

## СТРУКТУРНЫЕ ОСОБЕННОСТИ ФЛУКТУИРУЮЩИХ ОПТИЧЕСКИХ ВОЛН ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ В АТМОСФЕРЕ

УДК: 535.5

Н.Н. Майер, В.А. Тартаковский

### ДИСЛОКАЦИИ ФАЗЫ И МИНИМАЛЬНО-ФАЗОВОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ

Обращение в нуль амплитуды волны и появление в этих точках дислокаций фазы нарушает непрерывность сигналов в фазометрических и адаптивных оптических системах и выводит их из рабочего режима. Известные описания волнового процесса либо допускают появление особых точек фазы, но становятся при этом неэффективными, либо не учитывают их, и потому имеют ограниченную область применения. Все это проявление усложнения одной и той же физической реальности. Вероятно, решение этой проблемы может быть найдено разложением волновой функции на составляющие с регулярной фазой. В данном случае рассматриваются минимально-фазовые компоненты аналитического сигнала.

#### 1. Введение

Пусть  $U(r, t)$ ,  $r\{x, y, z\}$  – действительная функция, аппроксимирующая световую волну, которая распространяется в неоднородной среде вдоль оси  $z$ , и для нее необходимо представление в следующей форме:  $U = A(r, t) \cos\Phi(r, t)$ , где  $A$  – амплитуда, а  $\Phi$  – фаза волны.

Характерной особенностью  $U$  является то, что ее фазу можно записать в виде  $\Phi = \varphi(r, t) + kz + \omega t$ . Причем величины  $k$  и  $\omega$  таковы, что преобразования Фурье колебаний  $\cos kz$  и  $\cos \omega t$  не пересекаются с преобразованиями Фурье функций  $A(r, t) \cos\varphi(r, t)$  и  $A(r, t) \sin\varphi(r, t)$  по соответствующим аргументам и являются гораздо более высокочастотными. Эти свойства световой волны могут быть наиболее естественно выражены, если  $U(r, t)$  будет целой функцией экспоненциального типа каждой из переменных. Теорема [1] позволяет такой аппроксимации быть сколь угодно точной, если

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \sup \frac{\log M(p)}{\log p} = 0,$$

где  $M(p) = \max |U'_x(r, t)|$  при  $|x| < p$ . Тем самым физические свойства – монохроматичность и параболичность – переносятся на аппроксимацию волны  $U(r, t)$ . Аппроксимация уже не будет точным решением волнового уравнения. Но в этом нет необходимости, так как понятия амплитуды и фазы существуют лишь в связи с их измерением либо определением и из волнового уравнения не следуют.

Преобразование Гильберта является единственным линейным оператором, позволяющим дать непротиворечивое определение амплитуды и фазы волнового процесса [2]. Это преобразование существует для квадратично-интегрируемых функций, для ограниченных функций и для функций, удовлетворяющих условию Гельдера. Из свойств преобразования Гильберта при сделанных предположениях о модели волны следует:

$$\mathbb{H}_t U(r, t) = \mathbb{H}_z U(r, t) \stackrel{\text{def}}{=} V(r, t) = A(r, t) \sin\Phi(r, t), \quad (1)$$

где символом  $\mathbb{H}$  обозначены операторы преобразования Гильберта по переменной  $t$  и  $z$ . Введем комплексную волновую функцию как аналитический сигнал (АС). Имея в виду выражение (1), получим:

$$W(r, t) \stackrel{\text{def}}{=} U(r, t) + i V(r, t) = A(r, t) \exp i [\varphi(r, t) + kz + \omega t]. \quad (2)$$

Аналитический сигнал может быть введен и для наклонных сечений:  $z = z_0 + x \cos \theta$  или  $t = t_0 + x/v$ . Преобразование Гильберта в этом случае будет выполняться по переменной  $x$ . Параболичность и монохроматичность волны позволяют выбрать угол  $\theta$  между осью  $z$  и плоскостью регистрации близким к  $\pi/2$ , а скорость сканирования  $v$  в плоскости  $z = \text{const}$  достаточно большой, так что  $A(r, t)$  и  $\varphi(r, t)$  в наклонных и нормальных сечениях будут неразличимы. В этом смысле определяемые АС амплитуда и фаза инвариантны относительно замены координаты, по которой выполняется преобразование Гильберта, и потому единственны.

Для логарифма аналитического сигнала  $W(r, t)$  могут быть получены [3] дисперсионные соотношения, одно из которых имеет вид:

$$\varphi(x, \bar{x}) = \text{H} \ln A(x, \bar{x}) + l(x, \bar{x}) + 2 \sum_n \arctg \frac{x - x_n(\bar{x})}{\eta_n(\bar{x})}. \quad (3)$$

Здесь символ  $\bar{x} \subset \{r, t\}$  обозначает все переменные кроме  $x$ ;  $l(x, \bar{x})$  – произвольная функция от  $\bar{x}$  и линейная от  $x$ ;  $x_n$  и  $\eta_n$  действительная и мнимая координаты нулей функции  $W(x, \bar{x})$  в комплексной полуплоскости  $x + i\eta$ ,  $\eta > 0$ .

В области, где справедлив принцип Ферма в его слабой формулировке, из множества фаз, возможных для данной интенсивности и заданных выражением (3), будет реализована только стационарная фаза, то есть должна обращаться в нуль первая вариация фазы. Варьируемой величиной может быть фазовая добавка, зависящая от координат нулей аналитического сигнала  $W(x, \bar{x})$ . Для стационарности выражения (3) необходимо, чтобы некоторые несовпадающие наборы нулей функции –  $W(x + i\eta, \bar{x}_0)$ ,  $\eta > 0$  давали бы одинаковые реализации фазы. Но это невозможно в силу единственности представления целой функции ее нулями. Поэтому фаза по (3) стационарна только тогда, когда нет нулей в верхней полуплоскости.

Из подготовительной теоремы Вейерштрасса [4, стр. 113] следует, что в области голоморфности нули аналитической функции многих комплексных переменных перемещаются по непрерывным траекториям. Поэтому нули целой функции, прежде чем появиться в какой-либо области, должны появиться на ее границе. В данном случае этой границей будет линия  $\bar{x} = \bar{x}_0$ , причем  $x$  можно заменить на  $z$  или  $t$ .

Это означает, что появлению фазовых набегов, отличных от линейных функций и не связанных с логарифмом амплитуды преобразованием Гильберта, предшествует обращение в нуль значений интенсивности поля. Известно также [5, стр.809], что слабая формулировка принципа Ферма допускает присутствие каустик, а в [6] показано совпадение области появления первых каустик с началом области сильных флуктуаций интенсивности световой волны.

Из вышеизложенного видно, что физическое явление – распространение световой волны – имеет некоторый порог сложности, после которого существующие представления этого явления содержат особые точки.

## 2. Моделирование дислокаций фазы волновой функции

Появление дислокаций фазы световой волны изучалось при ее распространении в случайно-неоднородной среде в квазимонохроматическом и параболическом приближении. Для этого применялась известная численная модель, описанная в [7, 8]. В ней для решения волнового уравнения используются метод расщепления и быстрое преобразование Фурье по алгоритму Синглтона. Волна и ее угловой спектр аппроксимируются периодическими функциями и представлены в компьютере двумерными матрицами отсчетов. Случайно-неоднородная среда моделировалась через спектральную плотность поля показателя преломления степенного типа, соответствующего атмосферной турбулентности. Длина трассы распространения равнялась 6 км, длина волны – 0,6328 мкм. Величина флуктуаций волны в неоднородной среде характеризовалась радиусом когерентности Фрида, который соответствовал как слабым, так и сильным флуктуациям интенсивности.

Как видно из рис. 1, а, дислокации фазы возникают в точках, где интенсивность достигает минимума, эти точки соответствуют нулям волновой функции или АС. В окрестностях этих

точек фаза изменяется винтообразно. По всей длине границ между черным и белым на рис. 1, б, между двумя точками зарождения дислокаций, фазовая поверхность терпит разрыв на величину  $\pm 2\pi$ . Этот разрыв неустраним за счет поступательных перемещений фрагментов поверхности. В точках дислокаций происходит дихотомия линий максимумов или минимумов интерференционной картины, появление и исчезновение интерференционных полос – (рис. 1, в, з). Линии уровня косинуса и синуса фазы в окрестности точек дислокаций образуют радиальную структуру и сходятся там (рис. 1, д, е).

Был проведен численный эксперимент для сопоставления поведения индексов мерцания волновой функции и ее углового спектра с числом появляющихся дислокаций фазы при увеличении силы турбулентности. Наличие дислокации определялось путем подсчета градиента фазы между соседними точками на замкнутом контуре вокруг анализируемой точки функции фазы. Дислокация имела место, если градиент фазы был  $\geq 2\pi$  или  $\leq -2\pi$ . Фаза вычислялась как  $\arctg$  отношения мнимой и действительной части волновой функции. Число дислокаций нормировалось на отношение числа отсчетов расчетной сетки к числу отсчетов в круге, в пределах которого определялась дислокация. Индекс мерцания волны вычислялся как нормированная дисперсия ее интенсивности, а индекс мерцания углового спектра волны как нормированная дисперсия квадрата модуля ее преобразования Фурье. Нормировка дисперсий осуществлялась на квадрат среднего значения соответствующей величины. Оценки всех трех исследуемых величин вычислялись как среднее по девяти экспериментам.

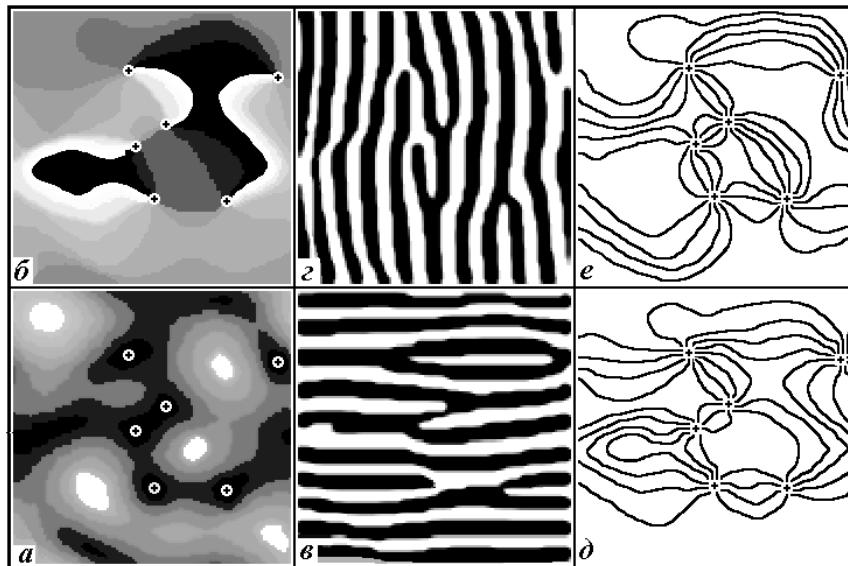


Рис. 1. Дислокации фазы волны и образуемые ими структуры. Крестиками обозначены точки нулей интенсивности и соответствующие им точки дислокаций фазы: а – интенсивность волны; б – фаза волны; в – интерференционная картина при единичной амплитуде и несущей, ортогональной горизонтальной оси координат; з – интерференционная картина при единичной амплитуде и несущей, ортогональной вертикальной оси координат; д – линии уровня для синуса фазы; е – линии уровня для косинуса фазы

Результаты эксперимента показаны на рис. 2. В области больших радиусов когерентности Фрида, что соответствует слабой турбулентности, индекс мерцания волны изменяется линейно, дислокации отсутствуют, а индекс мерцания углового спектра имеет максимальные значения. С усилением турбулентности происходит насыщение индекса мерцания волны и нормированного числа дислокаций на единичный уровень. Индекс мерцания углового спектра волны также насыщается на единичный уровень, но вид зависимости у него обратный по сравнению с двумя другими графиками.

Насыщение числа дислокаций – это предполагаемый факт, так как их плотность не может быть больше единицы, но интересно то, что максимальная плотность дислокаций достигается вместе с насыщением индексов мерцания волны и ее углового спектра.

Следует отметить также, что дислокации фазы и, соответственно, нули волновой функции появляются, когда индекс мерцания волны приближается к единице, то есть в начале области сильных флуктуаций.

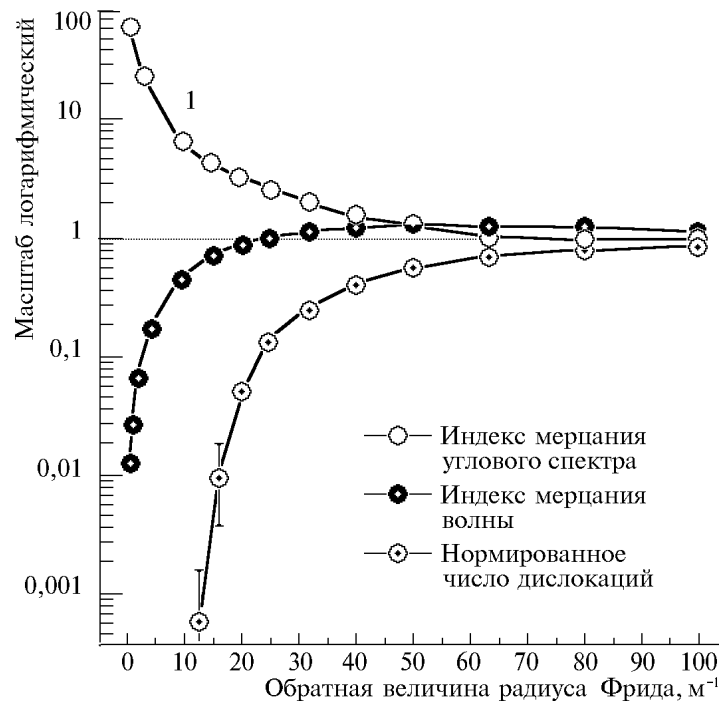


Рис. 2. Оценки индексов мерцания волны и ее углового спектра, нормированного числа дислокаций ее фазы. В качестве доверительных интервалов указаны среднеквадратические отклонения, там где их нет, они меньше размера точек на графике

### 3. Минимально-фазовые составляющие волновой функции

Выражение (3) устанавливает взаимосвязь между фазой и логарифмом амплитуды волновой функции или АС. Но сумма в правой части (3) препятствует его применению для определения фазы из амплитуды, так как положение нулей обычно неизвестно.

Вопрос о том, имеет ли функция  $W(x, \bar{x})$  нули в комплексной полуплоскости какой-либо из переменных, когда все остальные переменные принимают действительные значения, является принципиальным. Из теоремы [3, стр. 323] следует, что при ограниченности аналитического сигнала  $W(x, \bar{x})$  все его нули за исключением, быть может, множества нулевой плотности могут лежать внутри сколь угодно малых углов вблизи действительной оси. Благоприятным для наличия гильбертовой связи между фазой и логарифмом амплитуды может быть полное отсутствие нулей в комплексной полуплоскости, либо нули должны быть так далеко от интересующей нас области на оси  $x$ , чтобы сумма в правой части (3) обратилась в константу. Это соответствует локальной справедливости принципа Ферма, например, в паракиальной области.

Наиболее практична теорема Руше [4, стр. 287]. Из нее следует, что если волновая функция в плоскости наблюдения является АС по обеим координатам [9] и ее нулевой порядок по амплитуде больше суммы остальных составляющих, то такая комплексная функция не имеет нулей в комплексных полуплоскостях обеих координат плоскости наблюдения. Разумеется, действительных нулей также не будет. Фаза по (3) в этом случае будет минимальной, а волновая функция минимально-фазовой.

Если модуль углового спектра волновой функции имеет глобальный максимум достаточной величины, то ее можно разложить на четыре минимально-фазовые составляющие. Для этого необходимо глобальный максимум поместить в начало координат, после этого каждый из квадрантов спектральной плоскости вместе с началом координат будет содержать двумерный минимально-фазовый АС.

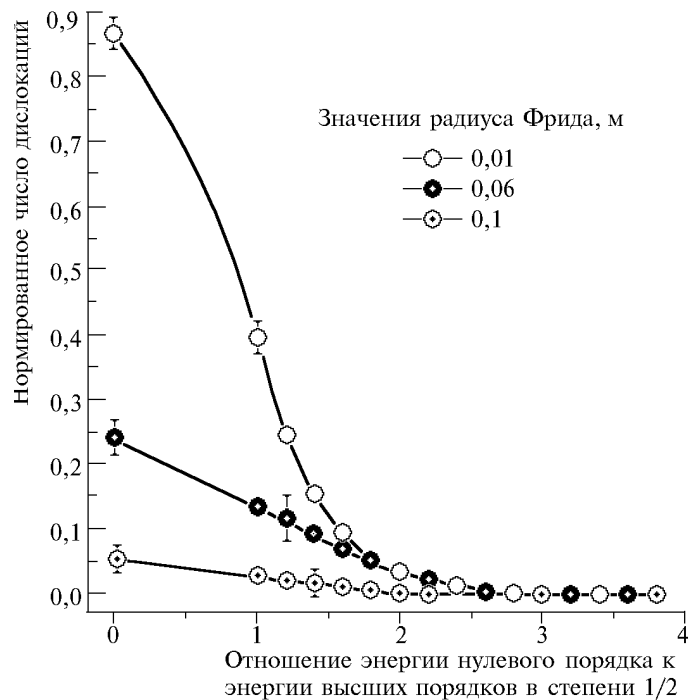


Рис. 3. Подавление дислокаций фазы путем усиления нулевого порядка волны. В качестве доверительных интервалов указаны среднеквадратические отклонения, там где их нет, они меньше размера точек на графике. Нулевая абсцисса соответствует случаю, когда нулевой порядок не изменялся

Глобальный максимум в угловом спектре может быть увеличен за счет фокусировки и аподизации волны, а также за счет усиления нулевого порядка (рис. 3) или ослабления высших порядков углового спектра. Минимально-фазовые свойства получаемых при этом волновых функций создают возможность для обращения преобразований, которым подвергается исходная волна.

Из хода кривых на рис. 3 видно, что энергия нулевого порядка должна превышать в определенное число раз энергию оставшейся части волны, для того чтобы исчезли дислокации и волна стала минимально-фазовой. Это число слабо зависит от силы флуктуаций волны и начального количества дислокаций.

Авторы благодарят Н.Н. Ботыгину и Б.В. Фортеса за помощь и полезные обсуждения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант N 94-02-03027-а.

1. Келдыш М. В. // Доклады АН СССР. 1945. Т. XLVII. N 4. С. 243–245.
2. Вакман Д. Е., Вайнштейн Л. А. // УФН. 1977. Т. 123. Вып. 4. С. 657–682.
3. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М.: Гостехиздат, 1956. 583 с.
4. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. Ч. I. Функции нескольких переменных. М.: Наука, 1976. 400 с.
5. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. Наука, 1970. 856 с.
6. Кравцов Ю. А. // ЖЭТФ. 1968. Т. 55. Вып. 3(9). С. 798-801.
7. Коляев П. А., Лукин В. П. // Известия вузов. Физика. 1983. N 2. С. 79–89.
8. Лукин В. П., Майер Н. Н., Фортес Б. В. // Оптика атмосферы. 1991. Т. 4. N 12. С. 1298-1302.
9. Тартаковский В. А., Покасов В. В. Определение огибающей и фазы в оптике и взаимосвязь между ними. Томск: ИОА СО АН СССР, 1980. 13с. Деп. в ВИНТИ, 15.01.80. N 356–80.

**N. N. Mayer, V. A. Tartakowski. Phase Dislocation and Minimally-Phase Decomposition of Wave Function**

Vanishing the wave amplitude with appearance of phase dislocations in these zero points violates the signals continuity in phase-meter and adaptive optical systems and puts them out of action. The known descriptions of wave process either admit of appearance of phase singular points becoming ineffective in so doing or do not take into account these points becoming limited in areas of application. A solution of this problem is likely to be found by resolution of wave function into components with regular phase. In this paper we consider the minimum-phase components of analytic signal.