фазовых искажений, т.е. при «резком» изображении. Поскольку в данном подходе отсутствует прямое измерение фазовых искажений, наиболее сложным являются выбор функций резкости и методы управления адаптивным элементом.

Для перехода к более подробному изложению методов адаптации рассмотрим вначале модель светового поля.

2. Модель светового поля. Датчики волнового фронта

Будем разделять случаи когерентного и некогерентного по времени полей. Если исследуемый объект освещается монохроматическим излучением с длиной волны λ, то рассеянное объектом световое поле в плоскости приема ρ имеет вид [15]

$$\varepsilon_c(\rho,\ t) = \mathrm{Re}\ \varepsilon_o(\rho)\ \exp(-\ i\omega\ t), \tag{2.1}$$

где $\omega = \dfrac{2\pi c}{\lambda}$ — круговая частота; c — скорость света; t — время; $\varepsilon_o(\rho)$ — комплексная функция, описывающая пространственную структуру поля.

При таких расстояниях R от объекта до плоскости приема, что для всех $\rho\notin\Omega$ и $\mathrm{r}\in\Omega$ выполняется условие $R^3 \gg \dfrac{\pi}{4\lambda}\mid \rho^*-\ r\mid^4$, функция $\varepsilon(\rho)$ связана с комплексной амплитудой поля $E(\mathbf{r})$ в картинной плоскости объекта r следующим образом [16]:

$$\varepsilon(\rho) = \int_\Omega E(\mathrm{r})\ \mathrm{G}(\mathrm{r}-\rho)\ \exp\ \{\Phi(\mathrm{r},\ \rho\}\ d\mathrm{r}, \tag{2.2}$$

где $\mathrm{G}(\mathrm{r}-\rho) = (i\lambda R)^{-1}\ \exp\ \{i\kappa R + \dfrac{i\kappa}{2R}\mid \mathrm{r}-\rho\mid^2\}$, Ω_0 — область приемной апертуры, Ω — проекция объекта на картинную плоскость; функция $\Phi(\mathrm{r},\ \rho)$ описывает искажения сигнала при прохождении излучения из точки с координатой через атмосферу в точку с координатой ρ. Функция $\Phi(\mathrm{r},\ \rho) = \chi(\mathrm{r},\ \rho) + i\varphi(\mathrm{r},\ \rho)$ комплексная: $\chi(\mathrm{r},\ \rho)$ — логарифм амплитудных искажений; $\chi(\mathrm{r},\ \rho)$ — фазовые искажения сигнала. Так как при распространении через турбулентную атмосферу излучение подвержено большому количеству случайных и независимых воздействий, то в силу центральной предельной теоремы функции $\chi(\mathrm{r},\ \rho)$ и $\varphi(\mathrm{r},\ \rho)$ подчиняются гауссовской статистике. Если наблюдаемый объект находится в пределах области изопланарности атмосферы, то для описания ее влияния можно пользоваться приближением амплитудно-фазового экрана $\Phi(r, \rho) = \Phi(\rho)$, расположенного в плоскости приема. В ряде случаев (например, на вертикальных трассах) амплитудные флуктуации бывают малы ($\chi(\rho) \approx 0$), и рассматривают модель фазового экрана $\Phi(r, \rho) = i\varphi(\rho)$, то есть

$$\varepsilon(\rho) = \exp\{i\varphi(\rho)\}\int_\Omega E(r)\, G(r - \rho)\, dr. \tag{2.3}$$

В приближении фазового экрана при телескопическом приеме в плоскости изображения x регистрируется интенсивность

$$I(\mathrm{x}) = \frac{1}{2}\,|E(\mathrm{x})|^2 = \frac{1}{2}\left|\int_\Omega E(\mathbf{r})\, g(\mathbf{r}, \mathrm{x})\, d\mathbf{r}\right|^2, \tag{2.4}$$

где

$$g(\mathbf{r}, \mathrm{x}) = S_0(\lambda^2 R z)^{-1} \exp\left\{i\kappa(z + R) + \frac{i\kappa}{2z}|\mathrm{x}|^2 + \frac{i\kappa}{2R}|\mathbf{r}|^2\right\} g_i^*\left(\mathbf{r} + \frac{R}{z}\mathrm{x}\right); \tag{2.5}$$

$$g_i\left(\mathbf{r} + \frac{R}{z}\mathrm{x}\right) = S_0^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} w(\rho) \exp\left\{i\varphi(\rho) + \frac{i\kappa}{R}\left(\mathbf{r} + \frac{R}{z}\mathrm{x}\right)\rho\right\} d\rho, \tag{2.6}$$

$f^{-1} = z^{-1} + R^{-1}$; f – фокусное расстояние телескопа; z – расстояние от плоскости апертуры до плоскости изображения; S_0 – площадь апертуры; $\omega(\rho)$ – апертурная функция, равная единице в пределах апертуры и нулю вне ее. Если фазовые искажения сигнала отсутствуют ($\varphi(\rho) = 0$) и число элементов разрешения объекта приемной оптикой $M_0 = \dfrac{SS_0}{(\lambda R)^2} \gg 1$ (S – площадь проекции объекта на картинную плоскость Ω), то ширина функции $g_0(r) = g_1(r)\,\big|_{\varphi(\rho) = 0}$ существенно меньше линейного размера области Ω. В данном случае для объекта с зеркальной поверхностью, когда поле на объекте $E(r)$ описывается плавной, медленно меняющейся по сравнению с $g_0(r)$ функцией, наблюдается изображение

$$I(\mathrm{x}) = \frac{R^2}{2z^2}\left|E\left(-\frac{R}{z}\mathrm{x}\right)\right|^2. \tag{2.7}$$

В случае объекта с шероховатой поверхностью комплексная амплитуда поля в картинной плоскости объекта является реализацией случайного δ-коррелированного гауссовского процесса с нулевым средним, то есть

$$\begin{gathered} \langle E(\mathbf{r})\rangle = 0; \\ \langle E(\mathbf{r}_1)\, E(\mathbf{r}_2)\rangle = \langle E^*(\mathbf{r}_1)\, E^*(\mathbf{r}_2)\rangle = 0; \\ \langle E(\mathbf{r}_1)\, E^*(\mathbf{r}_2)\rangle = \langle E^*(\mathbf{r}_1)\, E(\mathbf{r}_2)\rangle = u(\mathbf{r}_1)\,\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \end{gathered} \tag{2.8}$$

где функция $u(r)$ пропорциональна интенсивности поля в картинной плоскости; $\langle\ldots\rangle$ означает усреднение по ансамблю реализаций микроструктуры поверхности объекта. Среднее распределение интенсивности изображения, получаемого при освещении шероховатого объекта монохроматическим излучением, совпадает с распределением интенсивности изображения в некогерентном свете [2]

$$\langle I(\mathbf{x})\rangle = \frac{1}{2} S_0^2 (\lambda R z)^{-2}\int_\Omega u(\mathbf{r})\left|g_1\left(\mathbf{r} + \frac{R}{z}\mathbf{x}\right)\right|^2 d\mathbf{r} = I_0(\mathbf{x}) * h(\mathbf{x}), \tag{2.9}$$

то есть представляет собой свертку неискаженного изображения объекта $I_0(x)$ с импульсным откликом системы «приемная апертура – атмосфера» $h(x) = |g_1(x)|^2$. При отсутствии фазовых искажений средняя интенсивность изображения равна

$$\langle I(\mathrm{x})\rangle = \frac{1}{2} S_0 (\lambda^2 z^2)^{-1}\, u\left(-\frac{R}{z}\mathrm{x}\right). \tag{2.10}$$

Каждая конкретная реализация изображения представляет среднее изображение, промодулированное случайной пятенной картиной с контрастом пятен, равным единице. В ряде случаев возникает задача сглаживания пятенной структуры изображений. Для этого можно использовать освещение шероховатого объекта излучением с различными длинами волн, метод пространственного усреднения в плоскости изображения [17], сканирующее излучение [18]. Регистрируемая интенсивность сглаженного изображения описывается соотношениями (2.9) и (2.10).

На практике принимаемое световое излучение является полихроматическим, т.е. имеет конечную ширину спектра $\Delta\lambda$. Ширина спектра определяется спектральной шириной линии подсвечивающего излучения (лазерное или естественное освещение) и используемым в плоскости приема спектральным фильтром. Так как вносимые атмосферой фазовые искажения различны на разных длинах волн, то при адаптации необходима достаточно узкая полоса $\Delta\lambda$, в пределах которой происходит эффективная компенсация искажений. Изменение длины волны на $\Delta\lambda$ приводит к изменению фазовых искажений на приемной апертуре на величину порядка $\sigma_\varphi \sim \Delta\lambda/\lambda$, где среднеквадратическое фазовое отклонение $\sigma_\varphi = 10\div25$ радиан [19]. Это дает условие $\Delta\lambda/\lambda \le 0{,}03\div0{,}01$. В случае такого полихроматического сигнала и объекта с макроповерхностью, лежащей в картинной плоскости, и микроповерхностью, шероховатость которой меньше длины когерентности излучения $\lambda^2/\Delta\lambda \sim 30\div100\ \lambda$, при выполнении условия $\Delta\lambda M_0^{1/2}/\lambda \ll 1$ остается справедливой формула (2.4) и вид пятенной структуры изображения сохраняется. Если диффузный объект является объемным и отклонение его поверхности от картинной плоскости в пределах элемента оптического разрешения превышает длину когерентности излучения, то происходит сглаживание пятенной структуры изображения. Ширине спектра излучения $\Delta\nu = c\Delta\lambda/\lambda^2$ соответствует длина когерентности $(\Delta\nu)^{-1}\,c$. При наблюдении объемных объектов контраст пятен в изображении равен $(c/d\Delta\nu)^{1/2}$, где d – размер характерного отклонения поверхности объекта от картинной плоскости в пределах элемента оптического разрешения.

Перейдем теперь к рассмотрению датчиков волнового фронта. Как указывалось во введении, подход с использованием датчиков волнового фронта основан на измерении разностей фаз последовательными шагами по площади приемной апертуры. Информация об измеренных разностях фаз обрабатывается и используется при формировании управляющих сигналов для адаптивного элемента [20, 21]. Наибольшее распространение среди датчиков нашли интерферометр сдвига [22, 24] и датчик Гартмана [25]. В интерферометре сдвига в плоскости входной апертуры регистрируется интерферограмма полей $\varepsilon(\rho)$ и $\varepsilon(\rho + 1)$, где 1 – вектор сдвига. При когерентном освещении по ней определяют величину

$$\mathrm{Re}\,\varepsilon(\rho)\,\varepsilon^*(\rho + 1) = |\varepsilon_0(\rho)|\,|\varepsilon_0(\rho + 1)|\cos[\varphi(\rho) - \varphi(\rho + 1) + \arg\varepsilon_0(\rho) - \arg\varepsilon_0(\rho + 1)],$$

где $\varepsilon_0(\rho) = \varepsilon(\rho)|_{\varphi(\rho)=0}$ – объектное поле в плоскости приема. Нетрудно видеть, что вносимые атмосферой фазовые искажения можно найти лишь при знании фазы объектного поля $\arg\varepsilon_0(\rho)$, то есть при известной функции $E(\mathrm{r})$. В некогерентном случае находится величина

$$\mathrm{Re} < \varepsilon(\rho)\,\varepsilon^*(\rho + 1) > = \mathrm{Re}\int_\Omega u(\mathrm{r})\,G(\mathrm{r} - \rho)\,G^*(\mathrm{r} - \rho + 1)\,d\mathrm{r} \sim \cos\,[\varphi(\rho) - \varphi(\rho + 1) - |1|^2 - 2\,\rho\,1 +$$

$$+ \arg\int_\Omega u(\mathrm{r})\exp\left(i\frac{\kappa}{R}\,\mathrm{r}\,1\right)d\mathrm{r}\ ].$$

При этом если $U(\mathrm{r})$ – произвольная центрально-симметричная функция, то $\arg\int_\Omega u(\mathrm{r})\exp\left(i\frac{\kappa}{R}\,\mathrm{r}\,1\right)d\mathrm{r} = 0$. В общем случае для определения разности фаз $\varphi(\rho) - \varphi(\rho + 1)$ нужно знать функцию $U(\mathrm{r})$. В датчике Гартмана принимаемое излучение попадает на матрицу малых (по сравнению с размером корреляции фазовых искажений) линз, каждая из которых формирует плохо разрешаемое изображение объекта. Локальный наклон волнового фронта на каждой из линз определяют по положению центра тяжести изображения. Для линзы с центром в точке $\rho = 0$ градиент фазовых искажений оценивают по формуле

$$(\mathrm{grad}\,\hat{\varphi}(\rho)|_{\rho=0}) = \frac{\kappa}{z}\,\frac{\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{x}\,I(\mathrm{x})\,d\mathrm{x}}{\int_{-\infty}^{\infty} I(\mathrm{x})\,d\mathrm{x}}\,.$$

Используя для интенсивности изображения соотношения (24) и (29), где $\varphi(\rho) = \rho(\mathrm{grad}\ \varphi(\rho)|_{\rho=0})$, нетрудно показать, что в случае δ-образных или четных функций $E(\mathrm{r})$ и $u(\mathrm{r})$ при соответственно когерентном и некогерентном освещении распределение интенсивности симметрично относительно точки $\mathrm{x} = \frac{\kappa}{z}\,\mathrm{grad}\ \varphi(\rho)|_{\rho=0}$. Тогда оценка наклона волнового фронта будет правильной. В остальных случаях эта оценка дает ошибку. Для определения и устранения ошибки нужно знать соответственно функции $E(\mathrm{r})$ и $U(\mathrm{r})$.

Таким образом, мы видим, что в общем случае при использовании датчиков волнового фронта для измерения атмосферных фазовых искажений необходим опорный объект известной формы с заданными функциями $E(\mathrm{r})$ или $u(\mathrm{r})$, например опорная точка. В противном случае вносимые атмосферой искажения определить нельзя.

3. Адаптивная компенсация искажений, использующая функции резкости в изображении

Как отмечалось во введении, другой подход к адаптации по изображению – это формирование изображения путем максимизации «функции резкости» [26–29] . В данном методе датчик волнового фронта отсутствует. Коррекция волнового фронта осуществляется непрерывным регулированием отдельных участков активного оптического элемента по максимуму величины, называемой функцией резкости. Функции резкости называют некоторые функционалы от измеряемой интенсивности (в данном случае – изображения). Считают, что максимизации функций резкости отвечает компенсации атмосферных фазовых искажений. Данный метод, как и выбор конкретных функций резкости, имеет эвристический характер и не является универсальным для задачи восстановления изображения. Будем считать, что приемная апертура обеспечивает хорошее оптическое разрешение $M_0 \gg 1$.

При отсутствии априорной информации о форме протяженного объекта часто используют функционал [26]

$$S_1 = \int_{\Omega_\rho} I^2(\mathrm{x})\, d\mathrm{x}, \tag{3.1}$$

где Ω_ρ – область регистрации интенсивности в плоскости изображения; S_ρ – площадь этой области.

Согласно (2.4) интенсивность изображения

$$I(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\lambda^2 R z)^{-2} \iint_{-\infty}^{\infty} w(\rho_1)\, w(\rho_2)\, \varepsilon_1(\rho_1)\, \varepsilon_1^*(\rho_2) \times$$
$$\times \exp\left\{ i\phi(\rho_1) - i\psi(\rho_2) - i\frac{\kappa}{z}\, x(\rho_1 - \rho_2) \right\} d\rho_1 d\rho_2,$$

где

$$\varepsilon_1(\rho) = \int_\Omega E(\mathbf{r}) \exp\left\{ i\frac{\kappa}{2R}|\mathbf{r}|^2 - \frac{i\kappa}{R}\mathbf{r}\rho \right\} d\mathbf{r} = i\lambda R \exp\left\{ -\frac{i\kappa}{2R}|\rho|^2 \right\} \varepsilon_0(\rho)$$

связано с объектным полем $\varepsilon_0(\rho)$; $\varphi(\rho) + \theta(\rho) = \phi(\rho)$; $\theta(\rho)$ – фазовые искажения в плоскости апертуры, обусловленные адаптивным элементом. Учитывая, что при достаточно большой области регистрации $S_\rho \gg (\lambda z)^2/S$ (выполнение этого условия вытекает из соотношений $M_0 \gg 1$ и $S_\rho \sim (\frac{z}{R})^2 S_0$) справедливо

$$\int_{\Omega_\rho} \exp\{-i\frac{\kappa}{z}\mathrm{x}\,\rho\}\, d\mathrm{x} \sim (\lambda z)^2 \delta(\rho),$$

для функции резкости S_1 при когерентном освещении получим

$$S_1 = \frac{1}{4}(\lambda^3 R^2 z)^{-2} \iiint_{-\infty}^{\infty} w(\rho_1)\, w(\rho_2)\, w(\rho_3)\, w(\rho_1 - \rho_2 + \rho_3)\, \varepsilon_1(\rho_1)\, \varepsilon_1^*(\rho_2) \times$$
$$\times \varepsilon_1(\rho_3)\, \varepsilon_1^*(\rho_1 - \rho_2 + \rho_3) \exp\{i\psi(\rho_1) - i\phi(\rho_2) + i\psi(\rho_3) - i\psi(\rho_1 - \rho_2 + \rho_3)\} \times$$
$$\times d\rho_1 d\rho_2 d\rho_3 \leqslant \frac{1}{4}(\lambda^3 R^2 z)^{-2} \iiint_{-\infty}^{\infty} w(\rho_1)\, w(\rho_2)\, w(\rho_3)\, w(\rho_1 - \rho_2 + \rho_3) \times$$
$$\times |\varepsilon_1(\rho_1)\, \varepsilon_1^*(\rho_2)\, \varepsilon_1(\rho_3)\, \varepsilon_1^*(\rho_1 - \rho_2 + \rho_3)|\, d\rho_1 d\rho_2 d\rho_3. \tag{3.2}$$

Функция резкости S_1 максимальна, если для любых ρ_1, ρ_2, ρ_3 справедливо

$$\psi(\rho_1) - \psi(\rho_2) + \psi(\rho_3) - \phi(\rho_1 - \rho_2 + \rho_3) + \arg\{\varepsilon_1(\rho_1)\, \varepsilon_1^*(\rho_2)\, \varepsilon_1(\rho_3)\, \varepsilon_1^*(\rho_1 - \rho_2 + \rho_3)\} = \mathrm{const}.$$

Полагая $\rho_1 = \rho_3 = \rho$; $\rho_2 = \rho + \mathrm{x}$ и устремляя x к нулю, получим, что вторая производная $[\varphi(\rho) + \arg \varepsilon_1(\rho)] = 0$ или

$$\psi(\rho) + \arg \varepsilon_1(\rho) = a + b\rho, \tag{3.3}$$

где a, b — произвольные константы. Это условие не отвечает компенсации фазовых искажений, атмосферные фазовые искажения не отделяются от фазы объектного поля. В некогерентном случае вместо (3.2) будем иметь

$$\begin{aligned} S_1 = &\frac{1}{4}(\lambda^3R^2z)^{-2}\iiint\limits_{-\infty}^{\infty} w(\rho_1)\,w(\rho_2)\,w(\rho_3)\,w(\rho_1-\rho_2+\rho_3)\times \\ &\times \langle\varepsilon_1(\rho_1)\,\varepsilon_1^*(\rho_2)\rangle \langle\varepsilon_1(\rho_3)\,\varepsilon_1^*(\rho_1-\rho_2+\rho_3)\rangle\times \\ &\times \exp\{i\psi(\rho_1)-i\psi(\rho_2)+i\psi(\rho_3)-i\psi(\rho_1-\rho_2+\rho_3)\}\,d\rho_1 d\rho_2 d\rho_3 = \\ &= \frac{1}{4}(\lambda^3R^2z)^{-2}\iiint\limits_{-\infty}^{\infty} w(\rho_1)\,w(\rho_2)\,w(\rho_3)\,w(\rho_1-\rho_2+\rho_3)\times \\ &\times\left|\int\limits_{\Omega} u(\mathbf{r})\exp\left\{i\frac{\kappa}{R}\mathbf{r}(\rho_2-\rho_1)\right\}d\mathbf{r}\right|^2 \exp\{i\psi(\rho_1)-i\psi(\rho_2)+i\psi(\rho_3)- \\ &- i\psi(\rho_1-\rho_2+\rho_3)\}\,d\rho_1 d\rho_2 d\rho_3 \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{4}(\lambda^3R^2z^2)^{-2}\iiint\limits_{-\infty}^{\infty} w(\rho_1)\,w(\rho_2)\,w(\rho_3)\,w(\rho_1-\rho_2+\rho_3)\left|\int\limits_{\Omega} u(\mathbf{r})\times\right. \\ &\left.\times \exp\left\{i\frac{\kappa}{R}\mathbf{r}(\rho_2-\rho_1)\right\}d\mathbf{r}\right|^2 d\rho_1 d\rho_2 d\rho_3, \end{aligned} \tag{3.4}$$

что дает условие максимума

$$\phi(\rho) = a + b\rho. \tag{3.5}$$

Следовательно, при некогерентном освещении достижение абсолютного максимума функции резкости S_1 обеспечивает восстановление неискаженных изображений протяженных объектов произвольной формы. Функционал

$$S_2 = \int\limits_{\Omega_\rho}\left[\frac{\partial^{n+m} I(x_1, x_2)}{\partial x_1^n\,\partial x_2^m}\right]^2 dx_1 dx_2, \tag{3.6}$$

где x_1, x_2 — координаты вектора x; n, m — целые числа [26], полностью аналогичен рассмотренной функции резкости S_1. Дифференцирование по координатам x_1 и x_2 приводит к дополнительному вещественному сомножителю $(\frac{\kappa}{z})^{2n+2m}$ $(\Delta\rho)_1^{2n}$ и $(\Delta\rho)_2^{2m}$ под знаком интеграла в соотношениях (3.2) и (3.4), где $(\Delta\rho)_1$ и $(\Delta\rho)_2$ — координаты вектора $\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1$. Рассуждения при этом не меняются. Существует также [26] функция резкости

$$S_3 = \int\limits_{\Omega_\rho} I^{\,n}(\mathrm{x})\,d\mathrm{x}, \tag{3.7}$$

где n — целое число, $n > 2$. Рассмотрим случай $n = 3$. По аналогии с функционалом S_1 нетрудно получить для когерентного случая условие максимума

$$\begin{gathered}\phi(\rho_1) - \phi(\rho_2) + \phi(\rho_3) - \phi(\rho_4) + \phi(\rho_5) - \phi(\rho_1 - \rho_2 + \rho_3 - \rho_4 + \rho_5) + \\ + \arg\{\varepsilon_1(\rho_1)\,\varepsilon_1^*(\rho_2)\,\varepsilon_1(\rho_3)\,\varepsilon_1^*(\rho_4)\,\varepsilon_1(\rho_5)\,\varepsilon_1^*(\rho_1 - \rho_2 + \rho_3 - \rho_4 + \rho_5)\} = \mathrm{const}\end{gathered}$$

для любых ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4, ρ_5. Полагая $\rho_1 = \rho_3 = \rho_4 = \rho_5 = \rho$; $\rho_2 = \rho + \mathrm{x}$, снова приходим к соотношению (1.13). При некогерентном освещении условие максимума

$$\begin{gathered}\phi(\rho_1) - \phi(\rho_2) + \phi(\rho_3) - \phi(\rho_4) + \phi(\rho_5) - \phi(\rho_1 - \rho_2 + \rho_3 - \rho_4 + \rho_5) + \arg\{\langle\varepsilon_1(\rho_1)\,\varepsilon_1^*(\rho_2)\rangle \langle\varepsilon_1(\rho_3)\,\varepsilon_1^*(\rho_4)\rangle \times \\ \times \langle\varepsilon_1(\rho_5)\,\varepsilon_1^*(\rho_1 - \rho_2 + \rho_3 - \rho_4 + \rho_5)\rangle\} = \mathrm{const}\end{gathered}$$

приводит к соотношению (1.15) лишь для центрально-симметричных объектов, когда $u(\mathrm{r}) = u(-\mathrm{r})$. В общем случае аргумент от произведения в последнем равенстве отличен от нуля, и максимизация функционала S_3 не будет отвечать условию (3.5). Функции резкости с n = 4, 5,... рассматриваются аналогично случаю n = 3. В результате можно сделать вывод, что максимизация S_3 пригодна для точечных и центрально-симметричных объектов при некогерентном освещении.

Функция резкости [26] с амплитудной маской $M(\mathrm{x}) = I_0(\mathrm{x})$:

$$S_4 = \int_{\Omega_\rho} M(\mathrm{x})\, I(\mathrm{x})\, d\mathrm{x}, \tag{3.8}$$

где $I_0(\mathrm{x})$ – интенсивность неискаженного атмосферой изображения. В некогерентном случае для произвольной маски $M(\mathrm{x})$ функционал

$$S_4 = \frac{1}{2}(\lambda^2 R z)^{-2} \iint_{-\infty}^{\infty} w(\rho_1)\, w(\rho_2) \exp\{i\psi(\rho_1) - i\psi(\rho_2)\} \int_{\Omega_\rho} M(\mathbf{x}) \exp\left\{-\frac{i\kappa}{z}\mathbf{x}(\rho_1 - \rho_2)\right\} d\mathbf{x} \int_{\Omega} u(\mathbf{r}) \times$$
$$\times \exp\left\{i\frac{\kappa}{R}\mathbf{r}(\rho_1 - \rho_2)\right\} d\mathbf{r}\, d\rho_1\, d\rho_2. \tag{3.9}$$

Так как маска соответствует неискаженному изображению объекта, то $M(\mathrm{x}) = I_0(\mathrm{x}) \sim u\left(-\frac{R}{z}\mathrm{r}\right)$ и интегралы по переменным x и r в (3.9) являются комплексносопряженными, а их произведение – вещественным. Поэтому S_4 максимизируется при $\psi(\rho)$ = const. Если маска не соответствует форме объекта, но функции $M(\mathrm{x})$ и $u(\mathrm{r})$ центральносимметричны, то также возможна компенсация фазовых искажений. Этому условию удовлетворяют, например, функции резкости [26]

$$S_5 = \int_{\Omega_\rho} |\mathbf{x}|^2 I(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}, \tag{3.10}$$

$$S_6 = I(\mathbf{x}_0), \tag{3.11}$$

где $\mathbf{x}_0$ – точка в плоскости изображений. При когерентном освещении диффузного объекта с использованием маски $M(\mathrm{x}) = \langle I_0(\mathrm{x})\rangle$ условие максимизации S_4 получается путем функционального дифференцирования (3.8):

$$\psi(\rho) + \arg\varepsilon_1(\rho) + \arg\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\Omega} w(\rho_1)\, \varepsilon_1^*(\rho_1) \times\right.$$
$$\left.\times \exp\left\{-i\psi(\rho_1) - i\frac{\kappa}{R}(\rho_1 - \rho_2)\mathbf{r}\right\} u(\mathbf{r})\, d\mathbf{r}\, d\rho_1\right\} = 0. \tag{3.12}$$

Функция $\psi(\rho)$, являющаяся решением (3.12), в общем случае не приводит к компенсации фазовых искажений. Аналогичный результат при $M(\mathrm{x}) = \left|E\left(-\frac{R}{z}\mathrm{x}\right)\right|^2$ получается в случае когерентного освещения зеркального объекта

$$\psi(\rho) + \arg\varepsilon_1(\rho) + \arg\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\iint_{\Omega} w(\rho_1)\, \varepsilon_1^*(\rho_1) \times\right.$$
$$\left.\times \exp\left\{-i\psi(\rho_1) - \frac{i\kappa}{R}(\mathbf{r}_1\rho_1 - \mathbf{r}_2\rho)\right\} E(\mathbf{r}_1)\, E^*(\mathbf{r}_2)\, d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\rho_1.\right.$$

Функционал

$$S_7 = -\int_{\Omega_\rho} |I(\mathrm{x}) - I_0(\mathrm{x})|^2\, d\mathrm{x}, \tag{3.13}$$

характеризующий среднеквадратическое отклонение, выражается через функции резкости S_1 и S_4 [26], поэтому все сказанное выше относится и к нему. Для использования функции резкости S_4 необходима априорная информация о форме объекта. При ограниченном количестве априорной информации в [29] предлагается воспользоваться итерационным процессом, то есть по измеренной на $(\kappa - 1)$–м шаге интенсивности изображения $I_{\kappa-1}(\mathrm{x})$ сформировать оценочную маску $M_\kappa(\mathrm{x}) = I_{\kappa-1}(\mathrm{x})$ и использовать ее для максимизации на κ–м шаге функционала

$$(S_8)_\kappa = \int\limits_{\Omega_\rho} M_\kappa(\mathrm{x})\, I_\kappa(\mathrm{x})\, d\mathrm{x}, \tag{3.14}$$

Предполагается, что скорость и эффективность сходимости итерационного процесса зависит от количества априорной информации об объекте (оценки координат и формы объекта). Чем полнее информация об объекте, тем лучшие результаты дает данный алгоритм, и наоборот. Однако исследование сходимости итерационного процесса в [29] не проводилось.

Основная причина неудач при использовании известных функций резкости состоит в том, что рассеянное объектом излучение непригодно для измерения атмосферных фазовых флуктуации, так как распределение фазы объектного поля невозможно отличить от самих фазовых флуктуации. Для их разделения необходима дополнительная информация (аналогичная $M(\mathrm{x})$). В работе [30] в качестве дополнительной информации для адаптивного восстановления изображений используются поляризационные характеристики отраженных объектами световых полей. При освещении выпуклых обектов с шероховатой поверхностью линейнополяризованным когерентным излучением диаграммы отражения для согласованной и перекрестной поляризаций различны [31]. Если выпуклой точке объекта соответствует координата $\mathrm{r} = 0$, то в ней у согласованной компоненты отражения по интенсивности $u_{xx}(\mathrm{r})$ наблюдается максимум, а у перекрестной $u_{yy}(\mathrm{r})$ – минимум. Функция $Q(\mathrm{r}) = \dfrac{u_{xx}(\mathrm{r})}{Au_{yy}(r)}$ для объектов такого вида (например, сферы, эллипсоида или конуса) имеет характерный δ-образный пик при $\mathrm{r} = 0$. Компенсация фазовых искажений осуществляется путем максимизации функции резкости

$$S_9 = \frac{I_x(0)}{AI_y(0)}, \tag{3.15}$$

где $I_x(\mathrm{x})$ и $I_Y(\mathrm{x})$ – интенсивности изображений, полученных в различных поляризациях; A – отношение интегральных интенсивностей I_x, I_Y. Считается, что, если фазовые искажения отсутствуют, то функция резкости $S_9 = Q(0)$ принимает максимальное значение, т.к. имеет вид δ–образного пика. При наличии атмосферных искажений этот пик сглаживается, а его величина и «острота» характеризуют степень адаптивной компенсации искажений. К сожалению, алгоритм имеет серьезные недостатки: он пригоден для ограниченного класса выпуклых объектов, регистрация перекрестной составляющей 1_Y требует ввиду ее малости приемника с повышенной чувствительностью. Кроме того, работа с S_9 возможна только при сглаживании (усреднении) интенсивностей I_X и I_y, т.к. их спеклструктура различна [12].

4. Адаптивная по функциям резкости в спектре пространственных частот

Наряду с использованием масок в плоскости изображений можно применять маски и в Фурьеплоскости (спектр пространственных частот). Например, по аналогии с S_4 можно предложить

$$S_{10} = \left| \int\limits_{\Omega_\phi} M(\mathrm{f})\, F(\mathrm{f})\, d\mathrm{f} \right|^2, \tag{4.1}$$

где Ω_Φ – область регистрации Фурье-спектра изображений; f – пространственная частота; $M(\mathrm{f})$ и $F_0(\mathrm{f})$; $\mathrm{F(f)} = F_0(\mathrm{f})$ – соответственно искаженный и неискаженный пространственные спектры изображений. Нетрудно показать, что максимизация S_{10} приводит к компенсации фазовых искажений только при некогерентном освещении объектов. При недостаточном количестве априорной информации о спектре объекта $F_0(\mathrm{t})$ аналогично S_8 можно использовать итерационный алгоритм с функцией резкости

$$(S_{11})_\kappa = \left| \int\limits_{\Omega_\Phi} M_\kappa(\mathbf{f})\, F_\kappa(\mathbf{f})\, d\mathbf{f} \right|^2, \tag{4.2}$$

где на κ–м шаге используется оценочная маска $M_\kappa(\mathrm{f}) = F_{\kappa\text{-}j}(\mathrm{f})$.

Функции резкости S_{10} и S_{11} не используют тех преимуществ, которые дает переход к Фурьеплоскости. Необходимо отметить, что при некогерентном освещении в силу (2.9) Фурье-спектр будет иметь вид

$$F(\mathbf{f}) = \int\limits_{\Omega_\mathrm{p}} I(\mathbf{x}) \exp(2\pi i \mathbf{f}\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = F_0(\mathbf{f}) H(\mathbf{f});$$

$$F_0(\mathbf{f}) = \int\limits_{\Omega_\mathrm{p}} I_0(\mathbf{x}) \exp(2\pi i \mathbf{f}\mathbf{x} d\mathbf{x}); \tag{4.3}$$

$$H(\mathbf{f}) = S_0^{-1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} w(\boldsymbol{p})\, w(\boldsymbol{p} - z\lambda\mathbf{f}) \exp\left[i\psi(\boldsymbol{p}) - i\psi(\boldsymbol{p} - z\lambda\mathbf{f})\right] d\boldsymbol{p} - \tag{4.4}$$

атмосферно-линзовая оптическая передаточная функция (ОПФ). Из (4.3) видим, что искажения, входящие в $H(\mathrm{f})$, связаны со спектром не интегрально, как в изображении, а через произведение с $F_0(\mathrm{f})$. В работе [33] была предложена функция резкости

$$S_{12} = \frac{1}{|F_0(0)|^2} \left| F_0(\mathbf{f}_0)\, H(\mathbf{f}_0) \right|^2, \tag{4.5}$$

где f_0 – пространственная частота $0 < |\mathrm{f}_0| \le \frac{\rho_0}{z\lambda}$; (ρ_0 – радиус корреляции фазовых флуктуации поля $\varepsilon(\rho)$ за счет турбулентной атмосферы). Несложно показать, что абсолютный максимум функции (4.5) достигается при $\phi(\rho) - \phi(\rho - z\lambda\mathrm{f}_0) = \mathrm{const}$, т.е. выполняется условие (3.5). Действительно, атмосферно-линзовая ОПФ на частоте f_o максимальна при отсутствии фазовых возмущений [34].

В когерентном случае в силу (2.4) Фурье-спектр изображения будет представлять собой автокорреляцию поля

$$F(\mathbf{f}) = \int\limits_{\Omega_p} I(\mathbf{x}) \exp(2\pi i \mathbf{f}\mathbf{x}\, d\mathbf{x}) = S_0^{-1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} w(\rho)\, w(\rho - z\lambda\mathbf{f})\, \varepsilon_1(\rho)\, \varepsilon_1^*(\rho - z\lambda\mathbf{f}) \exp\left[i\phi(\rho) - i\phi(\rho - z\lambda\mathbf{f})\right] d\rho, \tag{4.6}$$

в результате чего функция резкости S_{12} максимизируется при

$$\arg \varepsilon_1(\rho) - \arg \varepsilon_1(\rho - z\lambda\mathrm{f}_0) + \phi(\rho) - \phi(\rho - z\lambda\mathrm{f}_0) = \mathrm{const}$$

т.е. выполняется условие (3.3), и изображение не восстанавливается.

Для восстановления изображений в когерентном случае в работе [35] предложено последовательно освещать объект за время «замороженности» атмосферы двумя когерентными волнами, в результате интерференции которых изображение объекта в отсутствие искажений было бы промодулировано пространственной гармоникой с частотой f_o, определяемой геометрией подсвета, и одиночной волной. Для адаптивной компенсации искажений используется функция резкости

$$S_{13} = \left| \int\limits_{\Omega_p} \frac{I_2(\mathbf{x}) + n_0}{I(\mathbf{x}) + n_0} \exp(2\pi i \mathbf{f}_0 \mathbf{x}\, d\mathbf{x}) \right|^2 \Big/ \left| \int\limits_{\Omega_p} \frac{I_2(\mathbf{x}) + n_0}{I(\mathbf{x}) + n_0}\, d\mathbf{x} \right|^2, \tag{4.7}$$

где $I_2(\mathrm{x})$ – интенсивность искаженного изображения при освещении двумя волнами:

$$I_2(\mathbf{x}) = \left| \int E(\mathbf{r}) \left(\exp(i\varphi_1 + i\pi\mathbf{f}_0\mathbf{r}) + \exp(i\varphi_2 - i\pi\mathbf{f}_0\mathbf{r})\right) g\left(\frac{\mathbf{r}}{R} + \frac{\mathbf{x}}{z}\right) \right|^2, \tag{4.8}$$

n_0 – аддитивная фоновая засветка. Несложно показать [35], что при малом n_0 абсолютный максимум S_{13} достигается при $g\left(\frac{\mathbf{r}}{R} + \frac{\mathbf{x}}{z}\right) = g_0\left(\frac{\mathbf{r}}{R} + \frac{\mathbf{x}}{z}\right)$ в направлении $\left(\frac{\mathbf{r}}{R} + \frac{\mathbf{x}}{z}\right) \parallel \mathrm{f}_0$.

Если освещать объект двумя парами когерентных волн, создающих две интерференционные картины во взаимно-ортогональных направлениях, то и фазовые флуктуации компенсируются в этих направлениях и выполняется условие $\psi(\rho) = \mathrm{const}$, что позволяет восстановить изображение.

5. Бейесовский адаптивный подход к задаче измерения и компенсации атмосферных фазовых искажений

Как известно, световой сигнал обычно является случайным. Это обусловлено случайностью искажений сигнала за счет неоднородностей атмосферы, квантовым характером регистрации излучения, собственными шумами приемников, наличием случайного внешнего фона и многими другими факторами. Поэтому, строго говоря, измерение и компенсация атмосферных фазовых искажений является статистической задачей, и для ее решения необходимо обращаться к статистической теории. Соответствующий подход был предложен Вальдом [36] и назван теорией статистических решений. Он основывается на оптимальном решении, называемом бейесовским и получаемом в результате минимизации среднего риска. Данный путь является чрезвычайно плодотворным при разработке оптимальных алгоритмов обработки сигналов [37] и успешно применяется для синтеза алгоритмов оптимальной обработки искаженных атмосферой световых полей (см., например, [38]).

Основная идея адаптивного бейесовского подхода, который подробно изложен в монографии [39], состоит в том, чтобы в условиях, априорной неопределенности на основе результатов наблюдения сформировать оценку среднего апостериорного риска и минимизировать эту оценку соответствующим выбором правила решения. В работах [29, 40–42] авторы применили данный подход к задаче компенсации атмосферных искажений $\varphi(\rho)$. Для случая параметрической зависимости апостериорного риска от совокупности параметров φ адаптивное бейесово правило решения сводится к нахождению оценок максимального правдоподобия $\hat{\varphi}$, зависящих от выборки наблюдаемой реализации δ. Выборка ε описывается последовательностью векторов ε_1, ..., ε_κ, наблюдаемых в моменты времени t_1, ..., t_K, то есть $\varepsilon = \{\varepsilon_1, ..., \varepsilon_\kappa\}$. Если обозначить через $P_\kappa(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\kappa | \varphi)$ функционал правдоподобия, включающий в себя информацию, полученную к моменту времени t_κ, то оценка максимального правдоподобия $\hat{\varphi}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\kappa)$ находится из уравнения

$$P_\kappa(\varepsilon_1, \dots \varepsilon_\kappa | \hat{\varphi}) = \max_{\varphi} P_\kappa(\varepsilon_1, \dots \varepsilon_\kappa | \varphi). \tag{5.1}$$

Аналогичное уравнение для логарифма функционала правдоподобия $L_\kappa(\varphi) = \ln P_\kappa(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\kappa | \varphi)$ имеет вид

$$L_\kappa(\hat{\varphi}) = \max_{\varphi} L_\kappa(\varphi) \tag{5.2}$$

При условии существования частных производных оценки максимального правдоподобия находятся из системы уравнений

$$\nabla\varphi\ L_\kappa(\varphi) = 0, \tag{5.3}$$

где $\nabla\varphi$ – оператор градиента по компонентам вектора φ. В большинстве интересных случаев решения системы (5.3) ввиду математической сложности не найдено. Поэтому часто ограничиваются приближенными, например, рекуррентными методами [29, 39–42]. При этом логарифм функционала праводоподобия представляют в виде

$$L_\kappa(\varphi) = L_{\kappa-1}(\varphi) + l_\kappa(\varphi)\ , \tag{5.4}$$

где $L_{\kappa-1}(\varphi) = \ln P_{K-1}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\kappa | \varphi)$ – логарифм функционала правдоподобия для совокупности данных наблюдения без последнего значения, а $L_\kappa(\varphi) = \ln P_K(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{\kappa-1}, \varphi)$ – логарифм условной плотности вероятности ε_κ при заданных значениях $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{\kappa-1}, \varphi$. Тогда из (5.3) получается

$$\nabla\varphi\ L_{\kappa-1}(\varphi) + \nabla\varphi\ L_\kappa(\varphi) = 0. \tag{5.5}$$

Если разложить левую часть уравнения (5.5) в ряд Тейлора в окрестности значения φ, соответствующего оценке на (k–1)-м шаге $\hat{\varphi}_{\kappa-1}$, и сохранить только линейные члены, то решение представится в виде

$$\hat{\varphi}_\kappa = \hat{\varphi}_{\kappa-1} + \mathrm{D}_k^{-1}\, z_k, \tag{5.6}$$

где

$$z_k = \nabla\varphi\ l_K(\hat{\varphi}_{\kappa-1}) = \{\, \partial\, l_\kappa(\hat{\varphi}_{\kappa-1}) \,/\, \partial\, \varphi_1, \ \dots,\ \partial\, l_\kappa(\hat{\varphi}_{\kappa-1} / \partial\, l_N \,\} \tag{5.7}$$

$$\mathrm{D}_\kappa = -\, \| \,\partial^2 L_{\kappa-1}(\hat{\varphi}_{\kappa-1}) / \partial\, \varphi_i \partial\, \varphi_j \,\| - \| \,\partial^2 l_\kappa(\hat{\varphi}_{\kappa-1}) / \partial\, \varphi_i \partial\, \varphi_j \,\|, \tag{5.8}$$

D_k – симметричная матрица; $\varphi_i = (i = 1, \dots N)$ – компоненты вектора φ.

При помощи данного подхода в работах [29, 42] находились оптимальные оценки атмосферных фазовых искажений при наблюдении точечных, протяженных пространственно-когерентных и пространст-венно-некогерентных объектов. Рассматривался случай когерентного во времени излучения. Для фазовых искажений $\varphi(\rho)$ в плоскости приемной апертуры использовалась следующая модель:

$$\varphi(\rho) = \sum_{n=1}^{N} \varphi_n\, \tilde{\boldsymbol{w}}_n(\rho - \rho_n^0), \ \tilde{\boldsymbol{w}}_n(\rho - \rho_n^0) = \begin{cases} 1 & \rho \in \Delta_n \\ 0 & \rho \notin \Delta_n, \end{cases} \tag{5.9}$$

где $\varphi_n = \varphi(\rho_n^0)$ могли принимать любые значения в областях $\Delta_n (n = 1, \dots N)$, на которые разбивалась приемная апертура. Оптимальная оценка фазовых искажений при наблюдении точечного объекта с координатой r_0 с точностью до $2\pi\ n_1$ (n_1 – целое) равна

$$\varphi_n = \arg\, \varepsilon_n, \tag{5.10}$$

где

$$\varepsilon_n = \frac{A_{\text{т}}}{2N_0}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{w}_n(\rho - \rho_n^0) G^*(\mathbf{r}_0 - \rho)\,\varepsilon(\rho)\, d\rho,$$

$$\varepsilon(\rho) = \int_0^T \varepsilon(\rho,\ t)\exp(i\omega t)\, dt,$$

$\varepsilon(\rho,\ t)$ – поле на приемной апертуре; $\varepsilon(\rho,\ t) = \varepsilon_c(\rho,\ t) + n(\rho,\ t)$; $n(\rho,\ t)$ – аддитивный шум, являющийся случайным δ-коррелированным по пространству и времени процессам с нулевым средним; N_0 – мощность шума; T – интервал наблюдения; A_{T} – амплитуда поля точечного источника; $\varepsilon_c(\rho,\ t)$ и $G(r-\rho)$ определяется согласно (2.1) и (2.3). Для случая объекта с зеркальной поверхностью (пространственно-когерентное рассеянное поле) оптимальная оценка также определяется соотношением (5.10), где

$$\varepsilon_n = \frac{A_0}{2N_0}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{w}_n(\rho - \rho_n^0)\,\varepsilon_0^*(\rho)\varepsilon(\rho)\, d\rho;\ \ \varepsilon_0(\rho) = \int_{\Omega} E(\mathbf{r})\, G(\mathbf{r}-\rho)\, d\mathbf{r};$$

A_{O} – амплитуда падающего на зеркальный объект излучения. Смысл этих результатов очень прост: оптимальная оценка фазовых искажений равна разности фаз наблюдаемого и объектного полей, усредненной по интервалу наблюдения и площадке Δ_n, т.е. для измерения искажений объектного поля необходимо провести его согласованную фильтрацию. Таким образом, для оценки искажений $\varphi(\rho)$ необходимо знать форму объекта $E(\mathrm{r})$, то есть в условиях отсутствия априорной информации об объекте наблюдения- оценка (5.10) малоэффективна. На основе полученного результата авторами [29] была предложена функция резкости для адаптивной обработки поля

$$S_{14} = \Big| \int^{\infty} w(\rho)\ \varepsilon_1(\rho)\varepsilon_1^*(\rho)\exp(i\psi(\rho))\, d\rho \Big|^2, \tag{5.11}$$

имеющая смысл пропускания объектного поля через согласованный фильтр с пропусканием $T(\rho) \sim \overset{*}{\varepsilon}_1(\rho)$ при подстройке фазы поля $\varepsilon_1(\rho)e^{i\varphi(\rho)}$. Очевидно, что максимизация S_{14} происходит при

$$\arg \varepsilon_1(\rho) + \phi(\rho) - \arg \varepsilon_1(\rho) = \text{const, т.е. при } \phi(\rho) = \text{const}.$$

Очевидно также, что необходимость знания при этом формы объекта $E(\mathrm{r})$ делает использование функции резкости S_{14} малоинтересным. В условии априорной неопределенности в работе [29] предложено пользоваться итерационным алгоритмом, аналогичным (3.14) для плоскости изображений: по измеренному на (к–l)-м шаге полю $\varepsilon_{1\,\kappa-1}(\rho)$ сформировать оценку согласованного фильтра $T_\kappa(\rho) \sim \overset{*}{\varepsilon}_{k-1}(\rho)$ для максимизации функции резкости на κ–м шаге:

$$(S_{15})_\kappa = \Big| \int_{-\infty}^{\infty} w(\rho)\ \varepsilon_{1\kappa}(\rho)\varepsilon_{\kappa-1}^*(\rho)\, e^{i\psi(\rho)}\ d\rho \Big|^2. \tag{5.12}$$

Предполагается, что чем ближе оценка $T_\kappa(\rho)$ к истинному распределению $\overset{*}{\varepsilon}_1(\rho)$ тем лучше работает алгоритм, однако столкновение сходимости (5.12) не проводилось.

В работе [43] была предложена функция резкости S_{16} типа (5.11), в которой вместо $\overset{*}{\varepsilon}_1(\rho)$ используется опорная волна с плоским фронтом $\varepsilon^{0*}(\rho) = b_0 e^{-i\frac{\kappa}{R}\mathbf{r}_0\rho}$, где b_0 – амплитуда волны:

$$S_{16} = b_0^2 \Big| \int_{-\infty}^{\infty} w(\rho)\ \varepsilon_1(\rho)\, e^{-i\frac{\kappa}{R}\mathbf{r}_0\rho + i\psi(\rho)}\, d\rho \Big|^2. \tag{5.13}$$

Очевидно, что максимизация S_{16} приводит не к компенсации атмосферных искажений, а к условию типа (3,3), где $b = \frac{\kappa}{R}\mathrm{r}_0$; $a = 0$. В случае объекта с шероховатой поверхностью (пространственно-некогерентное поле) оценки в явном виде получить не удалось, и из (5.5÷5.8) была найдена следующая рекуррентная формула

$$\hat{\varphi}_{n\kappa} = \hat{\varphi}_{n,\kappa-1} - \frac{4(\lambda R)^2 N}{\kappa T_0^2 S_0 \int_{\Omega} V(\mathbf{r})\, u(\mathbf{r})\, d\mathbf{r}} \int_{\Omega} V(\mathbf{r})\,\mathrm{Re}\Big[i \sum_{m \neq n}^{N} \exp(i\hat{\varphi}_{m,\kappa-1})\, \overset{*}{\varepsilon}_{m\kappa}(\mathbf{r}) \exp(-i\hat{\varphi}_{n,\kappa-1})\, \varepsilon_{n\kappa}(\mathbf{r})\Big]\, d\mathbf{r}, \tag{5.14}$$

где индекс κ отвечает интервалу наблюдения $(\kappa - 1)\, T_0 \div \kappa\, T_0$; $T_0 = T / N_1$; N_1 – число интервалов наблюдения, индекс n соответствует области Δ_n

$$V(\mathbf{r}) = \frac{u(\mathbf{r})}{2N_0^2\,[1 + T_0 u(\mathbf{r})/4N_0]}\ ;$$

$$\varepsilon_{n\kappa}(\mathbf{r}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{\tilde{w}}_n(\rho - \rho_n^0)\,\varepsilon_{0\kappa}(\rho) G^*(\mathbf{r} - \rho)\,d\rho, \qquad \varepsilon_{0\kappa}(\rho) = \int\limits_{(\kappa-1)T_0}^{\kappa T_0} \varepsilon(\rho,\ t)\,e^{i\omega t}\,dt.$$

Эта формула была получена в предположении, что выполняется одно из условий $M_0 \gg N$ или $M_0 \ll N$, где M_0 – число элементов оптического разрешения объекта при отсутствии атмосферных фазовых искажений, то есть тогда, когда фазовые искажения и объектная волна имеют разные длины характерного изменения. Для наиболее интересного случая $M_0 \sim N$ окончательный результат получен не был. Применение рекуррентного соотношения (5.14) не является универсальным также по следующим причинам. Во-первых, нужно знать форму объекта, т.е. функцию $u(\mathrm{r})$. Во-вторых, в [29, 40–42] не были исследованы вопросы сходимости решения (5.14) и выбора нулевой оценки фазовых искажений $\hat{\varphi}_{n_0}$, хотя, как нетрудно заметить, в ряде случаев использование данной формулы неэффективно. Например, в случае малых шумов для нулевой оценки $\hat{\varphi}_{n_0} = 0 (n = 1, \ldots, N)$ второй член в правой части (5.14) пропорционален

$$z_{n1} \sim \int\limits_{\Omega} \mathrm{Re}\Big[i \sum_{m \neq n}^{N} \overset{*}{\varepsilon}_{m\kappa}(\mathbf{r})\,\varepsilon_{n\kappa}(\mathbf{r})\Big]\,d\mathbf{r} \sim \sum_{m \neq n}^{N} \int\limits_{\Omega} \mathrm{Re}\Big[i e^{i\varphi_n - i\varphi_m} \times$$

$$\times \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{w}_n(\rho_1 - \rho_n^0)\,\tilde{w}_m(\rho_2 - \rho_m^0)\,\varepsilon(\rho_1)\,\varepsilon^*(\rho_2)\,G^*(\mathbf{r} - \rho_1)\,G(\mathbf{r} - \rho_2)\,d\rho_1 d\rho_2\Big]\,d\mathbf{r}.$$

Итак, если:

1) приемная апертура разбита на субапертуры одинаковой формы, т.е. где $\tilde{\omega}_m(\rho) = \tilde{\omega}_n(\rho) = \tilde{\omega}(\rho)$;

2) центры субапертур ρ_n^0 образуют периодическую решетку с векторами трансляции C_1 и C_2;

3) функция $\varepsilon(\rho)\exp\big(-\frac{i\kappa}{2R}|\rho|^2\big) \equiv \varepsilon'(\rho)$ вещественна, имеет периоды C_1 и C_2;

4) область Ω центрально-симметрична, то для фазовых искажений $\varphi_n = \pi n$ получим

$$z_{n1} \sim \sum_{m \neq n}^{N} \cos\pi(n - m)\,\mathrm{Re}\Big\{ i \int\limits_{\Omega} \Big[\iint\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{w}(\rho_1 - \rho_n^0)\,\tilde{w}(\rho_2 - \rho_m^0)\,\varepsilon(\rho_1)\,\varepsilon^*(\rho_2 + p_m^0 - p_n^0) \times$$

$$\times \exp\Big[-\frac{i\kappa}{2R}|\rho_1|^2 + \frac{i\kappa}{2R}|\rho_2 + \rho_m^0 - \rho_n^0|^2 + \frac{i\kappa}{R}\mathbf{r}(\rho_1 - \rho_2)\Big]\,d\rho_1 d\rho_2\Big]\,\exp\Big(\frac{i\kappa}{R}\mathbf{r}(\rho_n^0 - \rho_m^0)\Big)\,d\mathbf{r}\Big\} \sim$$

$$\sim \sum_{m \neq n}^{N} \cos\pi(n - m)\,\mathrm{Re}\Big\{ \int\limits_{\Omega} d\mathbf{r}\,\Big| \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{w}(\rho - \rho_n^0)\,\varepsilon'(\rho)\exp\Big(i\frac{\kappa}{R}\mathbf{r}\rho\Big)\,d\rho\Big|^2 \sin\Big[\frac{\kappa}{R}\mathbf{r}(\rho_n^0 - \rho_m^0)\Big]\Big\} = 0,$$

так как при вещественном $\varepsilon'(\rho)$ подынтегральное выражение представляет произведение четной и нечетной функций. В этом случае соотношение (5.14) дает неправильную оценку $\hat{\varphi}_{n1} = \ldots = \hat{\varphi}_{nk} = 0$. Построим теперь описывающую диффузный объект функцию $E(\mathrm{r})$, удовлетворяющую условиям «3» и «4». В силу периодичности $\varepsilon'(\rho)$ должно выполняться

$\int\limits_{\Omega} E(r)\exp\Big[i\frac{\kappa}{2R}(|r|^2 - 2\mathbf{r}\rho)\Big]\Big[\exp\Big(i\frac{\kappa}{R}\mathbf{r}(\mathbf{C}_1 n_1 + \mathbf{C}_2 n_2)\Big) - 1\Big]d\mathbf{r} = 0$, т.е. можно взять $E(\mathrm{r})$ в виде совокупности блестящих точек с координатами $\mathrm{r}_{n1,n2,n3}$, для которых $(C_1 n_1 + C_2 n_2) = \lambda R n_3$ (n_1, n_2, n_3 – целые). Из условия «4» все точки должны лежать в пределах произвольной центрально-симметричной области Ω. Вещественность $\varepsilon'(\rho)$ накладывает условия на амплитуды $A(-\mathrm{r}) = A(\mathrm{r})$ и фазы $\alpha(-\mathrm{r}) = -\alpha(\mathrm{r}) - \frac{\kappa}{R}|\mathrm{r}|^2$ отдельных блестящих точек. Итак, мы построим класс диффузных объектов, для которых применение соотношения (5.14) не является эффективным даже при наличии априорной информации о виде функции $u(\mathrm{r})$.

На основе формулы (5.14) было предложено проводить адаптацию по функции резкости

$$S_{17} = \int\limits_{\Omega_\rho} V\Big(-\frac{R}{z}\mathbf{x}\Big)\Big|\int\limits_{-\infty}^{\infty} w(\rho)\,\varepsilon(\rho)\,G(\mathbf{x} - \rho)\,d\rho\Big|^2 d\mathbf{x}, \qquad (5.15)$$

где $V\left(-\frac{R}{z}\,\mathrm{x}\right)$ изображение маски $V(\mathrm{r})$. Нетрудно увидеть, что (5.15) является обобщением (3.8) на случай существования шума и конечного времени регистрации, а при $N_0 \to 0$, $T \to \infty$ $V\left(-\frac{R}{z}\,\mathrm{x}\right) \to u\left(-\frac{R}{z}\,\mathrm{x}\right)$. Поэтому к S_{17} применимы те же выводы, которые сделаны для S_4.

Таким образом, несмотря на большую научную ценность работ [29, 40–42] по применению адаптивного бейесовского подхода к задаче измерения и компенсации атмосферных фазовых искажений, применение полученных результатов в реальных адаптивных системах в условиях отсутствия априорной информации несколько ограничено.

6. Адаптивная подстройка уходящей волны

Как ранее было показано, рассеянное неизвестным протяженным объектом излучение непригодно для измерения атмосферных фазовых флуктуации, так как распределение фазы объектного поля невозможно отличить от самих фазовых флуктуации. Поэтому возникает желание искусственно построить на объекте некоторую известную опору (например, точку), по которой затем можно компенсировать искажение объектного поля.

Для адаптивного формирования на объекте опорной точки («маяка») возможно применение многократного переизлучения [6]. При этом передающая апертура каждый раз переизлучает поле, комплексно сопряженное принимаемому полю. После первого переизлучения на зеркальном (или имеющем зеркальные области) объекте формируется поле

$$E'(\mathbf{r}) = \int\limits_{\Omega}\int\limits_{-\infty}^{\infty} w(\rho)\,E^*(\mathbf{r}_1)\,G(\mathbf{r}_1-\rho)\;G(\mathbf{r}-\boldsymbol{p})\,d\mathbf{r}_1 d\rho \sim \int\limits_{\Omega} E^*(\mathbf{r}_1)\,g_0(\mathbf{r}_1-\mathbf{r})\,d\mathbf{r}_1 \sim E^*(\mathbf{r}),$$

а после n циклов – поле, пропорциональное $|E(\mathrm{r})|^{2n}$. Если на объекте есть наиболее яркий участок, то на нем после нескольких циклов сформируется опорная точка. Если одинаково ярких областей несколько, то место фокусировки излучения определяется флуктуациями.

Данный метод обладает рядом существенных недостатков. Он предназначен для работы с объектами, имеющими достаточно «яркие» зеркальные участки. Если их несколько и «яркость» их соизмерима, то число циклов n резко увеличивается, что ведет к большим временным затратам. Если объект диффузный, то зеркальных участков нет, и чтобы сконцентрировать излучение на участке с наибольшим коэффициентом отражения, потребуется бесконечное число переотражений.

Чтобы сформировать опорную «точку» на объекте, во многих работах предлагалось подвергать адаптивной обработке уходящую волну, заранее компенсируя те искажения, которым она подвергается в атмосфере на пути к объекту. Если на выходе освещающей апертуры распределение волнового фронта известно (например, плоский фронт), то адаптивное формирование «яркого» пятна на объекте будет означать, что суммарное распределение фазы после прохождения адаптивного элемента и атмосферы подчиняется условию

$$\psi(\rho) = a + \mathrm{b}\rho.$$

Прием отраженного поля через зафиксированный адаптивный элемент при подсвете объекта обычным образом приведет к тому, что фазовые атмосферные искажения будут скомпенсированы, и можно построить изображение. Вся сложность данного подхода состоит в том, чтобы сформировать данную «точку» или пятно по какому-либо критерию. Для этого также используются функции резкости.

В работе [29], взяв за основу функции (3.8) или (5.15), авторы предложили в качестве маски $M(\mathrm{x})$ использовать круглую диафрагму, диаметр которой примерно равен размеру изображения потенциально возможного сформированного «яркого» пятна на объекте в точке r_0:

$$S_{18} = \int\limits_{\Omega_p} \tilde{w}(\mathbf{x}) \left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} w(\rho) \int\limits_{-\infty}^{\infty} w_0(\rho')\,\varepsilon(\rho')\exp\left[i\psi(\rho) + i\phi(\rho')\right] G(\rho-\mathbf{x})\,d\rho' d\rho \right|^2 d\mathbf{x}, \tag{6.1}$$

где

$$w_0(\rho') = \begin{cases} 1 & \rho' \in \Omega_{\text{пер}}, \\ 0 & \rho' \notin \Omega_{\text{пер}}. \end{cases}$$

$$w(\mathrm{x}) = \begin{cases} 1 & \mathrm{x} \in g_0\left(-\frac{R}{z}\,\mathrm{x}_0\right), \\ 0 & \mathrm{x} \notin g_0\left(-\frac{R}{z}\,\mathrm{x}_0\right). \end{cases}$$

Уходящее поле, естественно, предполагается когерентным во времени. Считая, что $\omega(x) \to \delta\left(-\frac{R}{z}x_0\right)$, несложно показать, что произведение интегралов в (6.1) по Ω_0 и Ω_ρ

$$S_{18} = \frac{1}{2}(\lambda^2 R z)^{-2} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int w(\rho_1)\, w(\rho_2) \exp\left[i\psi(\rho_1) - i\psi(\rho_2)\right] \times$$

$$\times \int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega} E(\mathbf{r}_1)\, E^*(\mathbf{r}_2)\, z(\mathbf{r}_1)\, z^*(\mathbf{r}_2)\, G(\mathbf{r}_1 - \rho_1)\, G^*(\mathbf{r}_2 - \rho_2)\, d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2$$

$$\int\limits_{\Omega_\rho} w(\mathbf{x})\, G(\rho_1 - \mathbf{x})\, G^*(\rho_2 - \mathbf{x})\, d\mathbf{x}\, d\rho_1 d\rho_2, \tag{6.2}$$

где

$$z(\mathbf{r}) = \frac{1}{\lambda R}\int\limits_{-\infty}^{\infty} w_0(\rho')\, \exp\left[i\psi(\rho')\right] G(\rho' - \mathbf{r})\, d\rho' \tag{6.3}$$

является вещественным при $E(r_1)Z(r_1)E^*(r_2)Z^*(r_2) \to g_0(r - r_0) \to \delta(r - r_0)$, т.е. при $\psi(p') = \mathrm{const}$, и при этом значении в результате максимизируется S_{18}. Если объект диффузный и при адаптации мы можем усреднять результат по его микроструктуре, то вместо двойного интеграла по Ω в (6.2) в силу (2.8) получим $\int\limits_{\Omega} u(\mathbf{r})\,|Z(\mathbf{r})G(\mathbf{r} - \rho_1)\, G^*(\mathbf{r} - \rho_2)|^2 d\mathbf{r}$, что практически не меняет ситуацию. Таким образом, адаптивная фокусировка уходящей волны на объекте приводит к построению изображения объекта.

Мы здесь упомянули возможность усреднения регистрируемой интенсивности отраженного поля по микроструктуре объектов с шероховатой поверхностью. Такое усреднение желательно из-за того, что при перестройке уходящей волны функция $Z(r)$ засвечивает различные участки поверхности объекта, что приводит к случайной перестройке спекл-структуры отраженного поля (т.е. его изменения зависят не только непосредственно от $\exp[i\psi(\rho')]$, но также и от самой поверхности объекта) . Однако прямое усреднение результата измерения интенсивности по объекту не всегда возможно из-за временных ограничений (времени «замороженности» атмосферы). Авторы работ [45÷47] предложили использовать саму спекл-структуру поля в качестве критерия для адаптивной обработки. Как отмечалось в работах [45, 47], применение подобных критериев возможно при разделении спекл-структуры, образованной за счет шероховатой поверхности, от той, что создана турбулентной атмосферой. При выполнении условия изопланатичности объекта (2.3) в плоскости входного (или выходного) зрачка оптической системы будем регистрировать интенсивность

$$I(\rho) = |\varepsilon(\rho)|^2 = \frac{1}{(\lambda R)^2}\left|\int\limits_{\Omega} E(\mathbf{r})\, Z(\mathbf{r})\, G(\mathbf{r} - \rho)\, d\mathbf{r}\right|^2, \tag{6.4}$$

Статистические характеристики которой при условии (2.8) будут равны

$$\langle I(\rho)\rangle = \frac{1}{(\lambda R)^2}\int\limits_{\Omega} u(\mathbf{r})\,|Z(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r};$$

$$\sigma_I^2 = \frac{1}{(\lambda R)^4}\left|\int\limits_{\Omega} u(\mathbf{r})\,|Z(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r}\right|^2, \tag{6.5}$$

где $\langle I(\rho)\rangle$ – среднее значение, а σ_I^2 – дисперсия $I(\rho)$. Из (6.5) ясно, что, взяв за функцию резкости $\langle I(\rho)\rangle$ либо σ_I^2 (например, σ_I^2),

$$S_{19} = \left|\int\limits_{\Omega} u(\mathbf{r})\,|Z(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r}\right|^2, \tag{6.6}$$

или

$$S_{19} = \left|\int\limits_{\Omega} u(\mathbf{r})\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} w_0(\rho')\, e^{i\psi(\rho')} G(\rho' - \mathbf{r})\, d\rho'\right|^2 d\mathbf{r}\right|^2,$$

видим, что она достигает максимума при $u(r) = |Z(r)|^2$, т.е. когда вся световая энергия попадает на объект. Учитывая, что основную роль в формировании изображений играет фаза [13], нетрудно увидеть, что при этом $\psi(\rho')$ подчиняется условию

$$\psi(\rho') + \arg\int\limits_{\Omega} u(\mathbf{r})\, G(\mathbf{r} - \rho)\, d\mathbf{r} = 0, \tag{6.7}$$

т.е. компенсации атмосферных искажений не происходит. Другой статистический критерий — это радиус пространственных корреляций $\rho_к$ интенсивности $I(\rho)$ или средний размер спекла в распределении интенсивности. Взяв его за функцию резкости, получим, согласно [45]

$$S_{20} = \frac{\left(\int_\Omega u^2(\mathbf{r})\,|Z(\mathbf{r})|^4\,d\mathbf{r}\right)^{1/2}}{\int_\Omega u(\mathbf{r})\,|Z(\mathbf{r})|^2\,d\mathbf{r}}. \tag{6.8}$$

Так как числитель (6.8) пропорционален S_{12}, а знаменатель S, то, очевидно, увеличение S_{20} будет происходить при уменьшении области Ω, что возможно лишь при уменьшении области формирования (фокусировке) $Z(\mathrm{r})$. Таким образом, максимум S_{20} возможен при

$$\int_{-\infty}^{\infty} w_0(\rho)\,e^{i\phi(\rho)}\,G(\rho-\mathbf{r})\,d\rho = g_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0),$$

ширина которой много меньше Ω. Это означает выполнение условия компенсации атмосферных искажений $\psi(\rho') = \mathrm{const}$.

В работах тех же авторов [45, 46] были предложены так называемые интерференционные критерии (функции резкости), описывающие взаимодействие уходящей и отраженной от объекта волн:

$$S_{21} = \left|\int_{-\infty}^{\infty} w(\rho)\,\varepsilon^0(\rho)\,\varepsilon^*(\rho)\,e^{i\psi(\rho)}\,d\rho\right|^2, \tag{6.9}$$

где $\varepsilon_0(\rho)$ — уходящая на объект волна, $\omega(\rho) \equiv \omega_0(\rho)$ (идентичность приемной и передающей апертур). Ясно, что при наличии какой-либо информации об объекте S_{21} перерастает в итерационный алгоритм (5.11), в одном пределе которого (при полной информации об объекте $E(\mathrm{r})$) S_{21} эквивалентна S_{14}, а в другом (при отсутствии информации) — эквивалентна S_{16}. Очевидно, те же результаты получатся, когда в S_{21} вместо квадрата модуля будут Re J или Im J (J — интеграл по $d\rho$ в (6.9).

Как обобщение (6.9) [45–47] был предложен так называемый спектральный критерий:

$$J_3 = \iint_{-\infty}^{\infty} w(\rho_1)\,w(\rho_2)\,\varepsilon^0(\rho_1)\,\varepsilon^*(\rho_2)\exp\left[i\psi(\rho_1) - i\psi(\rho_2)\right]\tilde{M}(\rho_1-\rho_2)\times$$
$$\times\, d\rho_1 d\rho_2 = \int_{\Omega_p} F^0(\mathrm{x})\,F^*(\mathrm{x})\,m(\mathrm{x})\,d\mathrm{x} = \mathrm{const}, \tag{6.10}$$

где

$$F^0(\mathrm{x}) = F\{w(\rho)\,\varepsilon^0(\rho)\exp i\psi(\rho)\};\quad F(\mathrm{x}) = F\{w(\rho)\,\varepsilon(\rho)\exp i\psi(\rho)\},$$

F — оператор преобразования Фурье, $\tilde{M}(\rho_1 - \rho_2)$ — некоторая весовая функция, $m(\mathrm{x})$ — Фурье образ $\tilde{M}(\rho_1 - \rho_2)$. Поскольку при неизвестном объекте ни $\tilde{M}(\rho_1 - \rho_2)$, ни $m(\mathrm{x})$ не известны, чаще всего пользуются аппроксимацией $\tilde{M}(\rho_1 - \rho_2) = \delta(\rho_1 - \rho_2)$; $m(\mathrm{x}) = 1$. В этом случае, учитывая, что $F^0(\mathrm{x}) \sim E^0(\mathrm{x})$; $F(\mathrm{x}) \sim E(\mathrm{x})$, можно составить "спектральную" функцию резкости в виде

$$S_{22} = \int_{\Omega_p} E^0(\mathrm{x})\,E^*(\mathrm{x})\,d\mathrm{x}. \tag{6.11}$$

Несложно показать, что

$$S_{22} = \frac{1}{2}(\lambda^2 Rz)^{-2}\iint_{-\infty} w(\rho_1)\,w(\rho_2)\exp\left[i\psi(\rho_1) - i\psi(\rho_2)\right]\times$$
$$\times\int_\Omega E^*(\mathbf{r})\exp\left(-i\frac{\kappa}{R}\mathbf{r}\rho_1\right)d\mathbf{r}\int_{\Omega_p} E^0(\mathrm{x})\exp\left(i\frac{\kappa}{z}\mathrm{x}\rho_2\right)d\mathrm{x}\,d\rho_1 d\rho_2, \tag{6.12}$$

откуда ясно, что условие компенсации атмосферных искажений достигается либо при условии идентичности $E^0(\mathrm{x})$ и $E(\mathrm{r})$, что аналогично априорному знанию $E(\mathrm{r})$, либо при условии центральной симметрии $E^0(\mathrm{x})$ и $E(\mathrm{r})$, что существенно сужает класс исследуемых объектов (зеркальных). Возможны варианты S_{22}: рекуррентный алгоритм S_{23}, аналогичный (3.8), (4.2) и (5.12),

$$(S_{23})_\kappa = \int_{\Omega_p} E_\kappa^0(\mathrm{x})\, E_\kappa^*(\mathrm{x})\, d\mathrm{x}, \tag{6.13}$$

где $E_\kappa^0(\mathrm{x}) = E_{\kappa-1}(\mathrm{x})$.

Когда объект диффузный, то, как упоминалось выше, при фазовой модуляции уходящей волны на процесс адаптации оказывает вредное воздействие случайная, перестройка спекл-структуры поля. Поэтому в тех же работах [45÷47] было предложено вместо S_{21} … S_{23} использовать их средние значения по ансамблю реализаций:

$$S_{24} = \langle S_{21} \rangle = \iint_{-\infty} w(\rho_1)\, w(\rho_2)\, \varepsilon^0(\rho_1)\, \varepsilon^{0*}(p_2) \langle \varepsilon^*(\rho_1)\, \varepsilon(\rho_2) \rangle \exp\,[i\psi(\rho_1) - i\psi(\rho_2)]\, d\rho_1 d\rho_2; \tag{6.14}$$

$$S_{25} = \langle |S_{22}|^2 \rangle = \int_{\Omega_p} \int_{\Omega_p} E(\mathrm{x}_1)\, E_0^*(\mathrm{x}_2) \langle E^*(\mathrm{x}_1)\, E(\mathrm{x}_2) \rangle\, d\mathrm{x}_1 d\mathrm{x}_2. \tag{6.15}$$

Несложно показать, что

$$S_{26} = \frac{1}{2} (\lambda^2 R z)^{-2} \iint_{-\infty}^{\infty} w(\rho_1)\, w(\rho_2) \exp\,[i\psi(\rho_1) - i\psi(\rho_2)] \times$$
$$\times \int_{\Omega_p} \int_{\Omega_p} E^0(\mathrm{x}_1)\, E^{0*}(\mathrm{x}_2) \exp\left[i \frac{\kappa}{z} (\mathrm{x}_1\rho_1 - \mathrm{x}_2\rho_2)\right] d\mathrm{x}_1 d\mathrm{x}_2 \times$$
$$\times \int_\Omega u(\mathbf{r}) \exp\left[i \frac{\kappa}{R} \mathrm{r}\, (\rho_1 - \rho_2)\right] d\mathrm{r}\, dp_1 dp_2, \tag{6.16}$$

и ее максимизация, приводящая к компенсации атмосферных искажений $\psi(\rho) = \mathrm{const}$, достигается лишь при условии

$$\arg \varepsilon_1^0(\rho) - \arg(\varepsilon^0)(\rho) - \arg \int_\Omega u(\mathbf{r}) \exp\left(i \frac{\kappa}{R} \mathrm{r}\rho\right) d\mathbf{r} = 0,$$

т.е. когда имеется априорная информация о форме объекта. Функция резкости S_{24}, очевидно, полностью эквивалентна S_4.

Формирование искусственной «опоры» на объекте помогает отличить распределение фазы объектного поля от фазовых искажений, когда эта «опора» почти не зависит от формы объекта. Для этого и стараются сфокусировать уходящую волну в «яркое» пятно, ширина которого гораздо меньше области Ω. Здесь, однако, существует ряд ограничений, определяемых потенциально возможной расходимостью уходящей волны и расстоянием до объекта, в результате чего формирование опорной точки на поверхности удаленного объекта вырастает в довольно сложную проблему.

Создать «опору» можно и другим путем, например, последовательно за время замороженности атмосферы подсветив объект полем с известным распределением комплексной амплитуды $\varepsilon^1(\rho)$ и обычной плоской волной $\varepsilon_0(\rho)$ [48]. При отсутствии атмосферных искажений в плоскости изображений последовательно получим

$$E(\mathrm{x})|^2 |Z^1(\mathrm{x})|^2 \ \text{и}\ |E(\mathrm{x})|^2, \ \text{где}\ Z^1(\mathrm{x}) = \frac{1}{\lambda z} \int_{-\infty}^{\infty} w(\rho)\, \varepsilon^1(p)\, G(\rho - \mathrm{x})\, d\rho.$$

Частное от деления будет равно $|Z^1(\mathrm{x})|^2$ и от формы объекта зависеть не будет. Таким образом, функция $|Z^1(\mathrm{x})|^2$ может служить критерием адаптивной компенсации искажений. Соответствующая функция резкости имеет вид

$$S_{27} = \int_{\Omega_p} \frac{1}{|Z^1(\mathrm{x})|^2 + n_0} \cdot \frac{\left| \int_\Omega E(\mathbf{r})\, Z_\Psi^1(\mathbf{r})\, g_1\left(\frac{\mathbf{r}}{R} + \frac{\mathrm{x}}{z}\right) d\mathbf{r} \right|^2 + n_0}{\left| \int_\Omega E(\mathbf{r})\, g_1\left(\frac{\mathbf{r}}{R} + \frac{\mathrm{x}}{z}\right) d\mathbf{r} \right|^2 + n_0}\, d\boldsymbol{x}, \tag{6.17}$$

где

$$Z_{\Psi}^{1}(\mathbf{r})=\frac{1}{\lambda R}\int_{-\infty}^{\infty} w(\rho)\,\varepsilon^{1}(\rho)\,e^{i\psi p}\,G(\rho-\mathbf{r})\,d\rho.$$

Так как

$$g_1\left(\frac{\mathbf{r}}{R}+\frac{\mathbf{x}}{z}\right)=\frac{1}{S_0}\int_{-\infty}^{\infty} w(\rho)\exp\left[i\psi(\rho)+i\kappa\left(\frac{\mathbf{r}}{R}+\frac{\mathbf{x}}{z}\right)\rho\right]dp,$$

то при условии малости фона n_0 абсолютный максимум достигается, когда второй сомножитель под интегралом по dx равен $|Z^1(x)|^2$, что возможно лишь при условии $\psi(x)$ = const, т.е. при компенсации атмосферных искажений. Таким образом, функция резкости является универсальной для случая когерентного освещения объекта и позволяет скомпенсировать атмосферные искажения без априорной информации о его форме.

7. Методы поиска максимума функции резкости

В предыдущих разделах было показано, что задача формирования неискаженных изображений сводится к реализации абсолютного максимума перечисленных функций резкости. Самый простой способ нахождения абсолютного максимума состоит в последовательной переборке всех возможных состояний адаптивного элемента. Однако число этих состояний слишком велико. Например, если элемент состоит из 10 отдельных субапертур, и каждая субапертура может принимать 10 различных положений (сдвиг от 0 до 2π с дискретом $\pi/5$), то общее число возможных состояний равно 10^{10}. Тогда для работы адаптивного элемента, в реальном масштабе времени нужно будет измерять интенсивность отраженных сигналов за время, меньшее 10^{-10} $t_3 \sim 10^{-13}$ с, где t_3 ~ 10^{-3} с – время «замороженности» атмосферы. Такие измерения нереальны по энергетике и быстродействию. Поэтому стараются использовать другие, более быстрые пути поиска абсолютного максимума [26–28]. При этом, однако, приходится часто сталкиваться с проблемой вторичных экстремумов. В работе [49] Мартин показал, что при фазовых искажениях, превышающих вдоль апертуры 0,357 π (при наблюдении через атмосферу это условие практически всегда выполняется), функционал S_1 имеет вторичные максимумы. Если функция резкости имеет вторичные экстремумы, то при поиске ее максимума можно прийти не к абсолютному максимуму, а к локальному. Так как при отсутствии априорной информации об объекте нельзя различить, какой максимум функции резкости найден – абсолютный или локальный, то нельзя с достоверностью определить, скомпенсированы атмосферные фазовые искажения адаптивным устройством или нет. Поэтому если функция резкости имеет вторичные экстремумы, то восстановление изображений является проблематичным.

Наиболее простыми известными способами поиска максимума .[26, 50] являются следующие:

1). Поочередно вносятся различные фазовые возмущения для одной из субапертур при неизменных положениях всех остальных, для нее находится и запоминается оптимальный фазовый сдвиг, дающий максимум функции резкости; далее эта субапертура возвращается в нулевое положение, а после опроса всех субапертур все они выставляются оптимальным образом одновременно.

2). После нахождения оптимального положения каждая субапертура остается в нем, а не возвращается в исходное положение, оптимальное положение последней субапертуры Должно обеспечить абсолютный максимум функции резкости.

Исследуем далее вопрос о том, можно ли достичь абсолютного максимума рассмотренных функций резкости, применяя эти два способа. Будем считать, что адаптивный элемент представляет систему подвижных субапертур Δn (n = 1, ..., N; N – число субапертур) равной площади Δ с прямоугольной функцией отклика, т.е, изменение фазы за счет адаптации

$$\theta(\rho)=\theta_n\,\tilde{w}(\rho-\rho_n^0)=\begin{cases}\theta_n & \rho\in\Delta\\ 0 & \rho\notin\Delta_n,\end{cases} \tag{7.1}$$

где (θ_n) – изменение фазы за счет сдвига субапертуры Δ_n.

а). При смещении субапертуры Δ_n, дающем изменение фазы θ_n, приращение функционала ΔS_1 имеет вид

$$\Delta S_1(\theta_n)=S_1(\theta_n)-S_1(0)=2\int_{\Omega_p} I(x)\,\Delta I(x)\,dx, \tag{7.2}$$

где $S_1(\theta_n)$ и $S_1(0)$ – функции резкости при смещенной и несмещенной субапертурах Δ_n;

$$\Delta I(x)=\frac{1}{2}(\lambda^2 Rz)^{-2}\int_{\Omega} u(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}\iint_{-\infty}^{\infty} w(\rho_1)\,w(\rho_2)\{\exp[i\theta(\rho_1)-\theta(\rho_2)]-1\}\times$$

$$\times \exp\left[i\varphi(\rho_1) - i\varphi(\rho_2) - i\kappa(\rho_1 - \rho_2)\left(\frac{\mathbf{r}}{R} + \frac{\mathbf{x}}{z}\right)\right] d\rho_1 d\rho_2. \quad (7.3)$$

Подставляя (2.9) и (7.3) в (7.2) и интегрируя по переменной x, получаем

$$\Delta S_1(\theta_n) \sim \iiint_{-\infty}^{\infty} w(\rho_1)\, w(\rho_2)\, w(\rho_3)\, w(\rho_1 - \rho_2 + \rho_3) \exp[i\varphi(\rho_1) -$$
$$- i\varphi(\rho_2) + i\varphi(\rho_3) - i\varphi(\rho_1 - \rho_2 + \rho_3)]\, \{\exp[i\theta(\rho_1) - i\theta(\rho_2)] - 1\} \times$$
$$\times \left| \int_{\Omega} u(\mathbf{r}) \exp\left[i\kappa \frac{\mathbf{r}}{R}(\rho_2 - \rho_1)\right] d\mathbf{r} \right|^2 d\rho_1 d\rho_2 d\rho_3. \quad (7.4)$$

Вводя обозначения

$$\alpha_n e^{i\beta_n} = \int_{-\infty}^{\infty} \omega_n(\rho) e^{i\varphi(\rho)} C(\rho - \rho_n^0) d\rho \quad (7.5)$$

$$C(\rho - \rho_n^0) = \left|\int_{\Omega} u(r) \exp\left[ik\frac{r}{R}(\rho - \rho_n^0)\right] dr\right|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\rho_3)\omega(\rho - \rho_n^0 + \rho_3) \times$$
$$\times \exp[i\varphi(\rho_3) - i\varphi(\rho - \rho_n^0 + \rho_3)] d\rho_3, \quad (7.6)$$

где $\omega_n(\rho)$ – апертурная функция, равная нулю на субапертуре Δ_n и единице на остальной части апертуры; ρ_n^0 – координата центра субапертуры Δ_n, окончательно получаем

$$\Delta S_1(\theta_n) \sim - \alpha_n \Delta \sin\frac{\theta_n}{2} \sin\left[\varphi(\rho_n^0) + \frac{\theta_n}{2} - \beta_n\right] \sim$$
$$\sim \alpha_n \Delta \{\cos[\varphi(\rho_n^0) + \theta_n - \beta_n] - \cos[\varphi(\rho_n^0) - \beta_n]\}. \quad (7.7)$$

По измерениям $\Delta S_1(\theta_n)$ при разных фазовых приращениях θ_n из соотношения (7.7) можно определить только разность фаз $\varphi(\rho_n^0) - \beta_n$ для каждой субапертуры Δ_n. Величина β_n является функцией n, и поэтому соотношение (7.7) не дает возможности измерить фазовые искажения и восстановить объектный фронт, так как мы не можем вычислить β_n, не зная фазовых искажений. Условие максимизации функции резкости S_1 при таком способе поиска

$$d\Delta S_1(\theta_n)/d\theta_n = 0 \quad (7.8)$$

для всех n приводит к равенству

$$\varphi(\rho_n^0) + \theta_n - \beta_n = 0, \quad (7.9)$$

выполнение которого не дает восстановления волнового фронта и построения неискаженного изображения наблюдаемого объекта. Максимизация функции резкости S_4, где в качестве маски используется неискаженное изображение $I_0(\mathrm{x})$, приводит к следующему:

$$\Delta S_4(\theta_n) \sim \alpha_n^1 \Delta \{\cos[\varphi(\rho_n^0) + \theta_n - \beta_n^1] - \cos[\varphi(\rho_n^0) - \beta_n^1]\}, \quad (7.10)$$

где

$$\alpha_n e^{i\beta_n^1} = \int_{-\infty}^{\infty} w_n(\rho) e^{i\varphi(\rho)} \left| \int_{\Omega} u(\mathbf{r}) \exp\left[i\frac{\kappa}{R}(\rho - \rho_n^0)\right] d\mathbf{r} \right|^2 d\rho.$$

В общем случае коэффициенты β_n^1 с разными n не равны друг другу, и максимизация функционала S_4 не приводит к восстановлению изображений. В случае точечного объекта в начале координат

$$(u(\mathrm{r}) = \delta(\mathrm{r}))\quad \alpha_n^1 e^{i\beta_n^1} = \int_{-\infty}^{\infty} w(\rho) e^{i\varphi(\rho)} d\rho - \Delta e^{i\varphi(\rho_n^0)},$$

и при количестве субапертур $N \gg 1$ с большой вероятностью $\beta_n^1 \approx \arg \int_{-\infty}^{\infty} w(\rho)\, e^{i\varphi(\rho)}\, d\rho$ ввиду относительной малости второго слагаемого, то есть коэффициенты β_n^1 примерно равны друг другу. Таким образом, данный способ поиска абсолютного максимума функций резкости S и S_8 даже при наличии априорной информации о форме протяженных объектов приводит к вторичным максимумам. Реализация абсолютного максимума при помощи S_4 и S_8 возможна лишь для точечных объектов. Максимизация функции резкости S_{10}, где маска совпадает с пространственным спектром неискаженного изображения $F_0(\mathrm{f})$, в случае точечного объекта дает следующий результат:

$$\Delta S_{10}(\theta_n) \sim \mathrm{Re}\left\{ \int_{\Omega_\Phi} M_0(\mathbf{f})\, H^*(\mathbf{f})\, d\mathbf{f} \int_{\Omega_\Phi} H_0^*(\mathbf{f})\, \Delta H(\mathbf{f})\, d\mathbf{f} \right\}, \tag{7.11}$$

где атмосферно-линзовая передаточная функция

$$H(\mathbf{f}) = S^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} w(\rho)\, w\left(\rho - 2\pi \frac{z}{\kappa}\mathbf{f}\right) \exp\left[i\varphi(\rho) - i\varphi\left(\rho - 2\pi\frac{z}{\kappa}\mathbf{f}\right)\right] d\rho,$$

$$H_0(\mathbf{f}) = H(\mathbf{f})\,|_{\varphi(\rho)=0};$$

$$\Delta H(\mathbf{f}) \sim \Delta \sin\frac{\theta_n}{2} \left\{ w\left(\rho_n^0 - 2\pi\frac{z}{\kappa}\mathbf{f}\right) \exp\left[i\varphi(\rho_n^0) - i\varphi\left(\rho_n^0 - 2\pi\frac{z}{\kappa}\mathbf{f}\right) + \frac{i\theta_n}{2}\right] - \right.$$

$$\left. - w\left(\rho_n^0 + 2\pi\frac{z}{\kappa}\mathbf{f}\right) \exp\left[i\varphi\left(\rho_n^0 + 2\pi\frac{z}{\kappa}\mathbf{f}\right) - i\varphi(\rho_n^0) - \frac{i\theta_n}{2}\right]\right\}.$$

Для центральных субапертур Δ_n, когда

$$w\left(\rho_n^0 - \frac{z}{\kappa}2\pi\mathbf{f}\right) = w\left(\rho_n^0 + \frac{z}{\kappa}2\pi\mathbf{f}\right) = 1 \text{ и } \Delta H(\mathbf{f}) \sim \Delta\sin\frac{\theta_n}{2} \sin\left[\varphi(\rho_n^0) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\varphi\left(\rho_n^0 + \frac{z}{\kappa}2\pi\mathbf{f}\right) - \frac{1}{2}\varphi\left(\rho_n^0 - \frac{z}{\kappa}2\pi\mathbf{f}\right) + \frac{\theta_n}{2}\right],$$

условие максимизации

$$d\Delta S_{10}(\theta_n)/d\theta_n \sim \Delta \int_{\Omega_\Phi} H_0^*(\mathbf{f}) \sin\left[\theta_n + \varphi(\rho_n^0) - \frac{1}{2}\varphi\left(\rho_n^0 + 2\pi\frac{z}{\kappa}\mathbf{f}\right) - \frac{1}{2}\varphi\left(\rho_n^0 - 2\pi\frac{z}{\kappa}\mathbf{f}\right)\right] d\mathbf{f} = 0 \tag{7.12}$$

в общем случае не отвечает компенсации атмосферных фазовых искажений, поэтому маловероятно, что с помощью функций резкости S_{10} и S_{11} можно восстановить изображение протяженного объекта.

Для функции резкости S_9 получим

$$\Delta S_9 \sim \frac{\Delta I_x(\mathbf{x})\, I_y(\mathbf{x}) - \Delta I_y(\mathbf{x})\, I_x(\mathbf{x})}{A^2 I_y^2(\mathbf{x})}\Bigg|_{\mathbf{x}\to 0} = \frac{2i\Delta\sin\frac{\theta_n}{2}}{A I_y^2(\mathbf{x})} \times$$

$$\times\, \alpha_n^y \sin\left(\frac{\theta_n}{2} + \varphi(\rho_n^0) - \beta_n^y\right) - \frac{2i\Delta\sin\frac{\theta_n}{2}}{A I_y^2(\mathbf{x})} \times$$

$$\times\, \alpha_n^x I(\mathbf{x}) \sin\left(\frac{\theta_n}{2} + \varphi(\rho_n^0) - \beta_n^x\right)\Bigg|_{\mathbf{x}\to 0}, \tag{7.13}$$

где

$$\alpha_n^z e^{i\beta_n^z} = \int_{-\infty}^{\infty} w_n(\rho)\, C_z(\rho - \rho_n^0) \exp\left[i\varphi(\rho) + i\frac{\kappa}{z}\mathbf{x}(\rho - \rho_n^0)\right] d\rho\,\Bigg|_{\mathbf{x}\to 0},$$

$$C_z(\rho - \rho_n^0) = \int_{\Omega} u_{zz}(\mathbf{r})\, G(\mathbf{r} - \rho)\, G^*(\mathbf{r} - \rho_n^0)\, d\mathbf{r},$$

z означает x или y. Даже при условии

$$\alpha_n^x I_x(0) \sim \alpha_n^y I_y(0) \sim \tilde{C}_n$$

получим

$$\Delta S_9 \sim 2i\Delta\tilde{C}_n \sin\frac{\theta_n}{2} \cos\left(\frac{\beta_n^x - \beta_n^y}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_n}{2} + \varphi(\rho_n^0) - \frac{\beta_n^x - \beta_n^y}{2}\right). \tag{7.14}$$

Так как β_n^x и β_n^y зависят от конкретной субапертуры, то компенсировать атмосферные искажения последовательно невозможно. Далее рассмотрим функцию резкости S_{12}:

$$\Delta S_{12}(\theta_n) \sim |F_0(\mathrm{f}_0)\,\Delta H(\mathrm{f}_0,\theta_n)|^2 = |F_0(\mathrm{f}_0)|^2 S_0^{-2} \times$$
$$\times \left| \int_{-\infty}^{\infty} w(\rho)\, w\left(\rho - 2\pi \frac{z}{\kappa}\mathrm{f}_0\right) \exp\left[i\varphi(\rho) - i\varphi\left(\rho - 2\pi\frac{z}{\kappa}\mathrm{f}_0\right)\right] \times\right.$$
$$\left.\times \left\{\exp\left\{i\theta_n\left[\tilde{w}(\rho-\rho_n^0) - \tilde{w}_n\left(\rho - \rho_n^0 - \frac{z}{\kappa}\,2\pi\mathrm{f}_0\right)\right]\right\} - 1\right\} d\rho \right|^2. \qquad (7.15)$$

Поскольку нас интересуют частоты $0 < |\mathrm{f}_0| < \dfrac{k\rho_0}{2\pi z}$, для которых величины $2\pi \dfrac{z}{k}|\mathrm{f}_0|$ превышают линейный размер одной субапертуры, то области, где $\omega(\rho)$ и $\omega(\rho - 2\pi \frac{z}{k}\mathrm{f}_0)$ отличные от нуля, не пересекаются. Тогда

$$\Delta S_{12}(\theta_n) \sim |F_0(\mathrm{f}_0)|^2 S_0^{-2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{w}(\rho - \rho_n^0) \left\{ w\left(\rho - 2\pi\frac{z}{\kappa}\mathrm{f}_0\right) \times\right.\right.$$
$$\times \exp\left[i\varphi(\rho) - i\varphi\left(\rho - 2\pi\frac{z}{\kappa}\mathrm{f}_0\right)\right](e^{i\theta_n} - 1)\, w\left(\rho + 2\pi\frac{z}{\kappa}\mathrm{f}_0\right) \times$$
$$\left.\left.\times \exp\left[i\varphi\left(\rho + 2\pi\frac{z}{\kappa}\mathrm{f}_0\right) - i\varphi(\rho)\right](e^{-i\theta_n} - 1)\right\} d\rho \right|^2 =$$
$$= 4\Delta |F_0(\mathrm{f}_0)|^2 S_0^{-2} \sin\left(\frac{\theta_n}{2}\right) \left| \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{w}(\rho - \rho_n^0) \left\{ w\left(\rho - \frac{z}{\kappa}\,2\pi\mathrm{f}_0\right) \times\right.\right.$$
$$\times \exp\left[i\varphi(\rho) - i\varphi\left(\rho - 2\pi\frac{z}{\kappa}\mathrm{f}_0\right) + i\,\frac{\theta_n}{2}\right] -$$
$$\left.\left. - w\left(\rho + 2\pi\frac{z}{\kappa}\mathrm{f}_0\right) \exp\left[i\varphi(\rho) + 2\pi\frac{z}{\kappa}\mathrm{f}_0\right) - i\varphi(\rho) - i\,\frac{\theta_n}{2}\right] d\rho \right|^2. \qquad (7.16)$$

При условии $w\left(\rho - 2\pi\dfrac{z}{\kappa}\mathrm{f}_0\right) = w\left(\rho + 2\pi\dfrac{z}{\kappa}\mathrm{f}_0\right)$ получаем окончательно

$$\Delta S_{12} \sim 4\Delta S_0^{-1} |F_0(\mathrm{f}_0)|^2 \{\cos[S_n(\mathrm{f}_0) + \theta_n] - \cos S_n(\mathrm{f}_0)\}^2, \qquad (7.17)$$

где

$$S_n(\mathrm{f}_0) = \varphi(\rho_n^0) - \frac{1}{2}\left[\varphi\left(\rho_n^0 - 2\pi\frac{z}{\kappa}\mathrm{f}_0\right) + \varphi\left(\rho_n^0 + 2\pi\frac{z}{\kappa}\mathrm{f}_0\right)\right]. \qquad (7.18)$$

Физический смысл величины $S_n(\mathrm{f}_0)$ – это разность разностей атмосферных фазовых искажений в соседних точках приемной апертуры. При условии $|\mathrm{f}_0| < \dfrac{k\rho_0}{2\pi z}$ величина

$$S_n(\mathrm{f}_0) \approx -\frac{1}{2}\left(2\pi\frac{z}{\kappa}|\mathrm{f}_0|\right)^{-2} \varphi''_{\mathrm{f}_0}(\rho_n^0),$$

т.е. пропорциональна второй производной в направлении вектора f_0 от функции $\varphi(\rho)$ в точке $\overset{0}{\rho}_n$. По вторым производным в двух различных направлениях можно с точностью до линейного наклона определить и саму функцию $\varphi(\rho)$ (т.е. с точностью до условия (3.5)).

Для S_{13} можно записать

$$\Delta S_{13} \sim \left| \int_{\Omega_\Phi} \frac{\Delta I_2(\mathrm{x})\, I(\mathrm{x}) - I_2(\mathrm{x})\,\Delta I(\mathrm{x})}{I^2(\mathrm{x})} \exp(-2\pi i \mathrm{f}_0 \mathrm{x})\, d\mathrm{x} \right|^2, \qquad (7.19)$$

где

$$\Delta I_2(\mathrm{x}) = \frac{1}{2}(\lambda^2 R z)^{-2} \iint_{-\infty}^{\infty} w(\rho_1)\, w(\rho_2)\, C_2(\rho_1)\, C_2^*(\rho_2) \exp[i\varphi(\rho_1) -$$

$$- i\varphi(\rho_2)] \exp\left[i \frac{\kappa}{z} \mathrm{x} (\rho_1 - \rho_2) \right] \left[\tilde{w}(\rho_1 - \rho_n^0) \exp\left(i \frac{\theta_n}{2} \right) - \right.$$

$$\left. - \tilde{w}(\rho_2 - \rho_n^0) \exp\left(- i \frac{\theta_n}{2} \right) \right] d\rho_1 \, d\rho_2 \cdot 2i \sin \frac{\theta_n}{2};$$

$$\Delta I(\mathrm{x}) = \frac{1}{2} (\lambda^2 R z)^{-2} \iint_{-\infty}^{\infty} w(\rho_1) \, w(\rho_2) C(\rho_1) C^*(\rho_2) \times$$

$$\times \exp\left[i\varphi(\rho_1) - i\varphi(\rho_2) + i \frac{\kappa}{z} \mathrm{x} (\rho_1 - \rho_2) \right] \times$$

$$\times \left[\tilde{w}(\rho_1 - \rho_n^0) \exp\left(i \frac{\theta_n}{2} \right) - \tilde{w}(\rho_2 - \rho_n^0) \exp\left(- i \frac{\theta_n}{2} \right) \right] d\rho_1 \, d\rho_2 \cdot 2i \sin \frac{\theta_n}{2};$$

$$C(\rho) = \int_{\Omega} E(\mathbf{r}) G(\mathbf{r} - \rho) \, d\mathbf{r};$$

$$C_2(\rho) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} E(\mathbf{r}) \left[\exp(i\varphi_1 + i\pi \mathbf{f}_0 \mathbf{r}) + \exp(i\varphi_2 - i\pi \mathbf{f}_0 \mathbf{r}) \right] G(\mathbf{r} - \rho) \, d\mathbf{r} =$$

$$= \frac{1}{2} \varepsilon_1 \left(\rho - 2\pi \frac{z}{\kappa} \mathbf{f}_0 \right) + \frac{1}{2} \varepsilon_1 \left(\rho + 2\pi \frac{z}{\kappa} \mathbf{f}_0 \right).$$

Подставляя выражения для $\Delta I(\mathrm{x})$ и $\Delta I_2(\mathrm{x})$ в (7.19), получим

$$\Delta S_{13} \sim \left| 2\Delta i \sin \frac{\theta_n}{2} \left[A_2(\rho_n^0) F_1^*\left(\rho_n^0 - 2\pi \frac{z}{\kappa} \mathbf{f}_0 \right) - A_2^*(\rho_n^0) F_1\left(\rho_n^0 + 2\pi \frac{z}{\kappa} \mathbf{f}_0 \right) \right] - \right.$$

$$\left. - 2\Delta i \sin \frac{\theta_n}{2} \left[A(\rho_n^0) F_2^*\left(\rho_n^0 - 2\pi \frac{z}{\kappa} \mathbf{f}_0 \right) - A^*(\rho_n^0) F_2\left(\rho_n^0 + 2\pi \frac{z}{\kappa} \mathbf{f}_0 \right) \right] \right|^2, \quad (7.20)$$

где

$$A_2(\rho_n^0) = \frac{1}{4} \exp\left[i \frac{\theta_n}{2} + i\varphi(\rho_n^0) \right] \left[\varepsilon_1 \left(\rho_n^0 - 2\pi \frac{z}{\kappa} \mathbf{f}_0 \right) + \right.$$

$$\left. + \varepsilon_1 \left(\rho_n^0 + 2\pi \frac{z}{\kappa} \mathbf{f}_0 \right) \right] \exp\left(i \frac{\kappa}{z} \mathrm{x} \rho_n^0 \right) \int_{-\infty}^{\infty} w_n(\rho) \left[\varepsilon_1^* \left(\rho - 2\pi \frac{z}{\kappa} \mathbf{f}_0 \right) + \right.$$

$$\left. + \varepsilon_1^* \left(\rho + 2\pi \frac{z}{\kappa} \mathbf{f}_0 \right) \right] \exp\left[- i\varphi(\rho) - i \frac{\kappa}{z} \mathrm{x} \rho \right] d\rho;$$

$$A(\rho_n^0) = \exp\left[i \frac{\theta_n}{2} + i\varphi(\rho_n^0) \right] \varepsilon(\rho_n^0) \times$$

$$\times \exp\left(i \frac{\kappa}{z} \mathrm{x} \rho_n^0 \right) \int_{-\infty}^{\infty} w_n(\rho) \, \varepsilon^*(\rho) \exp\left(- i\varphi(\rho) - i \frac{\kappa}{z} \mathrm{x} \rho \right) d\rho;$$

$$F_1\left(\rho_n^0 - 2\pi \frac{z}{\kappa} \mathbf{f}_0 \right) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_p} \left(\frac{1}{I(\mathrm{x})} \right) \int_{\Omega} E(\mathbf{r}) \left[\exp(i\varphi_1 + \pi i \mathbf{f}_0 \mathbf{r}) + \right.$$

$$\left. + \exp(i\varphi_2 - \pi i \mathbf{f}_0 \mathbf{r}) \right] g\left(\frac{\mathbf{r}}{R} + \frac{\mathrm{x}}{z} \right) \exp\left[i \frac{\kappa}{z} \mathrm{x} \left(\rho_n^0 - 2\pi \frac{z}{\kappa} \mathbf{f}_0 \right) \right] d\mathbf{x};$$

$$F_2\left(\rho_n^0 - 2\pi \frac{z}{\kappa} \mathbf{f}_0 \right) = \int_{\Omega_p} \frac{I_2(\mathrm{x})}{I^2(\mathrm{x})} \exp\left[i \frac{\kappa}{z} \mathrm{x} \left(\rho_n^0 - 2\pi \frac{z}{\kappa} \mathbf{f}_0 \right) \right] d\mathbf{x};$$

так что

$$\Delta S_{13} \sim \left| \Delta 2i \sin \frac{\theta_n}{2} \alpha_n^1 \sin\left(\frac{\theta_n}{2} + \varphi(\rho_n^0) - \beta_n^1 \right) - \right.$$

$$\left. - \Delta 2i \sin \frac{\theta_n}{2} \alpha_n^2 \sin\left(\frac{\theta_n}{2} + \varphi(\rho_n^0) - \beta_n^2 \right) \right|^2, \quad (7.21)$$

где

$$\alpha_n^1 \exp(i\beta_n^1) = \frac{1}{2}\left[\varepsilon\left(\rho_n^0 - 2\pi\frac{z}{\kappa}\mathbf{f}_0\right) + \varepsilon\left(\rho_n^0 + 2\pi\frac{z}{\kappa}\mathbf{f}_0\right)\right] F_1^*\left(\rho_n^0 - 2\pi\frac{z}{\kappa}\mathbf{f}_0\right);$$

$$\alpha_n^2 \exp(i\beta_n^2) = \varepsilon(\rho_n^0) F_2^*\left(\rho_n^0 - 2\pi\frac{z}{\kappa}\mathbf{f}_0\right).$$

Предположив, что $\alpha_n^1 \sim \alpha_n^2 \sim \alpha_n$, т.к. $\left|F_1\left(\rho_n^0 - 2\pi\frac{z}{\kappa}\mathbf{f}_0\right)\right|^2 \sim \left|F_2\left(\rho_n^0 - 2\pi\frac{z}{\kappa}\mathbf{f}_0\right)\right|^2$ и частота f_0 мала настолько, что модуль $|\varepsilon(\rho_n^0)|$ мало меняется на расстоянии порядка $2\pi\frac{z}{\kappa}|\mathrm{f}_0|$, т.е. $|\varepsilon(\rho_n^0)| \sim \left|\varepsilon\left(\rho_n^0 - 2\pi\frac{z}{\kappa}\mathbf{f}_0\right)\right| \sim \left|\varepsilon\left(\rho_n^0 + 2\pi\frac{z}{\kappa}\mathbf{f}_0\right)\right|$, получим окончательно

$$\Delta S_{13} \sim 16\Delta^2 \sin^2\frac{\theta_n}{2}(\alpha_n)^2 \sin^2\left(\frac{\beta_n^2 - \beta_n^1}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta_n}{2} + \varphi(\rho_n^0) - \frac{\beta_n^1 + \beta_n^2}{2}\right) \tag{7.22}$$

Так как β_n^1 и β_n^2 зависят одновременно и от объекта, и от атмосферы по-разному для каждой субапертуры Δ_n, то последовательная компенсация искажений в каждой Δ_n невозможна.

Перейдем к рассмотрению функции резкости S_{14}:

$$\Delta S_{14} = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} w(\rho_1)\, w(\rho_2)\, \varepsilon_1(\rho_1)\, \varepsilon_0^*(\rho_1)\, \varepsilon_1^*(\rho_2)\, \varepsilon_0(\rho_2) \times$$
$$\times \exp[i\varphi(\rho_1) - i\varphi(\rho_2)]\,[\exp[i\theta(\rho_1) - i\theta(\rho_2)] - 1]\, d\rho_1 d\rho_2. \tag{7.23}$$

При $\varepsilon_0(\rho) = \varepsilon_1(\rho)$ получим

$$\Delta S_{14} \sim 2i\Delta \sin\frac{\theta_n}{2}|\varepsilon_1(\rho_n^0)|^2 \alpha_0 \sin\left(\frac{\theta_n}{2} + \varphi(\rho_n^0) - \beta_0\right), \tag{7.24}$$

где

$$\alpha_0 e^{i\beta_0} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} w_n(\rho)\,|\varepsilon_1(\rho)|^2 e^{i\Psi(p)}\, d\rho.$$

Так как при числе субапертур $N \gg 1$ $\beta_0 \approx \arg \int\limits_{-\infty}^{\infty} w(\rho)\,|\varepsilon_1(\rho)|^2 e^{i\varphi(p)}\, d\rho$, т.е. β_0 примерно постоянна для всех Δ_n, то в каждой субапертуре отдельно можно скомпенсировать значения фазы $\varphi(\rho_n^0) = \mathrm{const}$, что соответствует восстановлению изображений.

Для функции резкости S_{18} можно записать

$$\Delta S_{18} = \iiiint\limits_{-\infty}^{\infty} w(\rho_1)\, w(\rho_2)\, w(\rho_3)\, w(\rho_4) \exp[i\varphi(\rho_1) - i\varphi(\rho_2) + i\varphi(\rho_3) -$$
$$- i\varphi(\rho_4)]\, C(\rho_3 - \rho_1)\, C^*(\rho_4 - \rho_2) \exp\left[i\frac{\kappa}{z}\mathrm{x}_0(\rho_3 - \rho_4)\right] \times$$
$$\times [\exp[i\theta(\rho_1) - i\theta(\rho_2) + i\theta(\rho_3) - i\theta(\rho_4)] - 1]\, d\rho_1 d\rho_2 d\rho_3 d\rho_4, \tag{7.25}$$

где

$$C(\rho_i - \rho_j) = \frac{1}{2}(\lambda^2 R z)^{-2} \int\limits_{\Omega} E(\mathbf{r})\, G(\mathbf{r} - \rho_i + \rho_j)\, d\mathbf{r}.$$

С учетом (7.10) выражение в квадратных скобках принимает вид

$$[\cdot] = \tilde{w}(\rho_1 - \rho_n^0)(e^{i\theta_n} - 1) + \tilde{w}(\rho_2 - \rho_n^0)(e^{-i\theta_n} - 1) +$$
$$+ w(\rho_2 - \rho_n^0)(e^{i\theta_n} - 1) + \tilde{w}(\rho_4 - \rho_n^0)(e^{-i\theta_n} - 1)$$

и тогда

$$\Delta S_{18} \sim 2i\Delta \sin\frac{\theta_n}{2}\left[\alpha_{x0}\alpha_n^1 \sin\left(\frac{\theta_n}{2} + \varphi(p_n^0) - \beta_{x0} - \beta_n^1 - \beta_n^0\right) +\right.$$
$$\left. + \alpha_n^2 \sin\left(\frac{\theta_n}{2} + \varphi(\rho_n^0) - \beta_{x0} - \beta_n^2 - \beta_n^0\right)\right] + 2i\sin\frac{\theta_n}{2} P\left[\alpha_{x0}\sin(\theta_n + 2\varphi(\rho_n^0) - \right.$$

$$-\beta_{x0}-\beta_n^0-\beta_p)+\alpha_n^1\sin\left(\frac{\theta_n}{2}+\varphi(\rho_n^0)-\beta_n^1-\beta_n^0-\beta_p\right)+$$

$$+\alpha_n^1\sin\left(\frac{\theta_n}{2}+\varphi(\rho_n^0)+\beta_n^1+\beta_n^0+\beta_p\right)\Big], \qquad (7.26)$$

где

$$\alpha_{x0}\,e^{i\beta_{x0}}=\iint\limits_{-\infty}^{\infty} w_n(\rho_1)\,w_n(\rho_2)\exp\left[+i\varphi(\rho_1)-i\varphi(\rho_2)\right]\times$$

$$\times\, C(\rho_2-\rho_1)\exp\left[i\,\frac{\kappa}{z}\,\mathbf{x}_0(\rho_1-\rho_2)\right]d\rho_1 d\rho_2;$$

$$\alpha_n^1\exp(i\beta_n^1)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} w_n(\rho)\exp(i\varphi(\rho))\,C(\rho-\rho_n^0)\,d\rho;$$

$$\exp(i\beta_n^0)=\exp\left(i\,\frac{\kappa}{z}\,\mathbf{x}_0\rho_n^0\right);$$

$$\alpha_n^2\exp(i\beta_n^2)=\iiint\limits_{-\infty}^{\infty} w_n(\rho_1)\,w_n(\rho_2)\,w_n(\rho_3)\exp\left[i\varphi(\rho_1)-i\varphi(\rho_2)-i\varphi(\rho_3)\right]\times$$

$$\times\, C(\rho_n^0-\rho_1)\,C^*(\rho_3-\rho_2)\exp\left(-i\,\frac{\kappa}{z}\,\mathbf{x}_0\rho_3\right)d\rho_1 d\rho_2 d\rho_3;$$

$$P\exp(i\beta_p)=(\lambda^2 Rz)^{-2}\int\limits_{\Omega} E(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}.$$

Так как, $\alpha_n^2\exp(i\beta_n^2)\approx\alpha_{x0}\,\alpha_n^1\exp(i\beta_{x0}+i\beta_n^1)$, то получим окончательно

$$\Delta S_{18}\sim 2i\Delta\,\sin\frac{\theta_n}{2}\,\sin\!\left(\frac{\theta_n}{2}+\varphi(\rho_n^0)\right)\left[\alpha_{x0}\,\alpha_n^1\cos\left(\frac{\beta_{x0}+\beta_n^1}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+\,\alpha_n^1 P\cos\left(\frac{\beta_p+\beta_n^1}{2}\right)\right]+2i\Delta\,\sin(\theta_n)\,\alpha_{x0}P\sin(\theta_n+2\varphi(\rho_n^0)-\beta_{x0}-\beta_p). \qquad (7.27)$$

Таким образом, с точностью до констант βx_0 и β_ρ можно компенсировать атмосферные искажения в каждой субапертуре отдельно.

Для функции резкости S_{20} запишем:

$$\Delta S_{20}\sim\frac{\Delta A_{3H}A_4-\Delta A_4 A_{3H}}{A_{3H}^2}, \qquad (7.28)$$

где

$$A_4=\left(\int\limits_{\Omega} u^2(\mathbf{r})\,|Z(\mathbf{r})|^4\,d\mathbf{r}\right)^{1/2};\quad A_{3H}=\int\limits_{\Omega} u(\mathbf{r})\,|Z(\mathbf{r})|^2\,d\mathbf{r};$$

$$\Delta A_{3H}=\iint\limits_{-\infty}^{\infty} w_n(\rho_1)\,w(\rho_2)\exp\left[i\varphi(\rho_1)-i\varphi(\rho_2)\right]C(\rho_1-\rho_2)\times$$

$$\times\;\exp\left[i\theta(\rho_1)-i\theta(\rho_2)-1\right\}d\rho_1 d\rho_2;$$

$$\Delta A_4=\iiiint\limits_{-\infty}^{\infty} w(\rho_1)\,w(\rho_2)\,w_n(\rho_3)\,w(\rho_4)\exp\left[i\varphi(\rho_1)-i\varphi(\rho_2)+i\varphi(\rho_3)-\right.$$

$$\left.-\,i\varphi(\rho_4)\right]B(\rho_1-\rho_2+\rho_3-\rho_4)\left[\exp\left[i\theta(\rho_1)-i\theta(\rho_2)+i\theta(\rho_3)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\,i\theta(\rho_4)\right]-1\right]d\rho_1 d\rho_2 d\rho_3 d\rho_4;$$

$$C(\rho_1-\rho_2)=\int\limits_{\Omega} u(\mathbf{r})\,G(\mathbf{r}-\rho_1)\,G^*(\mathbf{r}-\rho_2)\,d\mathbf{r};$$

$$B(\rho_1-\rho_2+\rho_3-\rho_4)=\int\limits_{\Omega} u^2(\mathbf{r})\,G(\mathbf{r}-\rho_1)\,G^*(\mathbf{r}-\rho_2)\times$$

$$\times\; G(\mathbf{r}-\rho_3)\,G^*(\mathbf{r}-\rho_4)\,d\mathbf{r}.$$

После преобразований, аналогичных тем, что проводились для предыдущих функций резкости, получим

$$\Delta S_{20}\sim 2i\Delta\,\sin\frac{\theta_n}{2}\left(\frac{A_4}{A_{3H}^2}\alpha_n^1-\frac{1}{A_4A_{3H}}\alpha_n^4\right)\sin\left(\frac{\theta_n}{2}+\varphi(\rho_n^0)-\beta_n^1\right)-$$

$$-\,2i\Delta\sin\frac{\theta_n}{2}\;\frac{1}{A_4A_{3H}}\left[2\alpha_n^2\cos\frac{\theta_n}{2}\,\sin(\theta_n+2\varphi(\rho_n^0)-\beta_n^2)+\alpha_n^3\left(\frac{\theta_n}{2}+\varphi(\rho_n^0)-\beta_n^3\right)\right], \qquad (7.29)$$

где

$$\alpha_n^1 e^{i\beta_n^1} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} w_n(\rho)\, C(\rho - \rho_n^0)\, e^{-i\varphi(\rho)}\, d\rho;$$

$$\alpha_n^2 e^{i\beta_n^2} = \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} w_n(\rho_1) w(\rho_2) w_n(\rho_3) \exp[-i\varphi(\rho_1) - i\varphi(\rho_2) + i\varphi(\rho_3)] \times$$
$$\times\ B(\rho_1 - \rho_2 + \rho_3 - \rho_n^0)\, d\rho_1 d\rho_2 d\rho_3;$$

$$\alpha_n^3 e^{i\beta_n^3} = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} w_n(\rho_1)\, w_n(\rho_2) \exp[-i\varphi(\rho_1) - i\varphi(\rho_2)] \times$$
$$\times\ B(2\rho_n^0 - \rho_1 - \rho_2)\, d\rho_1 d\rho_2;$$

$$\alpha_n^4 e^{i\beta_n^4} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} w_n(\rho) \exp[-i\varphi(\rho)] B(\rho - \rho_n^0)\, d\rho);$$

и использовано условие $\beta_n^1 \approx \beta_n^4 \sim \beta n$, т.к. функция $u(\mathrm{r})$ – плавная. Если β_n, β_n^2 и β_n^3 зависят от ρ_n^0, т.е. от каждой конкретной субапертуры Δ_n и входят в (7.29) с одним знаком, то компенсировать искажения последовательно нельзя.

Рассмотрим последнюю функцию резкости S_{27}:

$$\Delta S_{27} \sim \int\limits_{\Omega_p} \frac{1}{|Z^1(\mathbf{x})|^2} \cdot \frac{\Delta I(\mathbf{x}) I_z(\mathbf{x}) - \Delta I_z(\mathbf{x}) I(\mathbf{x})}{I^2(\mathbf{x})}\, d\mathbf{x}, \qquad (7.30)$$

где

$$\Delta I(\mathbf{x}) = \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} w(\rho_1) w(\rho_2) \exp[i\varphi(\rho_1) - i\varphi(\rho_2)]\, \varepsilon_1(\rho_1)\, \varepsilon_1^*(\rho_2) \times$$
$$\times \exp\left[i\frac{\kappa}{z}\mathbf{x}(\rho_1 - \rho_2)\right] \{\exp[i\theta(\rho_1) - i\theta(\rho_2)] - 1\}\, d\rho_1 d\rho_2\ ;$$

$$\Delta I_z(\mathbf{x}) = \iiiint\limits_{-\infty}^{\infty} w(\rho_1) w(\rho_2) w_n(\rho_3) w(\rho_4)\, \varepsilon^1(\rho_1)\, \varepsilon^{*1}(\rho_2) \times$$
$$\times \exp[i\varphi(\rho_1) - i\varphi(\rho_2) + i\varphi(\rho_3) - i\varphi(\rho_4)]\, \varepsilon_1(\rho_1 + \rho_2)\, \varepsilon_1^*(\rho_2 + \rho_4) \times$$
$$\times \{\exp[i\theta(\rho_1) - i\theta(\rho_2) + i\theta(\rho_3) - i\theta(\rho_4)] - 1\}\, d\rho_1 d\rho_2 d\rho_3 d\rho_4.$$

После несложных, но длительных преобразований получим

$$\Delta S_{27} \sim 2i\Delta \sin\frac{\theta_n}{2}\Big\{|\varepsilon^1(p_n^0)|^2\, |\varepsilon(2\rho_n^0)|\, F_4(\rho_n^0)| \sin\left(\frac{\theta_n}{2} + \varphi(\rho_n^0) - \arg\varepsilon(\rho_n^0 - \right.$$
$$\left. - \arg F_4(\rho_n^0)\right) + |\varepsilon^1(\rho_n^0)|\, |\varepsilon(2\rho_n^0)|\, |F_5(\rho_n^0)| \times$$
$$\times \sin\left(\frac{\theta_n}{2} + \varphi(\rho_n^0) - \arg\varepsilon(\rho_n^0) - \arg\varepsilon(2\rho_n^0) - \arg F_5(\rho_n^0)\right) +$$
$$+ |\varepsilon(\rho_n^0)|\, |F_1(\rho_n^0)| \sin\left(\frac{\theta_n}{2} + \varphi(\rho_n^0) - \arg\varepsilon(\rho_n^0) - \arg F_1(\rho_n^0)\right) +$$
$$+ |\varepsilon^1(\rho_n^0)|\, |F_2(\rho_n^0)| \sin\left(\frac{\theta_n}{2} + \varphi(\rho_n^0) - \arg\varepsilon^1(\rho_n^0) - \arg F_2(\rho_n^0)\right) +$$
$$+ |F_3(\rho_n^0)| \sin\left(\frac{\theta_n}{2} + \varphi(\rho_n^0) - \arg F_3(\rho_n^0)\right) + |\varepsilon^1(\rho_n^0)|\, |\varepsilon(2\rho_n^0)| \times$$
$$\times |F_0(\rho_n^0)| \sin(\theta_n + 2\varphi(\rho_n^0) - \arg\varepsilon^1(\rho_n^0) - \arg\varepsilon(2\rho_n^0) - \arg F_0(\rho_n^0))\Big\}, \qquad (7.31)$$

где

$$F_0(\rho_n^0) = \int\limits_{\Omega_p} \frac{1}{|Z^1(\mathbf{x})|^2} \cdot \frac{E_0(\mathbf{x})}{I(\mathbf{x})} \exp\left(-2i\frac{\kappa}{z}\mathbf{x}\rho_n^0\right) d\mathbf{x}\ ;$$

$$F_1(\rho_n^0) = \int\limits_{\Omega_p} \frac{1}{|Z^1(\mathbf{x})|^2} \cdot \frac{I_z(\mathbf{x}) E(\mathbf{x})}{I^2(\mathbf{x})} \exp\left(-i\frac{\kappa}{z}\rho_n^0\mathbf{x}\right) d\mathbf{x};$$

$$F_2(\rho_n^0)=\int_{\Omega_p}\frac{E_0^*(\mathbf{x})}{|Z^1(\mathbf{x})|^2}\cdot\frac{E_n^0(\mathbf{x})}{I(\mathbf{x})}\exp\left(-i\frac{\kappa}{z}\mathbf{x}\rho_n^0\right)d\mathbf{x};$$

$$F_3(\rho_n^0)=\int_{\Omega_p}\frac{E_0(\mathbf{x})}{|Z^1(\mathbf{x})|^2}\cdot\frac{E_n^1(\mathbf{x})}{I(\mathbf{x})}\exp\left(i\frac{\kappa}{z}\mathbf{x}\rho_n^0\right)d\mathbf{x};$$

$$F_4(\rho_n^0)=\int_{\Omega_p}\frac{1}{|Z^1(\mathbf{x})|^2}\cdot\frac{E_n^0(\mathbf{x})}{I(\mathbf{x})}\exp\left[-i\frac{\kappa}{z}\mathbf{x}\rho_n^0\right]d\mathbf{x};$$

$$F_5(\rho_n^0)=\int_{\Omega_p}\frac{1}{|Z^1(\mathbf{x})|^2}\cdot\frac{E_n^1(\mathbf{x})}{I(\mathbf{x})}\exp\left[-i\frac{\kappa}{z}\rho_n^0\mathbf{x}\right]d\mathbf{x};$$

$$E_0(\mathbf{x})=\iint_{-\infty}^{\infty}w_n(\rho_1)w_n(\rho_2)\exp\left[-i\varphi(\rho_1)-i\varphi(\rho_2)\right]\varepsilon^{1*}(\rho_1)\varepsilon^*(\rho_1+\rho_2)\,e^{-i\kappa\frac{\mathbf{x}}{z}(\rho_1+\rho_2)}d\rho_1 d\rho_2;$$

$$E_n^1(\mathbf{x})=\int_{-\infty}^{\infty}w_n(\rho)\exp\left[i\varphi(\rho)\right]\varepsilon^1(\rho)\,\varepsilon(\rho+\rho_n^0)\exp\left(i\kappa\frac{\mathbf{x}}{z}\rho\right)d\rho;$$

$$E_n^0(\mathbf{x})=\int_{-\infty}^{\infty}w_n(\rho)\exp\left[i\varphi(\rho)\right]\varepsilon(\rho_n^0+\rho)\exp\left(i\kappa\frac{\mathbf{x}}{z}\rho\right)d\rho.$$

Так как все значения $F_i(\rho_n^0)$, входящие в (7.31) различны, то невозможность поиска абсолютного максимума S_{27} данным методом становится очевидной.

3). На практике используют и другой способ нахождения абсолютного максимума функции резкости: после нахождения оптимального положения субапертура Δ_n остается в нем, а не возвращается в исходное положение. Для функции резкости S_1 это приводит к замене коэффициентов β_n на β_n^1, которые определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned}
\alpha_1'\exp(i\beta_1') &= \alpha_1\exp(i\beta_1),\\
\alpha_2' e^{i\beta_2'} &= \alpha_2 e^{i\beta_2}+\Delta\{\exp[i\beta_1'-i\varphi(\rho_1^0)]-1\}C(\rho_1^0-\rho_2^0);\\
\alpha_3' e^{i\beta_3'} &= \alpha_3 e^{i\beta_3}+\Delta\{\exp[i\beta_2'-i\varphi(\rho_1^0)]-1\}C(\rho_1^0-\rho_2^0)+\\
&+\Delta\{\exp[i\beta_2'-i\varphi(\rho_2^0)]-1\}C(\rho_2^0-\rho_3^0).
\end{aligned}\tag{7.32}$$

Видно, что и общем случае коэффициенты β_n' для разных n не равны друг другу. Максимизации функции резкости S_1 будут отвечать такие значения θ_n, для которых $\varphi(\rho_n^0)+\theta_n-\beta_n'=0$ для всех n, что также не даст восстановления изображений объектов. Очевидно также, что все остальные функции резкости можно рассмотреть аналогичным образом, что приведет к таким же результатам, что и для способа «а».

Отметим, что мы использовали самый простой вид функции отклика – прямоугольный. Однако представляется маловероятным, что для более сложных функций отклика рассмотренные методы могут дать качественно иной результат.

Кроме рассмотренных методов существуют еще так называемые градиентные методы, пригодные для работы с адаптивными элементами с нелокальным откликом (условие (7.1) не выполняется) [45]. Они основаны на разложении профиля фазы $\theta(\rho)$ по функциям отклика адаптивного элемента:

$$\theta(\rho)=\sum_{i=1}^{N}a_i S_i(p),\tag{7.33}$$

где $S_i(\rho)$ – функция отклика; a_i – управляющие коэффициенты.

Метод поиска максимума является итерационным. Начиная с нулевого приближения $a_i^{(0)}$, которое задают, исходя из различных соображений [51], (например, чтобы профиль $O(\rho)$ был плоскостью или сферой), вычисляются значения $0^{(0)}(\rho)$, затем функция резкости $S_i^{(O)}$. Далее коэффициенту $a_i^{(0)}$ придается небольшое приращение h и вычисляется

$$S_h'^{(0)}:S^{(0)}(a^{(0)}+h)-S^{(0)}(a^{(0)})=hS_h'(a^{(0)}),$$

после чего находится следующее приближение $a^{(1)}$ и т.д. по формуле

$$a^{(n+1)}=a^{(n)}+(a^n)\,S_h'^n(a^{(n)}).\tag{7.34}$$

Рассмотренные методы поиска, похожие на те, что предложили авторы [29], прежде всего не гарантируют сходимости функций резкости к максимуму для произвольного вида фазовых искажений $\varphi(\rho)$, а кроме того, не решают проблемы вторичных максимумов. Что касается числа перебираемых состояний $\alpha_i^{(j)}$, то видимо, при наличии вторичных максимумов, оно аналогично тому, которое требуется при переборке значений θ_n, что, как указывалось, нереально по быстродействию и энергетике.

Таким образом, используя известные методы поиска абсолютного максимума, мы можем работать лишь с функциями резкости S_{12}, S_{14}, S_{15} и S_{18}, причем S_{14} носит «экзотический» характер, так как требует значения полной априорной информации об объекте, а S_{15} предполагает итерационный алгоритм, в котором чем больше имеется априорной информации об объекте, тем больше вероятность, что он сходится.

8. Заключение.

Итак, исследование известных функций резкости на абсолютный максимум позволяет сделать следующие выводы. При традиционном когерентном освещении объектов неизвестной формы атмосферные фазовые искажения не отделяются от фазы объектного поля и изображения не восстанавливаются. Это понятно, так как объектное поле в плоскости приема и фазовые искажения за время замороженности атмосферы не изменяются и одинаково описываются математически. Для восстановления изображений объектов в этом случае необходимо знание априорной информации о форме объектов. Чем она полнее, тем лучше (функции резкости S_{14} и S_{15}). Это же относится и к проблеме измерения фазовых искажений путем нахождения их оптимальных оценок (5.10) и (5.14).

При подсвете объектов линейно поляризованным светом можно получить изображение выпуклого объекта по функции резкости S_9, однако если его поверхность имеет шероховатости, большие λ, то необходимо сглаживать спекл-структуру измеряемой интенсивности, так как она различна для взаимно-ортогональных компонентов поляризации. Это существенно затрудняет работу.

При нетрадиционном освещении (создании искусственной «опоры») можно добиться формирования изображений, когда функция резкости максимизируется при фокусировке в «точку» (S_{18}, $S_{2o})_r$ либо направлена на создание какого-либо известного распределения освещенности на объекте S_{13}, S_{27}.

При некогерентном освещении объектное поле и фазовые искажения имеют различные временные зависимости. Поэтому при отсутствии априорной информации о форме протяженных некогерентно освещенных объектов можно скомпенсировать атмосферные фазовые искажения путем максимизации функций резкости S_1 и S_{12} (S_2 полностью аналогична S_1), а при наличии априорной информации – S_4 и S_{10} (полная информация) или S_5, S_{11} (неполная информация). Статистическая обработка сигналов, отраженных от когерентно освещенных объектов с шероховатой поверхностью, во многих случаях приводит к аналогии с некогерентным освещением. Это относится к работе функций резкости S_9, S_{18} и S_{20}, которые позволяют восстановить изображение.

Несмотря на обилие функций резкости, приводящих к компенсации атмосферных искажений и восстановлению изображений (их 13) при достижении ими абсолютного максимума, реализация алгоритма максимизации является непростой задачей. Это, как указывалось, является следствием наличия вторичных экстремумов, которые при неизвестном объекте не позволяют отличить их от абсолютного. Известные методы поиска максимума позволяют работать лишь с четырьмя (или тремя) функциями резкости S_{12}, S_{14}, S_{15} и S_{18}. Что касается S_{14} (и отчасти S_{15}), то она требует полной априорной информации об объекте, что в большей части случаев нереально, а в других ставит под сомнение целесообразность адаптации. Функция резкости S_{18} требует для своей реализации фокусировки уходящей волны в яркую «точку» на объекте, что в силу ограничений, накладываемых расходимостью волны, передающей апертурой и расстоянием до объекта, вырастает в сложную проблему. С помощью функции резкости S_{12} можно найти абсолютный максимум при некогерентном освещении объекта, компенсируя атмосферные искажения отдельно в каждой субапертуре. Однако и в этом случае существуют свои сложности. Поскольку частота $|\mathrm{f}_o|$ для S_{12} лежит в области низких частот, то отличия мгновенной атмосферно-линзовой ОПФ $H(\mathrm{f}_0)$ от безаберрационной ОПФ $H_0(\mathrm{f}_0)$ относительно невелики (см., например, [2, 5, 6]). Поэтому при учете аддитивного шума, всегда присутствующего как в плоскости изображений, так и в Фурье плоскости, чувствительность S_{12} к адаптации для каждой субапертуры будет достаточно малой.

Все же, несмотря на отмеченные трудности, S_{12} – единственная функция резкости, позволяющая восстановить изображение неизвестного протяженного объекта при некогерентном освещении. Что касается когерентного освещения, (без фокусировки в «точку»), то здесь вопрос остается нерешенным, т.к. пока неясно, как найти абсолютный максимум функций резкости S_9, S_{13} и S_{27}, который приводит к восстановлению изображений.

1. Щеглов П.В. Проблемы оптической астрономии. М.: Наука, 1980. Гл. 8. 250 с.
2. Бакут П.А., Устинов Н.Д., Троицкий И.Н., Свиридов К.Н. //Зарубежная радиоэлектроника. 1976. №7, 9; 1977. №1.
3. Michelson A.A., Pease F.S. //Astroph. J. 1921. V. 53. P. 249–252.

4. Brown R.H., Twiss R.Q. //Nature. 1956. V. 177. P. 27–29.
5. Labeyrie A. //Astron. and Astrophys. 1970. V. 6. P. 85–87.
6. Knox K.T., Thompson B.J. //Astroph. J. 1973. V. 182. P. L133–L136.
7. Rhodes W.T., Goodman J.W. //J. Opt. Soc. Am. 1973. V. 63. P. 647–657.
8. Бакут П.А., Матвеев И.Н., Ряхин А.Д. и др. Квантовая электроника. Т. 10. №12 (1983). с. 2443–2447.
9. Бакут П.А., Дудинов В.Н., Свиридов К.Н., Устинов Н.Д. //Квантовая электроника. 1981. Т. 8. №1. с. 15–19.
10. Устинов Н.Д., Матвеев И.Н., Протопопов В.В. Методы обработки оптических полей в лазерной локации. М.: Наука, 1983. 320 с.
11. Goodman J.W., Huntley W.H., Jackson D.W., Lehman M. //Appl. Phys. Lett. 1966. V. 8. P. 311–313.
12. Гурвич А.С., Кон А.И., Миронов В.Л. и др. Лазерное излучение в турбулентной атмосфере. М.: Наука, 1976. 276 с.
13. Оппенхайм А. В., Лим Д.С. //ТИИЭР. 1981. Т. 69. №5. с. 39–68.
14. Адаптивная оптика: Сб. статей /Под ред. Э.А. Витриченко. М.: Мир, 1980. 456 с.
15. Троицкий И.Н., Устинов Н.Д. Статистическая теория голографии. М.: Сов. радио, 1981, 327 с.
16. Миронов В.Л. Распространение лазерного пучка в турбулентной атмосфере. Новосибирск: Наука, 1981. 227 с.
17. Матвеев И.Н., Протопопов В.В., Троицкий И.Н., Устинов Н.Д. Лазерная локация. М.: Машиностроение, 1984. 368 с.
18. Устинов Н.Д., Ануфриев А.В., Зимин Ю.А. и др. //Квантовая электроника. 1985. Т. 12. №11. с. 2347–2350.
19. Clifford S.F. et al. //J. Opt. Soc. Am. 1971. V. 61. P. 1279–1285.
20. Fried D.L. // J. Opt. Soc. Am. 1977. V. 67. P. 370–375.
21. Hudgin R.H. //J. Opt. Soc. Am. 1977. V. 67. P. 376–378.
22. Wyant J.C. //Appl. Opt. 1974. V. 13. P. 200–202.
23. Wyant J.C. // J. Opt. Soc. Am. 1974. V. 64. P. 1363–1367.
24. Wyant J.C. //Appl. Opt. 1975. V. 14. P. 2622–2626.
25. Yellin M. //J. Opt. Soc. Am. 1975. V. 65. P. 1211–1216.
26. Muller R.A., Buffington A. //J. Opt. Soc. Am. 1974. V. 64. P. 1200–1210.
27. Buffington A., Crauford F.S., Muller R.A. et al. //J. Opt. Soc. Am. 1977. V. 67. P. 298–303.
28. Buffington A., Crauford F.S., Muller R.A., Orth C.D. //J. Opt. Soc. Am. 1977. V. 67. P. 304–305.
29. Матвеев И.Н., Сафронов А.Н., Троицкий И.Н., Устинов Н.Д. Адаптация в информационных оптических системах. М.: Радио и связь, 1984. 341 с.
30. Устинов Н.Д., Ануфриев А.В., Зимин Ю.А. и др. //Квантовая электроника. 1985. Т. 12. №7. с. 1391–1395.
31. Устинов Н.Д., Матвеев И.Н., Ануфриев А.В. и др. //0птика и спектроскопия. 1985. Т. 58. № 6. с. 1286–1292.
32. Устинов Н.Д., Матвеев И.Н., Ануфриев А.В. и др. //Квантовая электроника. 1984. Т. 11. № 1. с. 142–147.
33. Устинов Н Д., Зимин Ю А., Протопопов В В., Толмачев А.И. // Квантовая электроника. 1985. Т. 12. №11. с. 2342–2344.
34. Гудмен Дж. У. Введение в Фурье-оптику. М.: Мир, 1970. 364 с.
35. Устинов Н.Д., Ануфриев А.В., Вольпов А.Л. и др. //Квантовая электроника. 1986. Т. 13. №5. С. 937–942.
36. Wald A. The statistical solving function theory. J. Wiley & sons. 1950. № 9. 289 p.
37. Бакут П.А. и др. Вопросы статистической теории радиолокации. М.: Сов. радио, 1963. Т. 1. 423 с.
38. Бакут П.А., Свиридов К.Н., Троицкий И.Н., Устинов Н.Д. //Радиотехника и электроника. 1977. Т. 22. №5. с. 935–939.
39. Репин В.Г., Тартаковский Г.П. Статистический синтез априорной неопределенности и адаптация информационных систем. М: Сов. радио, 1977. 458 с.
40. Сафронов А.Н., Троицкий И.Н., Харитонова О.И. //Автометрия. 1982. №5. с. 32–40.
41. Сафронов А.Н. //Автометрия. 1981. №2. с. 13–21.
42. Сафронов А.Н., Троицкий И.Н. //Системы автоматизации обработки оптической информации /Под ред. А.Г. Козачка. Новосибирск: Наука, 1984.
43. Протопопов В.В., Устинов Н.Д. Лазерное гетеродинирование. М.: Наука, 1985. 287 с.
44. Уотерс М. //Зарубежная радиоэлектроника. 1971. №7. с. 29–37.
45. Воронцов М.А., Шмальгаузен В.И. Принципы адаптивной оптики. М.: Наука, 1985. 335 с.
46. Воронцов М.А., Шмальгаузен В.И. //Квантовая электроника. 1980. Т. 7. №3. с. 500–510.
47. Воронцов М.А., Карнаухов В.Н., Кузьминский А.Л.,. Шмальгаузен В.И. //Квантовая электроника. 1984. Т. 11. №6. с. 1128–1135.
48. Ануфриев А.В., Зимин Ю.А., Вольпов А.Л. //Квантовая электроника 1987. Т. 14. №3. с. 592–599.
49. Martin A. //J. Opt. Soc. Am. 1975. V. 65. P. 858–862.
50. Ануфриев А.В., Бакут П.А., Зимин Ю.А., Толмачев А.И. //Квантовая электроника. 1985. Т. 12. №2. с. 441–443.
51. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980. 382 с.

Поступила в редакцию
18 мая 1989 г.

A.L. Vol'pov, Yu.A. Zimin, A.I. Tolmachev. **Adaptive Methods for Image Restoration.**

An overview of adaptive methods for solving the problem of vision through turbulent atmosphere is presented. The paper also presents the statement of the problem, the model of the light field and describes two approaches to the adaptation, i.e., the approach based on the measurements of phase distortions and that which uses the sharpness functions. Different known sharpness functions are considered in the paper and analysis of these functions with respect to absolute maximum is made. The paper also presents a description of the Bayes approach to the resolution of the problem on image restoration. It is shown that only some of the large number of sharpness functions have absolute maxima which are relevant for image restoration. Some methods of seeking the absolute maximum are considered and the sharpness functions analyzed from the standpoint of the possibility of seeking the absolute maximum using a successive search over the cells of an adaptive elements. It is shown that such a technique is inapplicable when the sharpness functions have secondary maxima. Based on the analysis made certain recommendations the given on the use of sharpness functions of that or another kind in different situations.