<Оптика атмосферы и океана>, **7**, N 6 (1994)

УДК 551.521.535.31:535.36

Т.А. Сушкевич, А.К. Куликов, С.В. Максакова

К ТЕОРИИ ОПТИЧЕСКОГО ПЕРЕДАТОЧНОГО ОПЕРАТОРА

Исходя из общей краевой задачи теории переноса для плоского слоя с отражающим дном и финитными источниками, построен оптический передаточный оператор (ОПО). Ядром ОПО является функция влияния (ФВ), совпадающая с функцией размытия точки (ФРТ), или пространственно-частотная характеристика (ПЧХ), совпадающая с оптической передаточной функцией (ОПФ). ФВ и ПЧХ – универсальные линейные передаточные характеристики системы <атмосфера (океан, облачность, гидрометеоры) – подстилающая поверхность>, – определяются как решение краевой задачи теории переноса для плоского слоя с неотражающими границами и источником типа стационарного лазерного луча. Впервые сформулирован ОПО для случая горизонтально-неоднородной анизотропно отражающей границы, когда в коэффициенте отражения не расщепляются пространственные и угловые переменные. Этот ОПО наиболее общего вида представлен через линейные ФВ и ПЧХ. Все известные выражения ОПО являются частными случаями полученного результата.

Введение

В многомерных задачах радиационной коррекции при дистанционном зондировании объектов и природной среды, в обработке оптической информации, в теориях видения и передачи изображения в мутных средах, в теоретико-расчетных основах оптико-электронных систем наблюдения используются линейные приближения и эмпирические модели оптической передаточной функции (ОПФ) и функции размытия точки (ФРТ), сформулированные на физическом уровне строгости [1]. Проблемы распространения излучения в трехмерных плоских слоях, ограниченных горизонтально-неоднородными отражающими границами, сложнее, поскольку не выполняется ряд теоретических принципов, заложенных в теорию линейных систем, в частности, таких как инвариантность, теорема оптической взаимности, изопланатичность [1, 2]. Разработка нелинейных приближений метода пространственно-частотных характеристик (ПЧХ) и функций влияния (ФВ) [2] имееет принципиальное значение. Во-первых, необходимо оценить вклад нелинейных приближений в конкретных прикладных задачах. Во-вторых, важно установить явные связи регистрируемого или расчетного излучения с характеристиками отражающей границы. В-третьих, требуется сформулировать конструктивный эффективный математический подход к построению оптического передаточного оператора (ОПО) как точного или приближенного решения общей краевой задачи теории переноса излучения для плоского слоя с финитными источниками и горизонтально-неоднородной ламбертовской или анизотропно отражающей подстилающей поверхностью.

Предлагаемый подход на основе рядов теории возмущений [3–5] и обобщенного решения [2, 6–14] общей краевой задачи для уравнения переноса в рассеивающих и поглощающих средах (атмосфера, океан, облачность, гидрометеоры) с отражающим дном базируется на физических характеристиках системы переноса излучения и учитывается тот факт, что по физике рассматриваемого явления норма оператора отражения не превосходит единицу и поэтому построенные ряды сходятся. Аналитическое выделение <средней> горизонтально-однородной составляющей позволяет снизить значение нормы горизонтально-варьирующей составляющей оператора отражения и тем самым ускорить сходимость рядов.

В настоящей статье изложены новые результаты, показывающие как с помощью универсальных линейных передаточных характеристик: ОПФ, совпадающей с ПЧХ, и ФРТ, совпадающей с ФВ, можно получить решение в любом порядке приближения по кратности взаимодействия излучения с границей слоя и построить ОПО в интересах дистанционного зондирования подстилающей поверхности. Оптический передаточный оператор, сформулированный впервые для случая горизонтально-неоднородной анизотропно отражающей подстилающей поверхности, когда пространственные и угловые координаты не расщепляются, является наиболее общей формой ОПО, из которой можно получить все известные по публикациям частные представления ОПО в любых линейных или нелинейных) приближениях.

Постановка задачи

Рассмотрим плоский слой, не ограниченный в горизонтальном направлении ($-\infty < x, y < \infty$) и конечный по высоте ($0 \le z \le H$), который освещается (сверху, снизу или изнутри). Система <слой – подстилающая поверхность> на уровне $z = H$ считается немультиплицирующей (без размножения). Направление распространения излучения $s=\{\vartheta, \varphi\}$ ($\mu=\cos\vartheta$) описываем сферическими координатами: $\vartheta = \arccos \mu$, $\vartheta \in [0, \pi]$ – зенитный угол, отсчитываемый от направления внутренней нормали к верхней границе слоя $z = 0$, которая совпадает с осью z, и $\varphi \in [0, 2\pi]$ – азимут, отсчитываемый от положительного направления оси x. Множество всех направлений s образует единичную сферу $\Omega \equiv [-1, 1]\times[0, 2\pi]$ с $\mu \in [-1, 1]$ и $\varphi \in [0, 2\pi]$; $\Omega^+ \equiv [0, 1]\times[0, 2\pi]$ и $\Omega^- \equiv [-1, 0]\times[0, 2\pi]$ – полусферы для направлений распространения нисходящего (пропущенного) и восходящего (отраженного) излучения соответственно. Для удобства описания граничных условий вводим множества

$$\Gamma_0 = \{z, r_\perp, s: z = 0, s \in \Omega^+\}\ ,\quad \Gamma_H = \{z, r_\perp, s: z = H,\ \ s \in \Omega^-\}\ .$$

Как и в работе Т.А. Гермогеновой [13], используем термин *общая краевая задача* теории переноса:

$$\left\{\hat{K}\,\Phi = 0,\ \ \Phi\,\big|_{\Gamma_0} = 0,\ \ \Phi\,\big|_{\Gamma_H} = \varepsilon\,\hat{R}\,\Phi + \varepsilon\,E(r_\perp, s),\right. \tag{1}$$

если источник E и оператор отражения $\hat{R}$ не обращаются в нуль одновременно; параметр $0 < \varepsilon \le 1$.

Первая краевая задача для трехмерного уравнения переноса

$$\left\{\hat{K}\,\Phi = 0,\ \ \Phi\,\big|_{\Gamma_0} = 0,\ \ \Phi\,\big|_{\Gamma_H} = E(r_\perp, s)\right. \tag{2}$$

с линейными операторами: оператор переноса

$$\hat{D} \equiv (s, \mathrm{grad}) + \sigma(z) = \hat{D}_z + \left(s_r, \frac{Z}{Z\,r_r}\right),\quad \hat{D}_z \equiv \mu\frac{Z}{Z\,z} + \sigma(z)\ ,$$

интеграл столкновений

$$\hat{S}\Phi \equiv \sigma_s(z)\int_\Omega \gamma(z, s, s')\Phi(z, r_\perp, s')\,d\,s',$$

интегро-дифференциальный оператор $\hat{K} \equiv \hat{D} - \hat{S}$, с помощью Фурье преобразования по координате $r_\perp = \{x, y\}$:

$$\check{f}(p) \equiv F[f(r_\perp)](p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(r_\perp)\exp[\,i\,(p, r_\perp)]\,d\,r_\perp,$$

где пространственная частота $p = \{p_x, p_y\}$ принимает только действительные значения ($-\infty < p_x, p_y < \infty$), приводится к краевой задаче для параметрического комплексного одномерного уравнения переноса [2]:

$$\left\{\hat{L}(p)\,\check{\Phi} = 0,\ \ \check{\Phi}\,\big|_{\Gamma_0} = 0,\ \ \check{\Phi}\,\big|_{\Gamma_H} = \check{E}(p, s)\right. \tag{3}$$

с оператором $\hat{L}(p) \equiv \hat{D}_z - i(p, s_\perp) - \hat{S}$, $(p, s_\perp) = p_x \sin\vartheta\,\cos\varphi + p_y \sin\vartheta\,\sin\varphi$. Фурье образы помечены <галочкой>. Оптические свойства среды описываются высотными распределениями коэффициента ослабления $\sigma(z) = \sigma_s(z) + \sigma_{abs}(z)$, поглощения $\sigma_{abs}(z)$, суммарного коэффициента рассеяния $\sigma_s(z)$ и суммарной индикатрисы рассеяния $\gamma(z, s, s')$ с нормировкой $\int_\Omega \gamma(z, s, s')\,d\,s' = 1$.

По аналогии с теорией дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами [8–12], решение задачи (2) представляется в виде линейного функционала [2, 15]:

$$\Phi(z, r_\perp, s) = (\Theta, E) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega^-} d\,s^- \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Theta(s^-; z, r_\perp - r'_\perp, s)\, E(r'_\perp, s^-)\, d\,r'_\perp,$$

ядром которого является ФВ $\Theta(s^-; z, r_\perp, s)$ – решение краевой задачи

$$\left\{\hat{K}\,\Theta = 0,\ \ \Theta\big|_{\Gamma_0} = 0,\ \ \Theta\big|_{\Gamma_H} = f_\delta(s^-; r_\perp, s);\ \ f_\delta(s^-; r_\perp, s) = \delta(r_\perp)\,\delta(s - s^-),\right. \tag{4}$$

или в Фурье образах – решение задачи (3) в форме линейного функционала:

$$\check{\Phi}(z, p, s) = (\Psi, \check{E}) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega^-} \Psi(s^-; z, p, s)\, \check{E}(p, s^-)\, d\,s^-$$

с ядром ПЧХ $\Psi(s^-; z, p, s)$ – решением краевой задачи для параметрического комплексного уравнения переноса

$$\left\{\hat{L}(p)\,\Psi = 0,\ \ \ \Psi\big|_{\Gamma_0} = 0,\ \ \ \Psi\big|_{\Gamma_H} = \check{f}_\delta(s^-; p, s),\right. \tag{5}$$

где $\check{f}_\delta(s^-; p, s) = F\big[f_\delta(s^-; r_\perp, s)\big] = \delta(s - s^-)$, так как $F\,[\delta(r_\perp)] = 1$.

Функция влияния и пространственно-частотная характеристика связаны преобразованием Фурье:

$$\Theta(s^-; z, r_\perp, s) = F^{-1}\big[\Psi(s^-; z, p, s)\big];\ \ \Psi(s^-; z, p, s) = F\big[\Theta(s^-; z, r_\perp, s)\big].$$

Если для функции $f(s^-; H, r_\perp, s)$ с параметром $s^- \in \Omega^-$ определен линейный функционал

$$(\Theta, f)(s^-; z, r_\perp, s) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega^-} d\,s^{-\prime} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Theta(s^{-\prime}; z, r_\perp - r'_\perp, s)\, f(s^-; H, r'_\perp, s^{-\prime})\, d\,r'_\perp, \tag{6}$$

то его Фурье образ

$$F[(\Theta, f)] = (\Psi, \check{f}(s^-; z, p, s) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega^-} \Psi(s^{-\prime}; z, p, s)\, \check{f}(s^-; H, p, s^{-\prime})\, d\,s^{-\prime}. \tag{7}$$

Задачи (4) и (5) отвечают простейшим линейным системам переноса излучения, параметры которых не зависят от горизонтальных координат и свойств отражающей границы.

Математические модели ПЧХ, ФВ и ОПО системы переноса излучения получаем феноменологически и строго из общей краевой задачи теории переноса (1). Идея подхода заключается в следующем. Исходное трехмерное по пространству уравнение переноса заменяется системой рекуррентных уравнений для приближений ряда возмущений по параметру ε, который отвечает процессу взаимодействия излучения с границей. Методом преобразования Фурье по x и y строим фундаментальное решение. В результате осуществляется редукция краевой задачи (1) в пятимерном фазовом пространстве $R^2 \times [0, H] \times \Omega = \{x, y, z, \vartheta, \varphi)$ со сложными зависимостями источников и граничных условий от пространственных x, y и угловых ϑ, φ координат (в том числе разрывных по x, y, что приводит к решениям с особенностями и разрывами первого рода) к параметрическому набору одномерных по пространству краевых задач (5) с тремя переменными z, ϑ, φ и регулярными коэффициентами. Выделяются универсальные функции, инвариантные относительно горизонтальных вариаций и угловых зависимостей граничных условий и источников исходной задачи. Имея параметрический набор таких инвариантных функций, называемых ПЧХ, с помощью функционалов и рядов возмущений можно получить решение задач (1) с различными конкретными пространственными и угловыми структурами коэффициентов отражения и заданных источников на границе $z = H$. Построенные ряды являются рядами Неймана по кратности взаимодействия излучения с отражающей границей.

Однократный акт взаимодействия излучения с отражающей границей описываем операторами

$$[\hat{R}_v \Phi](H, r_\perp, s) \equiv \int_{\Omega^+} \Phi(H, r_\perp, s^+)\, P_v(r_\perp, s, s^+)\, d s^+;$$

$$[\hat{R}_c \Phi](H, r_\perp, s) \equiv \int_{\Omega^+} \Phi(H, r_\perp, s^+)\, P_c(s, s^+)\, d s^+; \;\; \hat{R}\, \Phi = \hat{R}_v\, \Phi + \hat{R}_c\, \Phi,$$

или их Фурье образами

$$\left[\check{R}_v\, \check{\Phi}\right](H, p, s) \equiv F[\,\hat{R}_v\, \Phi] = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\,p' \int_{\Omega^+} \check{\Phi}(H, p', s^+)\, \check{P}_v(\,p - p', s, s^+)\, d\,s^+;$$

$$\left[\hat{R}_c\, \check{\Phi}\right](H, p, s) \equiv F\,[\,\hat{R}_c\, \Phi] = \int_{\Omega^+} \check{\Phi}(H, p, s)\, P_c(s, s^+)\, d\,s^+;$$

$$\left[\check{R}\, \check{\Phi}\right](H, p, s) \equiv F[\hat{R}\, \Phi] = \check{R}_v\, \check{\Phi} + \hat{R}_c\, \check{\Phi}.$$

Процесс формирования подсветки, создаваемой в результате многократного переотражения излучения от границы с учетом вклада многократного рассеяния в среде, в зависимости от структуры характеристик отражения, описывается общей краевой задачей (1), а также общими краевыми задачами

$$\left\{\hat{K}\, \Phi_c = 0, \quad \Phi_c \,\big|_{\Gamma_0} = 0, \quad \Phi_c \,\big|_{\Gamma_H} = \varepsilon\, \hat{R}_c\, \Phi_c + \varepsilon\, E_c(r_\perp, s);\right. \tag{8}$$

$$\left\{\hat{K}\, \Phi_v = 0, \quad \Phi_v \,\big|_{\Gamma_0} = 0, \quad \Phi_v \,\big|_{\Gamma_H} = \varepsilon\, \hat{R}_v\, \Phi_v + \varepsilon\, E_v(r_\perp, s).\right. \tag{9}$$

Источники в этих задачах $E_c = \left\{\hat{R}_c\, \Phi^0, \hat{R}_c\, \Phi^H\right\}$, $E_v = \left\{\hat{R}_v\, \Phi^0, \hat{R}_v\, \Phi^H\right\}$, $E = \left\{\hat{R}\, \Phi^0, \hat{R}\Phi^H\right\}$, определяются через фоновое излучение Φ^0 или Φ^H – решение задач с источниками $E^0(r_\perp, s)$ или $E^H(r_\perp, s)$:

$$\left\{\hat{K}\, \Phi^0 = 0, \quad \Phi^0 \,\big|_{\Gamma_0} = E^0(r_\perp, s), \quad \Phi^0 \,\big|_{\Gamma_H} = 0;\right.$$

$$\left\{\hat{K}\, \Phi^H = 0, \quad \Phi^H \,\big|_{\Gamma_0} = 0, \quad \Phi^H \,\big|_{\Gamma_H} = E^H(r_\perp, s);\right.$$

Решение каждой из задач (1), (8), (9) можно искать двумя способами: либо в виде рядов по кратности отражения, либо в форме линейных функционалов, ядрами которых являются ФВ или ПЧХ, отягощенные вкладами многократного рассеяния и отражения.

Оптический передаточный оператор с горизонтально-однородным оператором отражения

Обобщенное решение общей краевой задачи (8) представимо в форме линейных фунционалов

$$\Phi_c(z, r_\perp, s) = (\Theta_c, E_c), \quad \check{\Phi}_c(z, p, s) = \left(\Psi_c, \check{E}_c\right), \tag{10}$$

ядра которых $\Theta_c(s^-; z, r_\perp, s)$ и $\Psi_c(s^-; z, p, s) = F\,[\Theta_c]$ удовлетворяют краевым задачам:

$$\left\{\hat{K}\, \Theta_c = 0, \quad \Theta_c \,\big|_{\Gamma_0} = 0, \quad \Theta_c \,\big|_{\Gamma_H} = \varepsilon\, \hat{R}_c\, \Theta_c + f_\delta\, (s^-; r_\perp, s);\right. \tag{11}$$

$$\left\{\hat{L}(\,p)\, \Psi_c = 0, \quad \Psi_c \,\big|_{\Gamma_0} = 0, \quad \Psi_c \,\big|_{\Gamma_H} = \varepsilon\, \hat{R}_c\, \Psi_c + \check{f}_\delta\, (s^-; s).\right. \tag{12}$$

Определим операции взаимодействия излучения с горизинтально-однородной границей $z = H$ через ФВ $\Theta(s^-; z, r_\perp, s)$:

$$[\hat{G}_c f](s^-;H,r_\perp,s)=\hat{R}_c(\Theta,f)=\left([\hat{R}_c\Theta],f\right)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega^-} ds^{-\prime}\int\limits_{\Omega^+} P_c(s,s^+)\,ds^+\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(s^-;r'_\perp,s^{-\prime})\,\Theta(s^{-\prime};H,r_\perp-r'_\perp,s^+)\,dr'_\perp \quad (13)$$

или через ПЧХ $\Psi(s^-;z,p,s)$:

$$[\hat{Q}_c\check{f}](s^-;H,p,s)=F[\hat{G}_c f]=\hat{R}_c(\Psi,\check{f})=\left([\hat{R}_c\Psi],\check{f}\right)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega^-}\check{f}(s^-;p,s^{-\prime})\,ds^{-\prime}\int\limits_{\Omega^+}P_c(s,s^+)\Psi(s^{-\prime};H,p,s^+)\,ds^+. \quad (14)$$

Компоненты ряда возмущений

$$\Theta_c(s^-;z,r_\perp,s)=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n\,\Theta_{cn}(s^-;z,r_\perp,s) \quad (15)$$

являются решениями системы рекуррентных задач:

$$n=0:\quad \left\{\hat{K}\,\Theta_{c0}=0,\ \Theta_{c0}\,\big|_{\Gamma_0}=0,\quad \Theta_{c0}\,\big|_{\Gamma_H}=f_\delta\,(s^-;r_\perp,s);\right.$$

$$n\geq 1:\quad \left\{\hat{K}\,\Theta_{cn}=0,\ \Theta_{cn}\,\big|_{\Gamma_0}=0,\quad \Theta_{cn}\,\big|_{\Gamma_H}=[\hat{R}_c\Theta_{cn-}](s^-;H,r_\perp,s),\right.$$

и представляются в виде нелинейных функционалов ($\Theta_{c0}=(\Theta,f_\delta)=\Theta$):

$$\Theta_{c1}(s^-;z,r_\perp,s)=(\Theta,\hat{R}_c\,\Theta)=\left(\Theta,[\hat{R}_c(\Theta,f_\delta)]\right)=\left(\Theta,\hat{G}_c f_\delta\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega^-} d\,s_1^-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Theta(s_1^-;z,r_\perp-r_{\perp 1},s)[\hat{R}_c\Theta](s^-;H,r_{\perp 1},s_1^-)\,d\,r_{\perp 1}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega^-} d\,s_1^-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Theta(s_1^-;z,r_\perp-r_{\perp 1},s)\,d\,r_{\perp 1}\int\limits_{\Omega^+}\Theta(s^-;H,r_{\perp 1},s_0^+)\,P_c(s_1^-,s_0^+)\,d\,s_0^+;$$

$$\Theta_{cn}(s^-;z,r_\perp,s)=(\Theta,\hat{R}_c,\Theta_{cn-1})=\left(\Theta,\hat{G}_c^n f_\delta\right)=\left(\Theta,\hat{G}_c^{n-1}\,[\hat{R}_c\Theta]\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega^-} d\,s_n^-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Theta(s_n^-;z,r_\perp-r_{\perp n},s)\,d\,r_{\perp n}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega^-} d\,s_{n-1}^-\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\,r_{\perp n-1}\times$$

$$\times\int\limits_{\Omega^+}P_c(s_n^-,s_{n-1}^+)\,\Theta(s_{n-1}^-;H,\ r_{\perp n}-r_{\perp n-1},s_{n-1}^+)\,d\,s_{n-1}^+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega^-} d\,s_{n-2}^-\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\,r_{\perp n-2}\times$$

$$\times\int\limits_{\Omega^+}P_c(s_{n-1}^-,s_{n-2}^+)\,\Theta(s_{n-2}^-;H,r_{\perp n-1}-r_{\perp n-2},s_{n-2}^+\,d\,s_{n-2}^+\times$$

$$\times\ldots\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega^-} d\,s_2^-\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\,r_{\perp 2}\int\limits_{\Omega^+}P_c(s_3^-,s_2^+)\,\Theta(s_2^-;H,r_{\perp 3}-r_{\perp 2},s_2^+)\,d\,s_2^+\times$$

$$\times\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega^-} d\,s_1^-\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\,r_{\perp 1}\int\limits_{\Omega^+}P_c(s_2^-,s_1^+)\,\Theta(s_1^-;H,r_{\perp 2}-r_{\perp 1},s_1^+)\,d\,s_1^+\times$$

$$\times\int\limits_{\Omega^+}P_c(s_1^-,s_0^+)\,\Theta(s^-;H,r_{\perp 1},s_0^+)\,d\,s_0^+=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega^-} d\,s_n^-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Theta(s_n^-;z,r_\perp-r_{\perp n},s)\,d\,r_{\perp n}\times$$

$$\times\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega^-} d\,s_{n-1}^-\int\limits_{-\infty}^{\infty}[\hat{R}_c\,\Theta](\,s_{n-1}^-;H,r_{\perp n}-r_{\perp n-1},s_n^-)\,d\,r_{\perp n-1}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega^-} d\,s_{n-2}^-\times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{R}_c \Theta]\,(s_{n-2}^-; H, r_{\perp n-1} - r_{\perp n-2}, s_{n-1}^-)\; d\,r_{\perp n-2} \ldots \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^-} d\,s_2^- \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{R}_c \Theta]\,(s_2^-; H,\; r_{\perp 3} - r_{\perp 2}, s_3^-)\; d\,r_{\perp 2} \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^-} d\,s_1^- \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{R}_c \Theta]\,(s_1^-; H, r_{\perp 2} - r_{\perp 1}, s_2^-)\; [\hat{R}_c \Theta]\,(s^-; H, r_{\perp 1}, s_1^-)\; d\,r_{\perp 1}.$$

Сумма ряда (15) – точное решение общей краевой задачи (11):

$$\Theta_c(s^-; z, r_\perp, s) = \sum_{n=0}^{\infty} (\Theta, \hat{G}_c^n f_\delta) = (\Theta, \hat{Y}_c\, f_\delta), \tag{16}$$

где

$$\hat{Y}_c\, f_\delta \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \hat{G}_c^n f_\delta = [\hat{E} - \hat{G}_c]^{-1} f_\delta \tag{17}$$

– сумма ряда Неймана по кратности взаимодействия излучения с горизонтально-однородной анизотропно отражающей границей.

Члены параметрического ряда

$$\Psi_c(s^-; z, p, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \Psi_{cn}(s^-; z, p, s) \tag{18}$$

удовлетворяют системе рекуррентных задач:

$$n = 0:\quad \{\hat{L}(p)\, \Psi_{c0} = 0,\quad \Psi_{c0}\,\big|_{\Gamma_0} = 0,\quad \Psi_{c0}\,\big|_{\Gamma_H} = \check{f}_\delta(s^-; s);$$

$$n \geq 1:\quad \{\hat{L}(p)\, \Psi_{cn} = 0,\quad \Psi_{cn}\,\big|_{\Gamma_0} = 0,\quad \Psi_{cn}\,\big|_{\Gamma_H} = [\hat{R}_c\, \Psi_{cn-1}](s^-; H, p, s),$$

и для $n \geq 1$ определяются как нелинейные функционалы (очевидно, что $\Psi_{c0} = (\Psi, \check{f}_\delta) = \Psi$):

$$\Psi_{c1}(s^-; z, p, s) = (\Psi, \hat{R}_c\, \Psi) = (\Psi, [\hat{R}_c\, (\Psi, \check{f}_\delta)]) = (\Psi, \hat{Q}_c \check{f}_\delta) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^-} \Psi(s_1^-; z, p, s)\; [\hat{R}_c\, \Psi](s^-; H, p, s_1^-)\; d\,s_1^- =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^-} \Psi(s_1^-; z, p, s)\; d\,s_1^- \int_{\Omega^+} P_c(s_1^-, s_0^+)\; \Psi(s^-; H, p, s_0^+)\; d\,s_0^+;$$

$$\Psi_{cn}(s^-; z, p, s) = (\Psi, \hat{R}_c\, \Psi_{cn-1}) = (\Psi, \hat{Q}_c^n \check{f}_\delta) = (\Psi, \hat{Q}_c^{n-1}[\hat{R}_c\, \Psi]) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^-} \Psi(s_n^-; z, p, s) [\hat{Q}_c^n \check{f}_\delta](s^-; H, p, s_n^-)\; d\,s_n^- = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^-} \Psi(s_n^-; z, p, s)\; d\,s_n^- \times$$

$$\times \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^-} [\hat{R}_c\, \Psi](s_{n-1}^-; H, p, s_n^-)\; d\,s_{n-1}^- \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^-} [\hat{R}_c\, \Psi](s_{n-2}^-; H, p, s_{n-1}^-)\; d\,s_{n-2}^- \times$$

$$\times \ldots \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^-} [\hat{R}_c\, \Psi](s_2^-; H, p, s_3^-)\; d\,s_2^- \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^-} [\hat{R}_c\, \Psi](s_1^-; H, p, s_2^-) \times$$

$$\times [\hat{R}_c\, \Psi](s^-; H, p, s_1^-)\; d\,s_1^- = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^-} \Psi(s_n^-; z, p, s)\; d\,s_n^- \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^-} d\,s_{n-1}^- \times$$

$$\times \int_{\Omega^+} P_c(s_n^-, s_{n-1}^+)\; \Psi(s_{n-1}^-; H, p, s_{n-1}^+)\; d\,s_{n-1}^+ \;\frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^-} d\,s_{n-2}^- \times$$

$$\times \int_{\Omega^+} P_c(s_{n-1}^-, s_{n-2}^+)\, \Psi(s_{n-2}^-; H, p, s_{n-2}^+)\, d\, s_{n-2}^+ \times$$

$$\times \ldots \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^-} d\, s_2^- \int_{\Omega^+} P_c(s_3^-, s_2^+)\, \Psi(s_2^-; H, p, s_2^+)\, d\, s_2^+ \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^-} d\, s_1^- \times$$

$$\times \int_{\Omega^+} P_c(s_2^-, s_1^+)\, \Psi(s_1^-; H, p, s_1^+)\, d\, s_1^+ \int_{\Omega^+} P_c(s_1^-, s_0^+)\, \Psi(s^-; H, p, s_0^+)\, d\, s_0^+ .$$

Сумма ряда (18) – точное решение задачи (12):

$$\Psi_c = \sum_{n=0}^{\infty} (\Psi, \hat{Q}_c^n \check{f}_\delta) = (\Psi, \hat{Z}_c \check{f}_\delta), \tag{19}$$

где

$$\hat{Z}_c \check{f}_\delta \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \hat{Q}_c^n \check{f}_\delta = [\hat{E} - \hat{Q}_c]^{-1} \check{f}_\delta \tag{20}$$

– сумма ряда Неймана по кратности взаимодействия излучения с отражающей границей (в терминах образов Фурье).

Если ввести ряд по кратности отражения от границы

$$\Phi_c(z, r_\perp, s) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Phi_{ck}(z, r_\perp, s), \tag{21}$$

члены которого являются решениями системы рекуррентных задач:

$$k = 1: \quad \{\hat{K}\, \Phi_{c1} = 0, \quad \Phi_{c1}\big|_{\Gamma_0} = 0, \quad \Phi_{c1}\big|_{\Gamma_H} = E_c(r_\perp, s);$$

$$k \geq 2: \quad \{\hat{K}\, \Phi_{ck} = 0, \quad \Phi_{ck}\big|_{\Gamma_0} = 0, \quad \Phi_{ck}\big|_{\Gamma_H} = [\hat{R}_c\, \Phi_{ck-1}](H, r_\perp, s),$$

то получим следующие представления:

$$\Phi_{c1}(z, r_\perp, s) = (\Theta, E_c) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^-} d\, s_1^- \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(s_1^-; z, r_\perp - r_{\perp 1}, s)\, E_c(r_{\perp 1}, s_1^-)\, d\, r_{\perp 1};$$

$$\Phi_{ck}(z, r_\perp, s) = (\Theta, \hat{G}_c^{k-1} E_c) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^-} d\, s_k^- \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(s_k^-; z, r_\perp - r_{\perp k}, s)\;\, d\, r_{\perp k} \times$$

$$\times \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^-} d\, s_{k-1}^- \int_{-\infty}^{\infty} d\, r_{\perp k-1} \int_{\Omega^+} P_c(s_k^-, s_{k-1}^+) \Theta(s_{k-1}^-; H, r_{\perp k} - r_{\perp k-1}, s_{k-1}^+)\, d\, s_{k-1}^+ \times$$

$$\times \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^-} d\, s_{k-2}^- \int_{-\infty}^{\infty} d\, r_{\perp k-2} \int_{\Omega^+} P_c(s_{k-1}^-, s_{k-2}^+) \Theta(s_{k-2}^-; H, r_{\perp k-1} - r_{\perp k-2}, s_{k-2}^+)\, d\, s_{k-2}^+ \times$$

$$\times \ldots \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^-} d\, s_2^- \int_{-\infty}^{\infty} d\, r_{\perp 2} \int_{\Omega^+} P_c(s_3^-, s_2^+)\, \Theta(s_2^-; H, r_{\perp 3} - r_{\perp 2}, s_2^+)\, d\, s_2^+ \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^-} d\, s_1^- \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} E_c(r_{\perp 1}, s_1^-)\, d\, r_{\perp 1} \int_{\Omega^+} P_c(s_2^-, s_1^+) \Theta(s_1^-; H, r_{\perp 2} - r_{\perp 1}, s_1^+)\, d\, s_1^+ =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^-} d\, s_k^- \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(s_k^-; z, r_\perp - r_{\perp k}, s)\, d\, r_{\perp k} \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^-} d\, s_{k-1}^- \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{R}_c\,\Theta](s_{k-1}^-;\, H, r_{\perp k} - r_{\perp k-1}, s_k^-)\, d\, r_{\perp k-1} \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^-} d\, s_{k-2}^- \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{R}_c\,\Theta](s_{k-2}^-;\, H, r_{\perp k-1} - r_{\perp k-2}, s_{k-1}^-)\, d\, r_{\perp k-2} \ldots \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^-} d\, s_2^- \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{R}_c\,\Theta](s_2^-;\, H, r_{\perp 3} - r_{\perp 2}, s_3^-)\, d\, r_{\perp 2} \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^-} d\, s_1^- \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} E_c(r_{\perp 1}, s_1^-) [\hat{R}_c\,\Theta]\, (s_1^-;\, H, r_{\perp 2} - r_{\perp 1}, s_2^-)\, d\, r_{\perp 1}\,.$$

Сумма ряда (21) – точное решение задачи (8):

$$\Phi_c(z, r_\perp, s) = \sum_{k=1}^{\infty} (\Theta, \hat{G}_c^{k-1} E_c) = (\Theta, \hat{Y}_c E_c), \tag{22}$$

где

$$\hat{Y}_c E_c \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \hat{G}_c^{k-1} E_c = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{G}_c^{k} E_c [\hat{E} - \hat{G}_c]^{-1} E_c \tag{23}$$

–сумма ряда Неймана по кратности взаимодействия излучения с отражающей границей.

Представление (10) через ФВ Θ_c позволяет получить решение задачи (8) при разных заданных источниках E_c с заранее рассчитанным влиянием однородной отражающей границы. Члены ряда (21) выражаются через ФВ Θ и являются при $k \geq 2$ нелинейными функционалами, описывающими адекватно k-кратный процесс взаимодействия излучения с отражающей границей при заданной облученности границы E_c.

В образах Фурье:

$$\check{\Phi}_c(z, p, s) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \check{\Phi}_{ck}(z, p, s), \tag{24}$$

где члены ряда – решение системы рекуррентных задач:

$$k = 1: \quad \{\hat{L}(p)\, \check{\Phi}_{c1} = 0, \quad \check{\Phi}_{c1}\,\big|_{\Gamma_0} = 0, \quad \check{\Phi}_{c1}\,\big|_{\Gamma_H} = \check{E}_c(p, s);$$

$$k \geq 2: \quad \{\hat{L}(p)\, \check{\Phi}_{ck} = 0, \quad \check{\Phi}_{ck}\,\big|_{\Gamma_0} = 0, \quad \check{\Phi}_{ck}\,\big|_{\Gamma_H} = [\hat{R}_c\, \check{\Phi}_{ck-1}](H, p, s),$$

при $k \geq 2$ представляются как нелинейные функционалы:

$$\check{\Phi}_{c1}(z, p, s) = (\Psi, \check{E}_c) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^-} \Psi(s_1^-;\, z, p, s)\, \check{E}_c(p, s_1^-)\, d\, s_1^-;$$

$$\check{\Phi}_{ck}(z, p, s) = (\Psi, \hat{Q}_c^{k-1} \check{E}_c) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^-} \Psi(s_k^-;\, z, p, s)\, d\, s_k^- \times$$

$$\times \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^-} [\hat{R}_c \Psi](s_{k-1}^-;\, H, p, s_k^-)\, d\, s_{k-1}^- \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^-} [\hat{R}_c \Psi](s_{k-2}^-;\, H, p, s_{k-1}^-)\, d\, s_{k-2}^- \times$$

$$\times \ldots \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^-} [\hat{R}_c \Psi](s_2^-;\, H, p, s_3^-)\, d\, s_2^- \; \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^-} [\hat{R}_c \Psi](s_1^-;\, H, p, s_2^-)\, \check{E}_c(p, s_1^-)\, d\, s_1^- =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Omega^-} \Psi(s_k^-; z, p, s)\, d\, s_k^- \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Omega^-} d\, s_{k-1}^- \int\limits_{\Omega^+} P_c(s_k^-, s_{k-1}^+)\, \Psi(s_{k-1}^-; H, p, s_{k-1}^+)\, d\, s_{k-1}^+ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Omega^-} d\, s_{k-2}^- \int\limits_{\Omega^+} P_c(s_{k-1}^-, s_{k-2}^+) \times$$

$$\times \Psi\,(s_{k-2}^-; H, p, s_{k-2}^+)\, d\, s_{k-2}^+ \ldots \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Omega^-} d\, s_2^- \int\limits_{\Omega^+} P_c(s_3^-, s_2^+)\, \Psi(s_2^-; H, p, s_2^+)\, d\, s_2^+ \times$$

$$\times \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Omega^-} \check{E}_c(\, p, s_1^-)\, d\, s_1^- \int\limits_{\Omega^+} P_c(s_2^-, s_1^+)\, \Psi(s_1^-; H, p, s_1^+)\, d\, s_1^+.$$

Сумма ряда (24) – точное решение образа Фурье задачи (8):

$$\check{\Phi}_c(z, p, s) = \sum_{k=1}^{\infty} (\Psi, \hat{Q}_c^{k-1}\, \check{E}_c) = (\Psi, \hat{Z}_c\, \check{E}_c), \tag{25}$$

где

$$\hat{Z}_c\, \check{E}_c \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \hat{Q}_c^{k-1}\, \check{E}_c = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{Q}_c^{k}\, \check{E}_c = [\hat{E} - \hat{Q}_c]^{-1}\, \check{E}_c \tag{26}$$

–сумма ряда Неймана в терминах Фурье образов.

Оптический передаточный оператор с горизонтально-неоднородным оператором отражения без разделения и с разделением пространственных и угловых зависимостей

Краевая задача (9) разрешима с помощью линейных функционалов

$$\Phi_v(z, r_\perp, s) = (\Theta_v, E_v)\,, \quad \check{\Phi}_v(z, p, s) = (\Psi_v, \check{E}_v), \tag{27}$$

где ФВ $\Theta_v(s^-; z, r_\perp, s)$ – решение общей краевой задачи

$$\{\hat{K}\, \Theta_v = 0, \quad \Theta_v\,|_{\Gamma_0} = 0, \quad \Theta_v\,|_{\Gamma_\text{H}} = \varepsilon\, \hat{R}_v \Theta_v + f_\delta\,(s^-; r_\perp, s), \tag{28}$$

а ПЧХ $\Psi_v(s^-; z, p, s) = F[\Theta_v]$ – решение комплексного уравнения переноса

$$\{\hat{L}(p)\, \Psi_v = 0, \quad \Psi_v\,|_{\Gamma_0} = 0, \quad \Psi_v\,|_{\Gamma_\text{H}} = \varepsilon\, \check{R}_v \Psi_v + \check{f}_\delta\,(s^-; s). \tag{29}$$

Введем операции взаимодействия излучения с границей через ФВ Θ:

$$[\hat{G}_v\, f]\,(s^-; H, r_\perp, s) = \hat{R}_v(\Theta, f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Omega^-} d\, s^{-\prime} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(s^-; r'_\perp, s^{-\prime})\, d\, r'_\perp \int\limits_{\Omega^+} P_v(r_\perp, s, s^+) \Theta(s^{-\prime}; H, r_\perp - r'_r, s^+)\, d\, s^+ \tag{30}$$

или через ПЧХ Ψ [15]:

$$[\, \hat{Q}_v \check{f}](s^-; H, p, s) = F\, [\hat{G}_v\, f] = \check{R}_v\,(\Psi, \check{f}) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Omega^-} d\, s^{-\prime} \times$$

$$\times \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \check{f}(s^-; p', s^{-\prime})\, d\, p' \int\limits_{\Omega^+} \check{P}_v(\, p - p', s, s^+) \Psi(s^{-\prime}; H, p', s^+)\, d\, s^+. \tag{31}$$

Компоненты ряда возмущений

$$\Theta_v(s^-; z, r_\perp, s) = \sum_{n=0}^{\infty} (\varepsilon^{\,n}\, \Theta_{vn}(s^-; z, r_\perp, s) \tag{32}$$

удовлетворяют системе рекуррентных задач:

$$n = 0: \quad \{\hat{K}\, \Theta_{v0} = 0, \quad \Theta_{v0}\,|_{\Gamma_0} = 0, \quad \Theta_{v0}\,|_{\Gamma_H} = f_\delta(s^-; r_\perp, s);$$

$$n \ge 1: \quad \{\hat{K}\,\Theta_{vn} = 0, \quad \Theta_{vn}\,|_{\Gamma_0} = 0, \;\; \Theta_{vn}\,|_{\Gamma_H} = [\hat{R}_v\,\Theta_{vn-1}](s^-; H, r_\perp, s)$$

и представляются в виде функционалов ($\Theta_{v0} = (\Theta, f_\delta) = \Theta$):

$$\Theta_{v1}(s^-; z, r_\perp, s) = (\Theta, \hat{R}_v\,\Theta) = (\Theta, \hat{G}_v f_\delta) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Omega^-} d\,s_1^- \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(s_1^-; z, r_\perp - r_{\perp 1}, s)\times$$

$$\times\,[\hat{R}_v\,\Theta](s^-; H, r_{\perp 1}, s_1^-)\,d\,r_{\perp 1} = \frac{1}{2\pi}\int_{\Omega^-} d\,s_1^- \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(s_1^-; z, r_\perp - r_{\perp 1}, s)\,d\,r_{\perp 1}\int_{\Omega^+} P_v(r_{\perp 1}, s_1^-, s_0^+)\Theta(s^-; H, r_{\perp 1}, s_0^+)\,d\,s_0^+;$$

$$\Theta_{vn}(s^-; z, r_\perp, s) = (\Theta, \hat{R}_v\,\Theta_{vn-1}) = (\Theta, \hat{G}_v^n f_\delta) = (\Theta, \hat{G}_v^{n-1}\,[\hat{R}_v\,\Theta]) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\Omega^-} d\,s_n^- \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(s_n^-; z, r_\perp - r_{\perp n}, s)\,d\,r_{\perp n}\,\frac{1}{2\pi}\int_{\Omega^-} d\,s_{n-1}^- \int_{-\infty}^{\infty} d\,r_{\perp n-1}\times$$

$$\times \int_{\Omega^+} P_v(r_{\perp n}, s_n^-, s_{n-1}^+)\Theta(s_{n-1}^-; H, r_{\perp n} - r_{\perp n-1}, s_{n-1}^+)\,d\,s_{n-1}^+$$

$$\times \ldots \frac{1}{2\pi}\int_{\Omega^-} d\,s_2^- \int_{-\infty}^{\infty} d\,r_{\perp 2}\int_{\Omega^+} P_v(r_{\perp 3}, s_3^-, s_2^+)\Theta(s_2^-; H, r_{\perp 3} - r_{\perp 2}, s_2^+)\,d\,s_2^+ \times$$

$$\times \frac{1}{2\pi}\int_{\Omega^-} d\,s_1^- \int_{-\infty}^{\infty} d\,r_{\perp 1}\int_{\Omega^+} P_v(r_{\perp 2}, s_2^-, s_1^+)\Theta(s_1^-; H, r_{\perp 2} - r_{\perp 1}, s_1^+)\,d\,s_1^+ \int_{\Omega^+} P_v(r_{\perp 1}, s_1^-, s_0^+)\Theta(s^-; H, r_{\perp 1}, s_0^+)\,d\,s_0^+.$$

Сумма ряда (32) – точное решение общей краевой задачи (28):

$$\Theta_v(s^-; z, r_\perp, s) = \sum_{n=0}^{\infty} (\Theta, \hat{G}_v^n f_\delta) = (\Theta, \hat{Y}_v f_\delta), \tag{33}$$

где

$$\hat{Y}_v f_\delta \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \hat{G}_v^n f_\delta = [\hat{E} - \hat{G}_v]^{-1} f_\delta \tag{34}$$

– ряд Неймана по кратности взаимодействия излучения с горизонтально-неоднородной анизотропно отражающей границей.

Члены параметрического ряда

$$\Psi_v(s^-; z, p, s) = \sum_{n=0}^{\infty} (\varepsilon^{\,n}\,\Psi_{vn}(s^-; z, p, s) \tag{35}$$

являются решениями системы рекуррентных задач:

$$n = 0: \quad \{\hat{L}(p)\,\Psi_{v0} = 0, \quad \Psi_{v0}\,|_{\Gamma_0} = 0, \quad \Psi_{v0}\,|_{\Gamma_H} = \check{f}_d(s^-; s);$$

$$n \ge 1: \quad \{\hat{L}(p)\,\Psi_{vn} = 0, \quad \Psi_{vn}\,|_{\Gamma_0} = 0, \quad \Psi_{vn}\,|_{\Gamma_H} = [\check{R}_v\,\Psi_{vn-1}](s^-; H, p, s),$$

и для $n \ge 1$ находятся с помощью нелинейных функционалов ($\Psi_{v0} = (\Psi, \check{f}_\delta) = \Psi$):

$$\Psi_{v1}(s^-; z, p, s) = (\Psi, \check{R}_v\,\Psi) = (\Psi, \hat{Q}_v \check{f}_\delta) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Omega^-} \Psi(s_1^-; z, p, s)\,[\check{R}_v\,\Psi]\,(s^-; H, p, s_1^-)\,d\,s_1^- =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\Omega^-} \Psi(s_1^-; z, p, s)\,d\,s_1^-\,\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty} d\,p_0 \int_{\Omega^+} \check{P}_v(p - p_0, s_1^-, s_0^+)\Psi(s^-; H, p_0, s_0^+)\,d\,s_0^+;$$

$$\Psi_{vn}(s^-; z, p, s) = (\Psi, \check{R}_v \Psi_{vn-1}) = (\Psi, \hat{Q}_v^{n-1}[\check{R}_v \Psi]) = (\Psi, \hat{\Psi}_v^n \check{f}_\delta) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^-} \Psi(s_n^-; z, p, s)\, d s_n^- \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^-} d s_{n-1}^- \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d p_{n-1} \times$$

$$\times \int_{\Omega^+} \check{P}_v(p - p_{n-1}, s_n^-, s_{n-1}^+)\, \Psi(s_{n-1}^-; H, p_{n-1}, s_{n-1}^+)\, d s_{n-1}^+ \times$$

$$\times \ldots \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^-} d s_2^- \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d p_2 \int_{\Omega^+} \check{P}_v(p_3 - p_2, s_3^-, s_2^+)\, \Psi(s_2^-; H, p_2, s_2^+)\, d s_2^+ \times$$

$$\times \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^-} d s_1^- \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d p_1 \int_{\Omega^+} \check{P}_v(p_2 - p_1, s_2^-, s_1^+)\, \Psi(s_1^-; H, p_1, s_1^+)\, d s_1^+ \times$$

$$\times \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d p_0 \int_{\Omega^+} \check{P}_v(p_1 - p_0, s_1^-, s_0^+)\, \Psi(s^-; H, p_0, s_0^+)\, d s_0^+.$$

Сумма ряда (35) – точное решение задачи (29):

$$\Psi_v(s^-; z, p, s) = \sum_{n=0}^{\infty} (\Psi, \hat{Q}_v^n \check{f}_\delta) = (\Psi, \hat{Z}_v \check{f}_\delta), \tag{36}$$

где

$$\hat{Z}_v \check{f}_\delta \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \hat{Q}_v^n \check{f}_\delta = [\hat{E} - \hat{Q}_v]^{-1} \check{f}_\delta \tag{37}$$

– сумма ряда Неймана по кратности взаимодействия излучения с границей (в терминах Фурье образов).

Если ввести ряд по кратности отражения от границы

$$\Phi_v(z, r_\perp, s) = \sum_{k=1}^{\infty} (\varepsilon^k \Phi_{vk}(z, r_\perp, s), \tag{38}$$

члены которого находятся из системы рекуррентных задач:

$$k = 1: \quad \{\hat{K}\, \Phi_{v1} = 0, \quad \Phi_{v1}\big|_{\Gamma_0} = 0, \quad \Phi_{v1}\big|_{\Gamma_H} = E_v(r_\perp, s);$$

$$k \geq 2: \quad \{\hat{K}\, \Phi_{vk} = 0, \quad \Phi_{vk}\big|_{\Gamma_0} = 0, \quad \Phi_{vk}\big|_{\Gamma_H} = [\hat{R}_v\, \Phi_{vk-1}](H, r_\perp, s),$$

то

$$\Phi_{v1} = (\Theta, E_v) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^-} d s_1^- \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(s_1^-; z, r_\perp - r_{\perp 1}, s)\, E_v(r_{\perp 1}, s_1^-)\, d r_{\perp 1};$$

$$\Phi_{vk}(z, r_\perp, s) = (\Theta, \hat{R}_v\, \Phi_{vk-1}) = (\Theta, \hat{G}_v^{k-1} E_v) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^-} d s_k^- \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(s_k^-; z, r_\perp - r_{\perp k}, s)\, d r_{\perp k} \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^-} d s_{k-1}^- \int_{-\infty}^{\infty} d r_{\perp k-1} \times$$

$$\times \int_{\Omega^+} P_v(r_{\perp k}, s_k^-, s_{k-1}^+) \Theta(s_{k-1}^-; H, r_{\perp k} - r_{\perp k-1}, s_{k-1}^+)\, d s_{k-1}^+ \times$$

$$\times \ldots \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^-} d s_2^- \int_{-\infty}^{\infty} d r_{\perp 2} \int_{\Omega^+} P_v(r_{\perp 3}, s_3^-, s_2^+) \Theta(s_2^-; H, r_{\perp 3} - r_{\perp 2}, s_2^+)\, d s_2^+ \times$$

$$\times \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^-} d s_1^- \int_{-\infty}^{\infty} E_v(r_{\perp 1}, s_1^-)\, d r_{\perp 1} \int_{\Omega^+} P_v(r_{\perp 2}, s_2^-, s_1^+) \Theta(s_1^-; H, r_{\perp 2} - r_{\perp 1}, s_1^+)\, d s_1^+.$$

Сумма ряда (38) – точное решение общей краевой задачи (9):

$$\Phi_v(z, r_\perp, s) = \sum_{k=1}^{\infty} (\Theta, \hat{G}_v^{k-1} E_v) = (\Theta, \hat{Y}_v E_v), \tag{39}$$

где

$$\hat{Y}_v E_v \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \hat{G}_v^{k-1} E_v = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{G}_v^{k} E_v = [\hat{E} - \hat{G}_v]^{-1} E_v \tag{40}$$

– сумма ряда Неймана по кратности отражения от границы.

В терминах Фурье образов

$$\check{\Phi}_v(z, p, s) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \check{\Phi}_{vk}(z, p, s), \tag{41}$$

где компоненты – решение системы рекуррентных задач:

$$k = 1: \quad \{\hat{L}(p)\, \check{\Phi}_{v1} = 0, \quad \check{\Phi}_{v1}\,|_{\Gamma_0} = 0, \quad \check{\Phi}_{v1}\,|_{\Gamma_H} = \check{E}_v(p, s);$$

$$k \geq 2: \quad \{\hat{L}(p)\, \check{\Phi}_{vk} = 0, \quad \check{\Phi}_{vk}\,|_{\Gamma_0} = 0, \quad \check{\Phi}_{vk}\,|_{\Gamma_H} = [\check{R}_v\, \check{\Phi}_{vk-1}](H, p, s),$$

определяются как функционалы:

$$\check{\Phi}_{v1}(z, p, s) = (\Psi, \check{E}_v) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^-} \Psi(s_1^-; z, p, s) \check{E}_v(p, s_1^-)\, d s_1^-;$$

$$\check{\Phi}_{vk}(z, p, s) = (\Psi, \check{R}_v\, \check{\Phi}_{vk-1}) = (\Psi, \hat{Q}_v^{k-1} \check{E}_v) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^-} \Psi\,(s_k^-; z, p, s)\, d s_k^- \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^-} d s_{k-1}^- \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d p_{k-1} \times$$

$$\times \int_{\Omega^+} \check{P}_v(p - p_{k-1}, s_k^-, s_{k-1}^+) \Psi(s_{k-1}^-; H, p_{k-1}, s_{k-1}^+)\, d s_{k-1}^+ \times$$

$$\times \ldots \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^-} d s_2^- \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d p_2 \int_{\Omega^+} \check{P}_v(p_3 - p_2, s_3^-, s_2^+) \Psi(s_2^-; H, p_2, s_2^+)\, d s_2^+ \times$$

$$\times \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^-} d s_1^- \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \check{E}_v(p_1, s_1^-)\, d p_1 \int_{\Omega^+} \check{P}_v(p_2 - p_1, s_2^-, s_1^+) \Psi(s_1^-; H, p_1, s_1^+)\, d s_1^+ .$$

Сумма ряда (41) – точное решение задачи (9) в Фурье образах:

$$\check{\Phi}_v(z, p, s) = \sum_{k=1}^{\infty} (\Psi, \hat{Q}_v^{k-1} \check{E}_v) = (\Psi, \hat{Z}_v \check{E}_v), \tag{42}$$

где

$$\hat{Z}_v \check{E}_v \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \hat{Q}_v^{k-1} \check{E}_v = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{Q}_v^{k} \check{E}_v = [\hat{E} - \hat{Q}_v]^{-1} \check{E}_v \tag{43}$$

– сумма ряда Неймана по кратности отражения от границы (в терминах Фурье образов).

Если в ядре оператора отражения расщепляются пространственные и угловые зависимости (этот случай рассмотрен в [2]):

$$P_v(r_\perp, s, s^+) = q(r_\perp)\, P_c(s, s^+), \quad [\hat{R}_v\, \Phi](H, r_\perp, s) = q(r_\perp) [\hat{R}_H\, \Phi](H, r_\perp, s),$$

$$[\hat{R}_H\, \Phi](H, r_\perp, s) \equiv \int_{\Omega^+} \Phi(H, r_\perp, s^+)\, P_c(s, s^+)\, d s^+,$$

то получаем частный случай для представления (30):

$$[\hat{G}_v f](s^-; H, r_\perp, s) = \hat{R}_v(\Theta, f) = q(r_\perp)[\hat{R}_H(\Theta, f)] = q(r_\perp)([\hat{R}_H\Theta], f) =$$

$$= q(r_\perp)\frac{1}{2\pi}\int_{\Omega^-} d\,s^{-\prime}\int_{-\infty}^{\infty} f(s^-; r'_\perp, s^{-\prime})\,d\,r'_\perp\int_{\Omega^+} P_c(s, s^+)\Theta(s^{-\prime}; H, r_\perp - r'_\perp, s^+)\,d\,s^+ =$$

$$= q(r_\perp)\frac{1}{2\pi}\int_{\Omega^-} d\,s^{-\prime}\int_{-\infty}^{\infty} f(s^-; r'_\perp, s^{-\prime})[\hat{R}_H\Theta](s^{-\prime}; H, r_\perp - r'_\perp, s)\,d\,r'_\perp,$$

$$[\hat{R}_H\Theta](s^-; H, r_\perp, s) = \int_{\Omega^+} P_c(s, s^+)\Theta(s^-; H, r_\perp, s^+)\,d\,s^+.$$

В Фурье образах находим частный случай представления (31):

$$[\check{R}_v\check{\Phi}](H, p, s) = F[\hat{R}_v\Phi](H, p, s) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\check{q}(p - p')\,d\,p' \times$$

$$\times\int_{\Omega^+}\check{\Phi}(H, p', s^+)\,P_c(s, s^+)\,d\,s^+ = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\check{q}(p - p')\,d\,p'\,[\hat{R}_H\check{\Phi}](H, p', s)\,d\,p',$$

$$[\hat{R}_H\check{\Phi}](H, p, s) = \int_{\Omega^+}\check{\Phi}(H, p, s^+)\,P_c(s, s^+)\,d\,s^+;$$

$$[\hat{Q}_v\check{f}](s^-; H, p, s) = F[\hat{G}_v f] = \check{R}_v(\Psi, \check{f}) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Omega^-} d\,s^{-\prime} \times$$

$$\times\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\check{f}(s^-; p', s^{-\prime})\,\check{q}(p - p')\,d\,p'\int_{\Omega^+} P_c(s, s^+)\Psi(s^{-\prime}; H, p', s^+)\,d\,s^+ =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\Omega^-} d\,s^{-\prime}\,\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\check{q}(p - p')\,\check{f}(s^-, p', s^{-\prime})\,[\hat{R}_H\Psi](s^{-\prime}; H, p', s)\,d\,p'.$$

$$[\hat{R}_H\Psi](s^-; H, p, s) = \int_{\Omega^+} P_c(s, s^+)\Psi(s^-; H, p, s^+)\,d\,s^+.$$

В случае расщепления пространственных и угловых переменных устанавливаем, что полученные выше наиболее общие выражения для n-приближений ФB Θ_v , ПЧХ Ψ_v , членов рядов (38) и (41) приводятся к следующему виду:

$$\Theta_{vn}(s^-; z, r_\perp, s) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Omega^-} ds_n^-\int_{-\infty}^{\infty}\Theta(s_n^-; z, r_\perp - r_{\perp n}, s)\,q\,(r_{\perp n})\,dr_{\perp n} \times$$

$$\times\frac{1}{2\pi}\int_{\Omega^-} ds_{n-1}^-\int_{-\infty}^{\infty} q\,(r_{\perp n-1})\,[\hat{R}_H\Theta]\,(s_{n-1}^-; H, r_{\perp n} - r_{\perp n-1}, s_n^-)\,dr_{\perp n-1} \times$$

$$\times\ldots\frac{1}{2\pi}\int_{\Omega^-} ds_2^-\int_{-\infty}^{\infty} q\,(r_{\perp 2})\,[\hat{R}_H\Theta]\,(s_2^-; H, r_{\perp 3} - r_{\perp 2}, s_3^-)\,dr_{\perp 2} \times$$

$$\times\frac{1}{2\pi}\int_{\Omega^-} ds_1^-\int_{-\infty}^{\infty} q\,(r_{\perp 1})\,[\hat{R}_H\Theta]\,(s_1^-; H, r_{\perp 2} - r_{\perp 1}, s_2^-)\,[\hat{R}_H\Theta]\,(s^-; H, r_{\perp 1}, s_1^-)\,d\,r_{\perp 1};$$

$$\Psi_{vn}(s^-; z, p, s) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Omega^-} \Psi(s_n^-; z, p, s)\, ds_n^- \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty} \check{q}(p - p_{n-1})\, dp_{n-1} \times$$

$$\times \frac{1}{2\pi}\int_{\Omega^-} [\hat{R}_H \Psi]\,(s_{n-1}^-; H, p_{n-1}, s_n^-)\, ds_{n-1}^- \times \ldots \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty} \check{q}(p_2 - p_1)\, dp_1 \frac{1}{2\pi}\int_{\Omega^-} [\hat{R}_H \Psi]\,(s_1^-; H, p_1, s_2^-)\, ds_1^- \times$$

$$\times \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty} \check{q}(p_1 - p_0)\, [\hat{R}_H \Psi]\,(s^-; H, p_0, s_1^-)\, dp_0 = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty} \check{q}(p - p_{n-1})\, dp_{n-1} \ldots \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty} \check{q}(p_1 - p_0)\, dp_0 \times$$

$$\times \frac{1}{2\pi}\int_{\Omega^-} \Psi(s_n^-; z, p, s)\, ds_n^- \frac{1}{2\pi}\int_{\Omega^-} [\hat{R}_H \Psi]\,(s_{n-1}^-; H, p_{n-1}, s_n^-)\, ds_{n-1}^- \times$$

$$\times \ldots \frac{1}{2\pi}\int_{\Omega^-} [\hat{R}_H \Psi]\,(s_1^-; H, p_1, s_2^-)\, [\hat{R}_H \Psi]\,(s^-; H, p_0, s_1^-)\, ds_1^- ;$$

$$\Phi_{vk}(z, r_\perp, s) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Omega^-} ds_k^- \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(s_k^-; z, r_\perp - r_{\perp k}, s)\, q(r_{\perp k})\, dr_{\perp k} \times$$

$$\times \frac{1}{2\pi}\int_{\Omega^-} ds_{k-1}^- \int_{-\infty}^{\infty} q(r_{\perp k-1})\, [\hat{R}_H \Theta]\,(s_{k-1}^-; H, r_{\perp k} - r_{\perp k-1}, s_k^-)\, dr_{\perp k-1} \times$$

$$\times \ldots \frac{1}{2\pi}\int_{\Omega^-} ds_2^- \int_{-\infty}^{\infty} q(r_{\perp 2})\, [\hat{R}_H \Theta]\,(s_2^-; H, r_{\perp 3} - r_{\perp 2}, s_3^-)\, dr_{\perp 2} \times$$

$$\times \frac{1}{2\pi}\int_{\Omega^-} ds_1^- \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{R}_H \Theta]\,(s_1^-; H, r_{\perp 2} - r_{\perp 1}, s_2^-)\, E_v(r_{\perp 1}, s_1^-)\, dr_{\perp 1} ;$$

$$\check{\Phi}_{vk}(z, p, s) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Omega^-} \Psi(s_k^-; z, p, s)\, ds_k^- \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty} \check{q}(p - p_{k-1})\, dp_{k-1} \times$$

$$\times \frac{1}{2\pi}\int_{\Omega^-} [\hat{R}_H \Psi]\,(s_{k-1}^-; H, p_{k-1}, s_k^-)\, ds_{k-1}^- \ldots \frac{1}{2\pi}\int_{\Omega^-} ds_2^- \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty} \check{q}(p_3 - p_2)\, [\hat{R}_H \Psi]\,(s_2^-; H, p_2, s_3^-)\, dp_2 \times$$

$$\times \frac{1}{2\pi}\int_{\Omega^-} ds_1^- \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty} \check{q}(p_2 - p_1)\, \check{E}_v(p_1, s_1^-)\, [\hat{R}_H \Psi]\,(s_1^-; H, p_1, s_2^-)\, dp_1 .$$

Оптический передаточный оператор с горизонтально-неоднородным коэффициентом отражения, в котором выделена горизонтально-однородная составляющая

Решение задачи (1) возможно несколькими способами.

Способ 1. Представление в форме линейного функционала

$$\Phi(z, r_\perp, s) = (\Theta_R, E) \tag{44}$$

через ФВ $\Theta_R(s^-; z, r_\perp, s)$ – решение задачи

$$\{\ \hat{K}\Theta_R = 0\,, \quad \Theta_R|_{\Gamma_0} = 0\,, \quad \Theta_R|_{\Gamma_H} = \varepsilon\, \hat{R}\Theta_R + f_\delta(s^-; r_\perp, s)\,, \tag{45}$$

или в Фурье образах:

$$\check{\Phi}(z, p, s) = F\,[(\Theta_R, E)] = (\Psi_R, \check{E}) \tag{46}$$

через ПЧХ $\Psi_R(s^-; z, p, s) = F\,[\Theta_R]$ – решение задачи

$$\{\, \hat{L}(p)\Psi_R = 0\,, \quad \Psi_R|_{\Gamma_0} = 0\,, \quad \Psi_R|_{\Gamma_H} = \text{e}\,\check{R}\Psi_R + \check{f}_\delta(s^-; s)). \tag{47}$$

Определим операции взаимодействия излучения с границей через ФВ Θ:

$$[\hat{G}_R f)(s^-; H, r_\perp, s) = [(\hat{G}_c f](s^-; H, r_\perp, s) + [(\hat{G}_v f](s^-; H, r_\perp, s) = \hat{R}(\Theta, f) = ([(\hat{R}_c\Theta], f) + \hat{R}_v(\Theta, f) \tag{48}$$

и через ПЧХ Ψ:

$$[(\hat{Q}_R\check{f}](s^-;H,p,s) = F[(\hat{G}_R f] = \left[\hat{Q}_c\check{f}\right](s^-;H,p,s) + \left[\hat{Q}_v\check{f}\right](s^-;H,p,s) = \check{R}(\Psi,\check{f}) = \check{R}_v(\Psi,\check{f}) + \left([(\hat{R}_c\Psi],\check{f}\right). \tag{49}$$

Вводим параметрический ряд

$$\Theta_R(s^-; z, r_\perp, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \Theta_{Rn}(s^-; z, r_\perp, s)\,,$$

компоненты которого удовлетворяют системе рекуррентных задач:

$$n = 0: \quad \{\, \hat{K}\Theta_{R0} = 0\,, \quad \Theta_{R0}|_{\Gamma_0} = 0\,, \quad \Theta_{R0}|_{\Gamma_H} = f_\delta(s^-; r_\perp, s)\,;$$

$$n \ge 1: \quad \{\, \hat{K}\Theta_{Rn} = 0\,, \quad \Theta_{Rn}|_{\Gamma_0} = 0\,, \quad \Theta_{Rn}|_{\Gamma_H} = \left[\hat{R}\Theta_{Rn-1}\right](s^-; H, r_\perp, s)$$

и явно выражаются через ФВ $\Theta(s^-; z, r_\perp, s)$:

$$\Theta_{R0}(s^-; z, r_\perp, s) = (\Theta, f_\delta) = \Theta(s^-; z, r_\perp, s)\,;$$

$$\Theta_{R\,n}(s^-; z, r_\perp, s) = (\Theta, \hat{R}\Theta_{R\,n-1}) = (\Theta, \hat{G}_R^n f_\delta) = (\Theta, \hat{G}_R^{n-1}\left[\hat{R}\Theta\right]) = (\Theta, (\hat{G}_c + \hat{G}_v)^{n-1}\left[\hat{R}\Theta\right])\,;$$

$$\Theta_R = \sum_{n=0}^{\infty} (\Theta, \hat{G}_R^n f_\delta) = (\Theta, \hat{Y}_R f_\delta)\,, \tag{50}$$

где

$$\hat{Y}_R f_\delta = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{G}_R^n f_\delta = [(\hat{E} - \hat{G}_R]^{-1} f_\delta\,. \tag{51}$$

В Фурье образах члены ряда

$$\Psi_R(s^-; z, p, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \Psi_{Rn}(s^-; z, p, s)$$

являются решениями системы рекуррентных задач:

$$n = 0: \quad \{\, \hat{L}(p)\Psi_{R0} = 0\,, \quad \Psi_{R0}|_{\Gamma_0} = 0\,, \quad \Psi_{R0}|_{\Gamma_H} = \check{f}_\delta(s^-; s)\,;$$

$$n \ge 1: \quad \{\, \hat{L}(p)\,\Psi_{Rn} = 0\,, \quad \Psi_{Rn}|_{\Gamma_0} = 0\,, \quad \Psi_{Rn}|_{\Gamma_H} = \left[\check{R}\Psi_{Rn-1}\right](s^-; H, p, s)\,,$$

которые представимы в форме функционалов через ПЧХ $\Psi(s^-; z, p, s)$:

$$\Psi_{R0}(s^-; z, p, s) = (\Psi, f_\delta) = \Psi(s^-; z, p, s)\,;$$

$$\Psi_{Rn}(s^-; z, p, s) = (\Psi, \check{R}\Psi_{Rn-1}) = (\Psi, \hat{Q}_R^n\,\check{f}_\delta) = (\Psi, \hat{Q}_R^{n-1}\left[\check{R}\Psi\right]) = (\Psi, (\hat{Q}_c + \hat{Q}_v)^{n-1}\left[\check{R}\Psi\right])\,;$$

$$\Psi_R = \sum_{n=0}^{\infty} (\Psi, \hat{Q}_R^n\,\check{f}_\delta) = (\Psi, \hat{Z}_R\,\check{f}_\delta)\,, \tag{52}$$

$$\hat{Z}_R\,\check{f}_\delta = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{Q}_R^n\,\check{f}_\delta \equiv \left[\hat{E} - \hat{Q}_R\right]^{-1}\check{f}_\delta\,. \tag{53}$$

Определим операции

$$\left[\hat{G}_{vc}\, f\,\right](s^-; H, r_\perp, s) = \hat{R}_v(\Theta_c, f)\,; \tag{54}$$

$$\left[\hat{Q}_{vc}\check{f}\right](s^-; H, p, s) = F\left[\hat{G}_{vc} f\right] = \check{R}_v\,(\Psi_c, \check{f})\,, \tag{55}$$

которые аналогичны $\hat{G}_v$ (30) и $\hat{Q}_v$ (31) соответственно и отличаются от последних заменой ФВ Θ на ФВ Θ_c, ПЧХ Ψ на ПЧХ Ψ_c, учитывающие вклад горизонтально-однородной компоненты коэффициента отражения.

Можно ввести ряд

$$\Theta_R(s^-; z, r_\perp, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \Theta_{Rcn}(s^-; z, r_\perp, s)$$

с компонентами – решениями системы рекуррентных задач:

$$n = 0: \quad \{\, \hat{K}\Theta_{Rc0} = 0\,, \quad \Theta_{Rc0}|_{\Gamma_0} = 0\,, \quad \Theta_{Rc0}|_{\Gamma_H} = \hat{R}_c\Theta_{Rc0} + f_\delta(s^-; r_\perp, s)\,;$$

$$n \geq 1: \quad \{(\, \hat{K}\Theta_{Rcn} = 0\,, \quad \Theta_{Rcn}|_{\Gamma_0} = 0\,, \quad \Theta_{Rcn}|_{\Gamma_H} = \hat{R}_c\Theta_{Rcn} + \hat{R}_v\Theta_{Rcn-1})\,,$$

которые выражаются функционалами с ФВ $\Theta_c(s^-; z, r_\perp, s)$:

$$\Theta_{Rc0}(s^-; z, r_\perp, s) = (\Theta_c\,, f_\delta) = \Theta_c(s^-; z, r_\perp, s)\,;$$

$$\Theta_{Rcn}(s^-; z, r_\perp, s) = (\Theta_c\,, \hat{R}_v\Theta_{Rcn-1}) = (\Theta_c\,, \hat{G}^{\,n}_{vc} f_\delta) = \left(\Theta_c\,, \hat{G}^{n-1}_{vc}\left[\hat{R}_v\Theta_c\right]\right);$$

$$\Theta_R = \sum_{n=0}^{\infty} (\Theta_c\,, \hat{G}^n_{vc} f_\delta) = (\Theta_c\,, \hat{Y}_{vc} f_\delta)\,, \tag{56}$$

$$\hat{Y}_{vc} f_\delta = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{G}^n_{vc} f_\delta = \left[\hat{E} - \hat{G}_{vc}\right]^{-1} f_\delta\,. \tag{57}$$

В терминах Фурье образов

$$\Psi_R(s^-; z, p, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n\, \Psi_{Rcn}(s^-; z, p, s)\,;$$

$$n = 0: \quad \{\, \hat{L}\,(p)\,\Psi_{Rc0} = 0\,, \quad \Psi_{Rc0}|_{\Gamma_0} = 0\,, \quad \Psi_{Rc0}|_{\Gamma_H} = \hat{R}_c\Psi_{Rc0} + \check{f}_\delta(s^-; s)\,;$$

$$n \geq 1: \quad \{\, \hat{L}\,(p)\Psi_{Rcn} = 0\,, \quad \Psi_{Rcn}|_{\Gamma_0} = 0\,, \quad \Psi_{Rcn}|_{\Gamma_H} = \hat{R}_c\Psi_{Rcn} + \check{R}_v\Psi_{Rcn-1}\,;$$

$$\Psi_{Rc0}(s^-; z, p, s) = (\Psi_c\,, \check{f}_\delta) = \Psi_c(s^-; z, p, s)\,;$$

$$\Psi_{Rcn}(s^-; z, p, s) = (\Psi_c\,, \check{R}_v\Psi_{Rcn-1}) = (\Psi_c\,, \hat{Q}^n_{vc}\check{f}_\delta) = (\Psi_c\,, \hat{Q}^{n-1}_{vc}\left[\check{R}_v\Psi_c\right])\,;$$

$$\Psi_R = \sum_{n=0}^{\infty} (\Psi_c\,, \hat{Q}^n_{vc}\check{f}_\delta) = (\Psi_c\,, \hat{Z}_{vc}\check{f}_\delta), \tag{58}$$

$$\hat{Z}_{vc}\check{f}_\delta = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{Q}^n_{vc}\check{f}_\delta = \left[\hat{E} - \hat{Q}_{vc}\right]^{-1}\check{f}_\delta\,. \tag{59}$$

Введем операции

$$\left[\hat{G}_{cv} f\right](s^-; H, r_\perp, s) = \hat{R}_c(\Theta_v, f)\,; \tag{60}$$

$$\left[\hat{Q}_{cv}\check{f}\right](s^-; H, p, s) = F\left[\hat{G}_{cv} f\right] = \hat{R}_c\,(\Psi_v, \check{f})\,, \tag{61}$$

аналогичные $\hat{G}_v$ (30) и $\hat{Q}_v$ (31), в которых ФВ Θ и ПЧХ Ψ соответственно заменены на ФВ Θ_v и ПЧХ Ψ_v , учитывающие вклад горизонтально-неоднородной составляющей коэффициента отражения.

Для членов параметрического ряда

$$\Theta_R(s^-; z, r_\perp, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n\, \Theta_{Rvn}(s^-; z, r_\perp, s)\,,$$

являющихся решением системы рекуррентных задач:

$$n = 0: \ \{ \hat{K}\Theta_{Rv0} = 0\,, \quad \Theta_{Rv0}|_{\Gamma_0} = 0\,, \quad \Theta_{Rv0}|_{\Gamma_H} = \hat{R}_v\Theta_{Rv0} + f_\delta(s^-; r_\perp, s);$$

$$n \geq 1: \ \{ \hat{K}\Theta_{Rvn} = 0\,, \quad \Theta_{Rvn}|_{\Gamma_0} = 0\,, \quad \Theta_{Rvn}|_{\Gamma_H} = \hat{R}_v\Theta_{Rvn} + \hat{R}_c\Theta_{Rvn-1},$$

имеют место представления в форме функционалов с $\Theta_v(s^-; z, r_\perp, s)$:

$$\Theta_{Rv0}(s^-; z, r_\perp, s) = (\Theta_v\,, f_\delta) = \Theta_v(s^-; z, r_\perp, s)\,;$$

$$\Theta_{Rvn}(s^-; z, r_\perp, s) = (\Theta_v\,, \hat{R}_c\,\Theta_{Rvn-1}) = (\Theta_v\,, \hat{G}^n_{cv} f_\delta) = (\Theta_v\,, \hat{G}^{n-1}_{cv}\Big[\hat{R}_c\Theta_v\Big]);$$

$$\Theta_R = \sum_{n=0}^{\infty} (\Theta_v\,, \hat{G}^n_{cv} f_\delta) = (\Theta_v\,, \hat{Y}_{cv} f_\delta)\,, \tag{62}$$

$$\hat{Y}_{cv} f_\delta \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \hat{G}^n_{cv} f_\delta = \Big[\hat{E} - \hat{G}_{cv}\Big]^{-1} f_\delta\,. \tag{63}$$

Для Фурье образов:

$$\Psi_R(s^-; z, p, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \Psi_{Rvn}(s^-; z, p, s)\,;$$

$$n = 0: \ \{ \hat{L}\,(p)\Psi_{Rv0} = 0\,, \quad \Psi_{Rv0}|_{\Gamma_0} = 0\,, \quad \Psi_{Rv0}|_{\Gamma_H} = \check{R}_v\Psi_{Rv0} + \check{f}_{\mathrm{d}}(s^-; s)\,;$$

$$n \geq 1: \ \{ \hat{L}\,(p)\Psi_{Rvn} = 0\,, \quad \Psi_{Rvn}|_{\Gamma_0} = 0\,, \quad \Psi_{Rvn}|_{\Gamma_H} = \check{R}_v\Psi_{Rvn} + \check{R}_c\Psi_{Rvn-1}\,;$$

$$\Psi_{Rv0}(s^-; z, p, s) = (\Psi_v\,, \check{f}_\delta) = \Psi_v(s^-; z, p, s)\,;$$

$$\Psi_{Rvn}(s^-; z, p, s) = (\Psi_v\,, \hat{R}_c\Psi_{Rvn-1}) = (\Psi_v\,, \hat{Q}^n_{cv}\,\check{f}_\delta) = \big(\Psi_v\,, \hat{Q}^{n-1}_{cv}\Big[\hat{R}_c\Psi_v\Big]\big)\,;$$

$$\Psi_R = \sum_{n=0}^{\infty} (\Psi_v\,, \hat{Q}^n_{cv}\,\check{f}_\delta) = (\Psi_v\,, \hat{Z}_{cv}\,\check{f}_\delta)\,, \tag{64}$$

$$\hat{Z}_{cv}\,\check{f}_\delta \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \hat{Q}^n_{cv}\,\check{f}_\delta = \Big[\hat{E} - \hat{Q}_{cv}\Big]^{-1} \check{f}_\delta\,. \tag{65}$$

Способ 2. Представление в виде ряда

$$\Phi_R(z, r_\perp, s) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k\, \Phi_{Rck}(z, r_\perp, s)\,,$$

члены которого являются решением системы рекуррентных задач:

$$k = 1: \ \{ \hat{K}\Phi_{Rc1} = 0\,, \quad \Phi_{Rc1}|_{\Gamma_0} = 0\,, \quad \Phi_{Rc1}|_{\Gamma_H} = \hat{R}_c\Phi_{Rc1} + E(r_\perp, s)\,;$$

$$k \geq 2: \ \{ \hat{K}\Phi_{Rck} = 0\,, \quad \Phi_{Rck}|_{\Gamma_0} = 0\,, \quad \Phi_{Rck}|_{\Gamma_H} = \hat{R}_c\Phi_{Rck} + \hat{R}_v\Phi_{Rck-1}$$

и выражаются либо через ФВ $\Theta_c(s^-; z, r_\perp, s)$:

$$\Phi_{Rc1}(z, r_\perp, s) = (\Theta_c\,, E)\,; \quad \Phi_{Rck}(z, r_\perp, s) = (\Theta_c\,, \hat{R}_v\Phi_{Rck-1}) = (\Theta_c\,, \hat{G}^{k-1}_{vc}E)\,,$$

либо через ПЧХ $\Psi_c(s^-; z, p, s)$:

$$\check{\Phi}_{Rc1}(z, p, s) = (\Psi_c\,, \check{E})\,; \quad \check{\Phi}_{Rck}(z, p, s) = (\Psi_c\,, \check{R}_v\,\check{\Phi}_{Rck-1}) = (\Psi_c\,, \hat{Q}^{k-1}_{vc}\,\check{E})\,;$$

$$\Phi_R = \sum_{k=1}^{\infty} (\Theta_c\,, \hat{G}^{k-1}_{vc}\,E) = (\Theta_c\,, \hat{Y}_{vc}\,E)\,, \tag{66}$$

$$\hat{Y}_{vc} E \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \hat{G}_{vc}^{k-1} E = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{G}_{vc}^{k} E = \left[\hat{E} - \hat{G}_{vc}\right]^{-1} E \; ; \tag{67}$$

$$\check{\mathrm{F}}_R(z, p, s) = \sum_{k=1}^{\infty} (\Psi_c \, , \hat{Q}_{vc}^{k-1} \check{E}) = (\Psi_c \, , \hat{Z}_{vc} \check{E}) \; ; \tag{68}$$

$$\hat{Z}_{vc} \check{E} \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \hat{Q}_{vc}^{k-1} \check{E} = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{Q}_{vc}^{k} \check{E} = \left[\hat{E} - \hat{Q}_{vc}\right]^{-1} \check{E} \, . \tag{69}$$

Способ 3. Представление в виде ряда

$$\Phi_R(z, r_\perp, s) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \, \Phi_{Rvk}(z, r_\perp, s) \, ,$$

компоненты которого удовлетворяют системе рекуррентных задач:

$$k = 1: \quad \{ \hat{K}\Phi_{Rv1} = 0 \, , \quad \Phi_{Rv1}|_{\Gamma_0} = 0 \, , \quad \Phi_{Rv1}|_{\Gamma_H} = \hat{R}_v \Phi_{Rv1} + E(r_\perp, s) \; ;$$

$$k \geq 2: \quad \{ \hat{K}\Phi_{Rvk} = 0 \, , \quad \Phi_{Rvk}|_{\Gamma_0} = 0 \, , \quad \Phi_{Rvk}|_{\Gamma_H} = \hat{R}_v \Phi_{Rvk} + \hat{R}_c \Phi_{Rvk-1}$$

и находятся либо через ФВ $\Theta_v(s^-; z, r_\perp, s)$:

$$\Phi_{Rv1}(z, r_\perp, s) = (\Theta_v \, , E) \, ; \quad \Phi_{Rvk}(z, r_\perp, s) = (\Theta_v \, , \hat{R}_c \Phi_{Rvk-1}) = (\Theta_v \, , \hat{G}_{cv}^{k-1} E) \, ,$$

либо в терминах Фурье образов через ПЧХ $\Psi_v(s^-; z, p, s)$:

$$\check{\Phi}_{Rv1}(z, p, s) = (\Psi_v \, , \check{E}) \, ; \quad \check{\Phi}_{Rvk}(z, p, s) = (\Psi_v \, , \hat{R}_c \, \check{\Phi}_{Rvk-1}) = (\Psi_v \, , \hat{Q}_{cv}^{k-1} \check{E}) \; ;$$

$$\Phi_R = \sum_{k=1}^{\infty} (\Theta_v \, , \hat{G}_{cv}^{k-1} E) = (\Theta_v \, , \hat{Y}_{cv} \, E) \, , \tag{70}$$

$$\hat{Y}_{cv} \, E \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \hat{G}_{cv}^{k-1} E = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{G}_{cv}^{k} E = [(\hat{E} - \hat{G}_{cv}]^{-1} E \; ; \tag{71}$$

$$\check{\Phi}_R(z, p, s) = \sum_{k=1}^{\infty} (\Psi_v \, , \hat{Q}_{cv}^{\,k-1} \check{E}) = (\Psi_v \, , \hat{Z}_{cv} \, \check{E}) \tag{72}$$

$$\hat{Z}_{cv} \, \check{E} = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{Q}_{cv}^{k-1} \check{E} = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{Q}_{cv}^{k} \check{E} \equiv \left[\hat{E} - \hat{Q}_{cv}\right]^{-1} \check{E} \, . \tag{73}$$

Функция влияния $\Theta(s^-; z, r_\perp, s)$ и пространственно-частотная характеристика $\Psi(s^-; z, p, s)$ описывают фактически поле излучения в слое, создаваемое за счет процессов многократного рассеяния лазерного луча с направлением s^-, расположенного на границе $z = H$ в центре системы горизонтальных координат x, y. Это фундаментальное решение является ядром ОПО для задач со следующим набором пар значений источника и характеристики отражения: 1) $E(r_\perp, s)$, $P(r_\perp, s, s')$; 2) $E(r_\perp, s)$, $P(s, s')$; 3) $E(s)$, $P(r_\perp, s, s')$; 4) $E(r_\perp)$, $P(r_\perp, s, s')$; 5) $E(r_\perp)$, $P(s, s')$; 6) E, $P(r_\perp, s, s')$.

Отметим случаи, когда применяются другие фундаментальные решения – частные представления ФВ Θ и ПЧХ Ψ.

Функция влияния

$$\Theta_r(z, r_\perp, s) = (1/2\pi) \int_{\Omega^-} \Theta(s^-; z, r_\perp, s) \, d\, s^-$$

и пространственно-частотная характеристика

$$\Psi_r(z, p, s) = F[\Theta_r] = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega^-} \Psi(s^-; z, p, s) \, d\, s^-,$$

определяющиеся из краевых задач

$$\{\hat{K}\,\Theta_r = 0, \quad \Theta_r\,\big|_{\Gamma_0} = 0, \quad \Theta_r\,\big|_{\Gamma_H} = \delta(r_\perp)\;;$$

$$\{\hat{L}(p)\,\Psi_r = 0, \quad \Psi_r\,\big|_{\Gamma_0} = 0, \quad \Psi_r\,\big|_{\Gamma_H} = 1\;,$$

являются ядрами фукционалов, когда источник и коэффициент отражения составляют следующие пары: 7) $E(r_\perp, s)$, $P(r_\perp, s')$; 8) $E(r_\perp, s)$, $P(s')$; 9) $E(s)$, $P(r_\perp, s')$; 10) $E(r_\perp)$, $P(r_\perp, s')$; 11) $E(r_\perp)$, $P(s')$; 12) E, $P(r_\perp, s')$.

С помощью функции влияния

$$\Theta_z(s^-; z, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(s^-; z, r_\perp, s)\, d\,r_\perp$$

– решения задачи ($\hat{K}_z = \hat{D}_z - \hat{S}$) для мононаправленного широкого пучка:

$$\{\hat{K}_z\Theta_z = 0, \quad \Theta_z\,\big|_{\Gamma_0} = 0, \quad \Theta_z\,\big|_{\Gamma_H} = \delta(s - s^-)\;,$$

определяются функционалы в случае горизонтально-однородных источников и отражения: 13) $E(s)$, $P(s, s')$; 14) E, $P(s, s')$.

Через функцию пропускания, отягощенную вкладом многократного рассеяния,

$$W(z, s) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Omega^-} \Theta_z(s^-; z, s)\, d\,s^- = \frac{1}{2\pi}\int_{\Omega^-} d\,s^- \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(s^-; z, r_\perp, s)\, d\,r_\perp\;,$$

которая удовлетворяет задаче с единичным изотропным источником

$$\{\hat{K}_z W = 0, \quad W\,\big|_{\Gamma_0} = 0, \quad W\,\big|_{\Gamma_\mathrm{H}} = 1\;,$$

находится решение для пары 15) E, $P(s')$.

Функция влияния $\Theta(s^-; z, r_\perp, s)$ – это решение первой краевой задачи (4), а ФВ $\Theta_R(s^-; z, r_\perp, s)$ – решение общей краевой задачи (45) с горизонтально-неоднородным источником типа лазерного луча.

Функции влияния $\Theta_c(s^-; z, r_\perp, s)$ и $\Theta_v(s^-; z, r_\perp, s)$ являются частными случаями ФВ Θ_R – это решения задач (11) и (28) с операторами отражения $\hat{R} = \hat{R}_c$ и $\hat{R} = \hat{R}_v$ соответственно. Функции влияния Θ_R, Θ_v, Θ_c описывают поле излучения, создаваемое стационарным узким пучком с координатами $x = 0$, $y = 0$, $z = H$, $s = s^-$, и учитывают вклады многократного рассеяния в среде и многократного переотражения от подстилающей поверхности с коэффициентами $P_v + P_c$, P_v, P_c соответственно.

Пространственно-частотная характеристика определяется как Фурье образ функции влияния: $\Psi(s^-; z, p, s) = F[\Theta]$ – решение первой краевой задачи для комплексного уравнения переноса (5); $\Psi_R(s^-; z, p, s) = F[\Theta_R]$, $\Psi_v(s^-; z, p, s) = F[\Theta_v]$, $\Psi_c(s^-; z, p, s) = F[\Theta_c]$ – решения комплексных задач (47), (29), (12) соответственно.

Точные решения общих краевых задач (1), (8), (9) – функционалы (10), (22), (27), (39), (44), (66), (70) – это разные представления оптического передаточного оператора с помощью функций влияния, а функционалы (10), (25), (27), (42), (46), (68), (72) – разные представления ОПО в Фурье образах через пространственно-частотные характеристики.

Функционалы (16), (33), (50), (56), (62) дают разные представления функции влияния общей краевой задачи, а функционалы (19), (36), (52), (58), (64) описывают соответствующие пространственно-частотные характеристики. При этом функции влияния (16), (33), (50) как точные решения задачи с отражающим дном определяются через ФВ $\Theta(s^-; z, r_\perp, s)$ – решение задачи с неотражающими границами. Аналогично пространственно-частотные характеристики (19), (36), (52) – точные решения задачи с отражающим дном для комплексного уравнения переноса – явно выражаются через ПЧХ $\Psi(s^-; z, p, s)$ – решение задачи с неотражающими границами.

Ряды Неймана (23), (40) описывают <сценарий> на подстилающей поверхности через ФВ, а (26), (42) – его Фурье образ через ПЧХ. Сформулированные в виде линейных функционалов (10, (22), (25), (27), (39), (42), (44), (46), (66), (68), (70), (72) оптические передаточные операторы описывают перенос <сценария> через мутный слой и могут использоваться для решения задач радиационной коррекции при дистанционном зондировании подстилающей поверхности с любой высоты (как внутри слоя, так и над ним) в любом направлении.

В настоящей статье опущены громоздкие и нетривиальные выкладки и приведены только оригинальные конечные результаты из теории оптического передаточного оператора, которая строится на базе кинетических уравнений теории переноса излучения в мутных средах. Вместо решения исходных задач (1), (8), (9) достаточно определить ФВ Θ и ПЧХ Ψ, а далее можно рассчитывать функционалы в нужном приближении.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-05-8542).

1. Зеге Э.П., Иванов А.П., Кацев И.Л. Перенос изображения в рассеивающей среде. Минск: Наука и техника, 1985. 327 с.
2. Сушкевич Т.А., Стрелков С.А., Иолтуховский А.А. Метод характеристик в задачах атмосферной оптики. М.: Наука, 1990. 296 с.
3. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972. 740 с.
4. Найфэ А.Х. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 456 с.
5. Джакалья Г.Е.О. Методы теории возмущений для нелинейных систем. М.: Наука, 1979. 319 с.
6. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: ЛГУ, 1950. 256 с.
7. Шварц Л. Математические методы для физических наук. М.: Мир, 1965. 412 с.
8. Хермандер Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными. М.: Мир, 1965, 379 с.
9. Трев Ж. Лекции по линейным уравнениям в частных производных с постоянными коэффициентами. М.: Мир, 1965. 296 с.
10. Дандорф Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. М.: ИЛ. Т. I, 1962. 660 с. Т. II, 1966. 895 с.
11. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1967. 435 с.
12. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1976. 280 с.
13. Гермогенова Т.А. Локальные свойства решений уравнения переноса. М.: Наука, 1986. 272 с.
14. Агошков В.И. Обобщенные решения уравнения переноса и свойства их гладкости. М.: Наука, 1988. 240 с.
15. Сушкевич Т.А., Куликов А.К., Максакова С.В. Решения общей краевой задачи теории переноса методом ПЧХ и ФВ для моделирования радиационных процессов в природных объектах. М., 1993. 28 с. (Препринт / ИПМ РАН, N 64).

Институт прикладной математики
имени М.В. Келдыша РАН, Москва

Поступила в редакцию
10 марта 1994 г.

T.A. Sushkevich, A.K. Kulikov, S.V. Maksakova. **On the Theory of Optical Transfer Operator.**

In this paper we present optical transfer operator (OTO) constructed based on the consideration of the general boundary problem of the radiation transfer theory for the case of a plane layer with a reflecting bottom and finite sources of radiation. The kernel of the OTO is constructed of the influence functions (IF) identical to the point spread function or of the spatial frequency characteristics (SFCH), which coincides with the optical transfer function (OTF). The IF and SFCH are versatile linear transfer functions of the system <atmosphere (ocean, cloudiness, hydrometeor) – underlying surface> that are determined from a solution of the boundary problem of the theory of radiation transfer for a plane layer with nonreflecting boundaries irradiated with a source of like a cw laser beam. We have constructed an OTO for the case of horizontally inhomogeneous boundary with an anisotropic reflection when no splitting of spatial and angular variables is used in the scattering coefficient. Such an OTO has the most general form and is expressed in terms of IF and SFCH. We show in this paper that all other expressions for OTO are particular cases of the derived formula.