

А.В. Бухарин, С.М. Першин

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ РАССМОТРЕНИЕ ЛИДАРА ОБРАТНОГО РАССЕЯНИЯ С БЕЗОПАСНЫМ ДЛЯ ГЛАЗ УРОВНЕМ ИЗЛУЧЕНИЯ

Проведен теоретический анализ работы микроджоульного лидара обратного рассеяния на базе полупроводникового лазера с квантовым счетчиком в приемном канале. Получены основные соотношения для измерения физических параметров исследуемой среды при уровне излучения лазера, в несколько раз меньшем естественного фона солнечной засветки. Разработан метод преобразования функции распределения фотонов по интервалам к линейной форме отображения сигнала. Получены аналитические выражения для оценки предельных параметров рассматриваемого лидара.

Введение

Широкое применение лидаров для исследования среды обитания живых существ, атмосферы и водоемов ограничено уровнем плотности энергии оптического излучения на объекте исследования. Так, в видимом диапазоне спектра предельное значение плотности световой энергии в соответствии с рекомендациями Американского национального института стандартов (ANSI) и требованиями Всемирной организации здравоохранения не должно превышать $0,5 \text{ мкДж/см}^2$ [1]. В ноябре 1992 года эти и другие вопросы по лазерной безопасности обсуждались на специальном симпозиуме в Бостоне, США [2].

Прогресс в разработке высокоэффективных квантовых счетчиков на лавинных фотодиодах позволяет проектировать оптические радары с предельно малым уровнем излучения передатчика, сравнимым по интенсивности с естественным фоном, когда вероятность регистрации сигнала при каждом включении лазера всегда меньше единицы [3–5]. Применение в таких радарах техники счета квантов [6] при зондировании атмосферы имеет специфические особенности, присущие дискретной форме получения и статистической обработки данных в отличие от традиционных подходов с использованием аналоговых сигналов [6]. Создание таких приборов с безопасным для глаз уровнем излучения может существенно расширить диапазон использования оптических дистанционных средств для мониторинга среды обитания [5].

Предметом данного сообщения является теоретическое исследование работы микроджоульного аэрозольного лидара с однофотонным приемником с целью получения основных соотношений для измерения физических параметров исследуемой среды. При этом особое внимание было уделено детальному исследованию функции распределения фотоотсчетов с учетом конечной длительности мертвого времени приемника и стохастических источников шума различной природы, определяющих предельное значение отношения сигнал-шум, когда шум превышает уровень сигнала в несколько раз.

Постановка задачи

Характерной особенностью любого счетчика фотонов [7] является наличие мертвого времени, которое необходимо для восстановления работоспособности счетчика после акта срабатывания. Вообще говоря, мертвое время и время восстановления работоспособности счетчика могут быть разными, однако в рамках данного рассмотрения будем их считать равными. В практических приложениях желательно, чтобы это время было как можно меньше, так как его наличие приводит к пропуску регистрации событий, и тем самым к снижению эффективности использования приемника в цикле измерения. Рассмотрим работу импульсного радара с использованием однофотонного приемника как квантового счетчика.

Пусть импульсный источник фотонов включается периодически и облучает исследуемую среду в некотором секторе, определяемом расходимостью излучения. Фотоны, рассеянные на

препятствии или вдоль трассы зондирования, попадают в апертуру приемника, который открывается синхронно с некоторой задержкой относительно импульса передатчика и остается открытым до момента срабатывания или в течение некоторого времени T , называемого стробом. Строб T делится на ячейки длительностью τ , определяющие шаг дискретизации и пространственно-временное разрешение вдоль трассы зондирования.

При каждом включении передатчика в одну из ячеек строба, обнуленных перед началом цикла измерений, может быть добавлена единица, если в течение длительности этой ячейки произошло срабатывание фотодетектора при регистрации внешнего фотона или внутреннего фотоэлектрона. Если такого события не произошло в течение строба, то содержимое ячеек остается без изменения. При многократном включении передатчика происходит накопление фотоотсчетов по ячейкам строба и формирование гистограммы распределения событий.

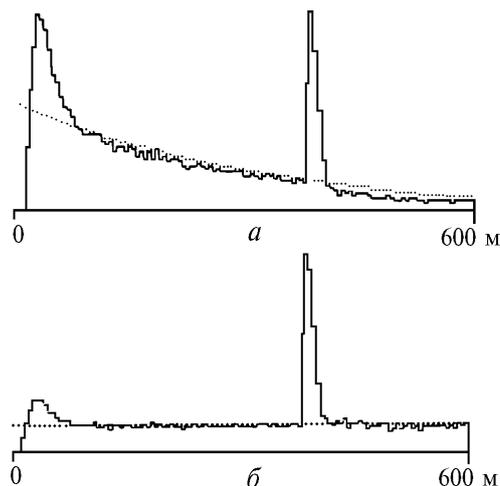


Рис. 1. Характерный вид гистограмм распределения чисел фотоотсчетов для счетчиков с <большим> (а) и <нулевым> (б) мертвым временем, полученных при одинаковых параметрах потока событий на входе

Такой режим регистрации событий соответствует работе счетчика дискретных сигналов с большим мертвым временем (БМВ) t_m , когда $T < t_m < T_0$, где T_0 – период включения строба или импульсного источника фотонов, T – длительность строба. Характерный вид функции распределения числа срабатываний такого счетчика в зависимости от номера ячейки при регистрации сигнала на фоне постоянной засветки показан на рис. 1, а. Здесь первый пик обусловлен рассеянием фотонов лазерных импульсов атмосферным аэрозолем вдоль трассы зондирования в однородной атмосфере, а второй – рассеянием на поверхности препятствия на аэрозольных слоях в атмосфере.

Заметим, что реальный счетчик с БМВ может за время строба T зарегистрировать только одно событие, в то время как идеальный счетчик с нулевым мертвым временем (НМВ) – любое количество событий, поступающих на вход в течение строба T . Гистограмма отсчетов для счетчика с НМВ при большом числе включений лазера характеризовала бы реальную динамику поступления фотонов во времени, а число отсчетов в ячейках гистограммы было бы пропорционально интенсивности принимаемого сигнала. Другими словами, гистограмма отсчетов для счетчика с НМВ (НМВ-гистограмма) содержит всю физическую информацию об обратном сигнале в наиболее удобном для обработки виде. Однако режим счета с НМВ не может быть реализован практически из-за существования конечной величины времени восстановления детектора. Отметим здесь, что возможен переход от гистограммы числа отсчетов, полученных для счетчика с БМВ (БМВ-гистограмма), см. рис. 1, а, к гистограмме числа отсчетов, соответствующих работе счетчика с НМВ. Пример такого перехода показан на рис. 1, б.

Как видно из рис. 1, гистограммы, представленные на них, заметно отличаются. Так, в гистограмме на рис. 1, а постоянному потоку внешней засветки соответствует монотонно убывающий уровень шумовых фотоотсчетов. При этом скорость убывания и площадь сигнального пика зависят от уровня внешней засветки. Кроме того, уменьшение числа отсчетов в кана-

лах, следующих за сигнальным пиком, зависит от его интенсивности. На второй гистограмме (см. рис. 1, б) таких особенностей не наблюдается.

Рассмотрим более детально вопрос о формировании распределения и статистике числа отсчетов по ячейкам как для счетчика с БМВ, так и с НМВ при регистрации произвольного стационарного потока событий с целью выбора способа обработки гистограмм, полученных реальным счетчиком.

Предположим, что за время измерения и набора гистограмм оптические свойства поверхности препятствия и атмосферы между зондируемым объектом и детектором меняются медленно и незначительно, что соответствует приближению стационарного потока независимых случайных событий.

Обозначим количество ячеек, на которые разделен строб T , через k , тогда для обоих типов счетчиков с НМВ и БМВ можно построить пространство вероятностных событий Ω_1 и Ω_2 следующим образом:

$$t_m = 0; \quad \Omega_1 = \{P_i\}; \quad i = 1, \dots, k; \quad T < t_m < T_0; \quad \Omega_2 = \{\theta_i\}; \quad i = 1, \dots, k;$$

$$P_i; t \in [(i-1)\tau; i\tau]; \quad \theta_i = \prod_{j=1}^{i-1} (1 - \tilde{P}_j) \tilde{P}_i; \quad t \in [(i-1)\tau; i\tau].$$

Размер ячейки выбираем так, чтобы P_i было меньше 1 в Ω_1 и θ_i меньше 1 в Ω_2 для любого $i = 1, \dots, k$. Здесь P_i характеризует частоту поступления событий в i -ю ячейку гистограммы в пространстве Ω_1 . Заметим, что в силу однократного принципа срабатывания счетчика за время T попадание события в i -ю ячейку строга в пространстве Ω_2 предполагает отсутствие срабатываний в предыдущие моменты времени для ячеек $i = 1, \dots, i-1$, откуда следует распределение вероятностей $\{\theta_i\}$ по номерам ячеек $i = 1, \dots, k$ для счетчика с БМВ: при этом если $P_i = P$, $i = 1, \dots, k$, то $\theta_i = (1 - \tilde{P})^{i-1} \tilde{P}$ – полученное распределение отсчетов по ячейкам описывается распределением Паскаля.

Характер поступления событий при регистрации стационарных потоков счетчиком с НМВ предполагает наличие случайно расположенных точек на шкале времени, соответствующих моментам регистрации событий и необходимости рассмотрения определенного класса стохастических процессов, называемых точечными процессами [7]. Для описания таких процессов можно использовать как функции распределения по моментам регистрации $Q_s(\tau_1, \dots, \tau_s)$, так и функции распределения по частотам $f_n(t_1, \dots, t_n)$, связь между которыми приведена в [7].

Следует отметить, что функцию Q_s удобно использовать в случаях, когда число событий в любом временном интервале строго определено, т.е. при каждом измерении регистрируется m событий, причем $m = \text{const}$.

Если m меняется случайным образом и в разных временных промежутках может быть зарегистрировано разное количество событий, следует использовать функцию f_n , т.е. функцию распределения по частотам. Поскольку реальный счетчик с БМВ при одном включении может зарегистрировать только одно событие либо не зарегистрировать ни одного события в течение строга T , то для описания его работы следует использовать функцию $f_1(t)$, которая фактически представляет собой частоту поступления событий в момент времени t .

Весьма важным для нас выводом, который следует из анализа точечных процессов [7], является то, что суммарное число зарегистрированных событий в выделенном временном интервале описывается распределением Пуассона. В этом случае с помощью функций $f_n(t_1, \dots, t_n)$ получим выражение для основных моментов распределения числа отсчетов в заданном временном интервале: $[t_a, t_b]$

$$\langle N \rangle = \int_{t_a}^{t_b} f_1(t) dt; \quad \langle N^2 \rangle = \langle N \rangle + \int_{t_a}^{t_b} f_2(t_1, t_2) dt_1 dt_2, \quad (1)$$

где $f_2(t_1, t_2) = f_1(t_1)f_2(t_2)$, что справедливо при регистрации стационарного потока независимых событий.

Для среднего и дисперсии числа N с пуассоновским распределением

$$P_N = \frac{\langle N \rangle^N}{N!} \exp(-\langle N \rangle) \quad (2)$$

имеем

$$M(N) = \langle N \rangle, \quad D(N) = \langle N \rangle. \quad (3)$$

Поскольку НМВ-гистограммы линейно отражают физические параметры объекта исследования, то представляет интерес рассмотреть возможность преобразования к такому виду массива данных, реально зарегистрированных приемником с БМВ.

2. Способ перехода между вероятностными пространствами Ω_1 и Ω_2

Как упоминалось выше, для стационарного и независимого случайного потока событий в течение интервала $t_a < t < t_b$ распределение суммы числа отсчетов будет пуассоновским с параметром

$$\langle N \rangle = \int_{t_a}^{t_b} f_1(t) dt = f(t_b - t_a). \quad (4)$$

Тогда вероятность отсутствия регистрации события в указанном интервале определяется как $P = \exp(-\langle N \rangle)$ и одинакова для обоих типов счетчиков в Ω_1 и Ω_2 . При этом вероятность регистрации события в стробе равна $1 - \exp(-\langle N \rangle)$ и всегда меньше единицы, в то время как $\langle N \rangle$ может принимать любые положительные значения. Для слабых квантовых потоков, когда $\langle N \rangle < 1$, значение $\langle N \rangle$ можно использовать также для определения вероятности срабатывания счетчика с НМВ. В этом случае $P = \langle N \rangle = f\tau < 1$, где f – средняя частота поступления событий в интервал времени длительностью τ , например ячейку строба. Отсюда следует, что связь между P_i в Ω_1 и P_i в Ω_2 можно представить в виде:

$$\tilde{P}_i = 1 - \exp(-P_i) = 1 - \exp(-f_i \tau); \quad i = 1, \dots, k. \quad (5)$$

В случае, когда τ такое, что $\max f_i \tau = P_i \ll 1$, то

$$P_i = \tilde{P}_i = f_i \tau \ll 1, \quad i = 1, \dots, k. \quad (6)$$

В дальнейшем будем предполагать выполнение условия (6). Случаи, в которых это условие не выполняется, будут рассматриваться особо.

Рассмотрим более подробно, как определяется вероятность попадания в i -ю ячейку в Ω_2 . Ее структура представляет собой последовательный ряд произведений вероятности не попасть событию в интервал, предшествующий i -й ячейке, на вероятность попасть в i -ю ячейку \tilde{P}_i . Тогда формулу (5) для θ_i можно записать в виде

$$\theta_i = \prod_{j=1}^{i-1} (1 - \tilde{P}_j) \tilde{P}_i = \exp\left(-\int_0^{(i-1)\tau} f_1(t) dt\right) = \exp\left(-\sum_{j=1}^{i-1} f_j \tau\right) P_i. \quad (7)$$

Умножение обеих частей этого равенства на N дает связь между средними значениями отсчетов в i -х каналах для Ω_1 и Ω_2 .

В предельном случае, когда размер ячейки стремится к нулю, т.е. увеличивая степень разбиения строга, можно получить дифференциальную форму для вероятности в Ω_2 через функцию распределения

$$d\theta(t) = \exp\left(-\int_0^t f_1(t') dt'\right) f_1(t) dt. \quad (8)$$

Выражение в правой части – это наиболее общий вид функции распределения событий по временным интервалам.

Выпишем основные соотношения, связывающие вероятности регистрации фотоотсчетов в канале гистограммы счетчиком в режиме работы с НМВ и БМВ:

$$\theta_i = P_i \exp\left(-\sum_{j=1}^{i-1} f_j \tau\right) = P_i \exp(-\mu(1; i-1)); \quad \exp(-\mu(1; i-1)) = 1 - \left(\sum_{j=1}^{i-1} N_j(\Omega_2) / N\right), \quad (9)$$

$N_j(\Omega_2)$ – число фотоотсчетов, накопленных в i -м канале НМВ-гистограммы; N – число включений счетчика.

Рассмотрим вопрос о точности, с которой можно определить $\{P_i\}$, $i = 1, \dots, k$ в Ω_1 , зная $\{\theta_i\}$; $i = 1, \dots, k$ в Ω_2 .

Для стационарного случайного независимого потока событий за время строга распределение числа отсчетов, накопленных счетчиком с НМВ при N включениях, соответствует пуассоновскому. Однако при переходе в режим счета с БМВ распределение числа отсчетов в каналах изменится. Ниже качественно будет выведен закон и выписаны основные моменты функции распределения числа отсчетов в отдельном канале для этого случая.

Пусть для счетчика с нулевым мертвым временем $f\tau$ равно w , тогда при БМВ $P = 1 - \exp(-w)$, $P < 1$ для любого w .

Рассмотрим случай, когда $w \gg 1$, тогда

$$\begin{aligned} \langle N \rangle &= f\tau N; & D(N) &= \langle N \rangle = f\tau N; \\ \langle N \rangle &= N(1 - \exp(-w)) = N(1 - \varepsilon); & D(N) &= N\varepsilon(1 - \varepsilon), \end{aligned}$$

при этом существуют N , ε такие, что $N\varepsilon \ll f\tau N$, т.е. среднеквадратическое отклонение числа отсчетов в интервале дает завышенную величину. Реальная дисперсия распределения числа отсчетов в канале Ω_2 будет меньше соответствующего значения при их пуассоновском распределении.

Из формулы (2) следует, что при $\langle N \rangle \ll 1$ вероятность зарегистрировать одно событие в течение строга $P = \langle N \rangle \exp(-\langle N \rangle)$, соответствующая величина для двух событий равна $\langle N \rangle^2 / 2 \exp(-\langle N \rangle)$, т.е. в $\langle N \rangle / 2$ меньше, чем для одного события. Таким образом, при малой вероятности поступления событий в интервал длительности τ параметры распределений искомого и пуассоновского приблизительно равны. При большой вероятности поступления событий в интервал среднеквадратическое отклонение искомого распределения становится уже меньше соответствующего значения для распределения Пуассона. Распределение, которое имеет такие свойства, является биномиальным.

Умножим выражение (9) на N и перепишем его в виде

$$N_i(\Omega_1) = N_i(\Omega_2) \exp(-\mu(1; i-1)).$$

Из этого выражения следует, что число отсчетов в канале восстановленной гистограммы определяется произведением двух случайных величин. Здесь вкладом в погрешность $N_i(\Omega_1)$ со стороны экспоненциального множителя можно пренебречь в силу интегрального характера последнего, см. (9). Таким образом, относительное среднеквадратическое отклонение в канале восстановленной гистограммы определяется функцией распределения в соответствующем канале невосстановленной гистограммы. При этом для восстановленной в Ω_1 гистограммы имеем

$$N_i(\Omega_1) = N_i(\Omega_2) \exp(\mu(1; i-1)); D(N_i(\Omega_1)) = N_i(\Omega_2) \exp(2\mu(1; i-1)); i = 1, \dots, k;$$

$$\exp(-\mu(1; i-1)) = 1 - \left(\sum_{j=1}^{i-1} N_j(\Omega_2) / N \right). \quad (10)$$

В случаях, когда условие (6) не выполняется, следует использовать биномиальное распределение для числа фотоотсчетов в выделенном временном интервале. В результате элементарных выкладок с использованием выражений для дифференцирования функции случайной переменной получаем следующие значения для среднего и дисперсии числа отсчетов в каналах НМВ-гистограммы, полученной из БМВ-гистограммы:

$$N_i(\Omega_1) = N \ln \left[\frac{1}{1 - \frac{N_i(\Omega_2)}{N}} \right] \exp(\mu(1; i-1));$$

$$D(N_i(\Omega_1)) = \left[\frac{N \sqrt{N_i(\Omega_2)}}{N - N_i(\Omega_2)} \right]^2 \exp(2\mu(1; i-1)); \quad (11)$$

$$\exp(-\mu(1; i-1)) = 1 - \left(\sum_{j=1}^{i-1} N_j(\Omega_2) / N \right), \quad i = 1, \dots, k.$$

На рис. 1, а, б проиллюстрирован пример использования данной методики восстановления.

3. Аппроксимация распределения числа отсчетов в каналах восстановленной гистограммы

Остановимся на вопросе сходимости полученных функций распределения числа отсчетов к распределению Гаусса. Введем следующие обозначения:

$$P_N(k) = C_N^k p^k q^{N-k}; \quad C_N^k = \frac{N!}{k!(N-k)!};$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt; \quad P_N(x) = P_N(Np + x\sqrt{Npq}).$$

$$F_N(x) = P_N(-\infty; x).$$

Без доказательства приведем результат, являющийся частным случаем теоремы Берри-Эссеена [9,10]

$$\sup_{-\infty \leq x \leq +\infty} |F_N(x) - \Phi(x)| \leq \frac{p^2 + q^2}{\sqrt{Npq}}. \quad (12)$$

Из этого неравенства следует, что аппроксимация гауссовским распределением статистических выбросов в канале тем точнее, чем большее количество отсчетов в нем накоплено. Для примера можно использовать критерий $N_i(\Omega_2) > 100$ [8].

Скорость сходимости пуассоновского распределения к гауссовскому можно задать с помощью коэффициента асимметрии γ [11]:

$$\gamma = \frac{M(\xi - M(\xi))^3}{\sqrt{D(\xi)^3}} = \frac{1}{\sqrt{N_i(\Omega_2)}}. \quad (13)$$

Заметим, что для гауссовского распределения $\gamma = 0$. Данные соотношения будут использоваться при разработке критериев обнаружения сигнала при заданном уровне фона.

4. Обоснование необходимости отдельной регистрации шума

В предыдущих разделах рассмотрены способы оценки погрешности числа отсчетов, соответствующих актам регистрации событий в отдельном канале и стробе.

Рассмотрим случай, когда на гистограмме помимо фоновых отсчетов имеется сигнальный пик с шириной в несколько каналов (см. рис. 2, а), площадь которого надо измерить.

После восстановления гистограммы, полученной для счетчика с БМВ, выпишем выражение для площади под сигнальным пиком:

$$S_{\phi+c} = \sum_{i=\kappa_1}^{\kappa_2} N_i; \quad S_{\phi+c} = \sum_{i=\kappa_1}^{\kappa_2} D(N_i) \text{ в } \Omega_1. \quad (14)$$

По восстановленной гистограмме можно оценить фоновую подложку, которой можно поставить в соответствие прямую, проведенную через каналы, являющиеся граничными для данного пика (см. рис. 2, б). В этом случае характеристики фона можно определить следующим образом:

$$S_{\phi} = \sum_{i=\kappa_1}^{\kappa_2} N_{i\phi}(\Omega_1); \quad D(S_{\phi}) = \sum_{i=\kappa_1}^{\kappa_2} N_{i\phi}(\Omega_1) \exp(\mu(1; i-1)). \quad (15)$$

Для расчета $\exp(-\mu(1; i-1)) = 1 - \left(\sum_{j=1}^{i-1} N_j(\Omega_2) / N \right)$ необходимо определить значения $N_i(\Omega_2)$ для каналов $\kappa_1 < j < \kappa_2$ в отсутствие пика. Подчеркнем, что $N_{j\phi}(\Omega_1)$ – числа отсчетов в ячейках восстановленной гистограммы при регистрации только шума. Номера этих каналов соответствуют области расположения сигнального пика на гистограмме <сигнал + шум>.

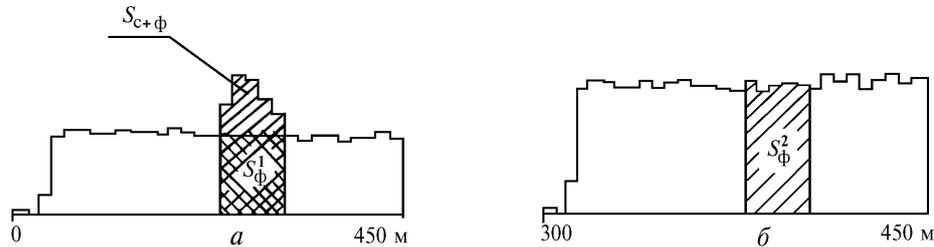


Рис. 2. Иллюстрация способа измерения уровня сигнала при наличии фона. Восстановленная гистограмма числа отсчетов при регистрации: а – сигнала и шума (фона) $S_{\phi+c}$; б – только шума

Очевидно, что определение S_{ϕ} связано с аппроксимацией кривой через числа отсчетов в каналах имеющейся гистограммы по обе стороны от пика. Следует отметить, что такая процедура выделения фоновой подложки не всегда может быть статистически обоснованной и корректной с точки зрения оценки точности полученных результатов. Для повышения точности измерений, а также для упрощения алгоритмов выделения сигнала предлагается после строба, в котором ведется накопление как сигнальных, так и шумовых отсчетов, поочередно выработать строб такой же длительности, в котором накапливаются только фоновые отсчеты. После окончания измерения производится вычитание восстановленных гистограмм, накопленных в обоих стробах.

Таким образом, по имеющимся гистограммам непосредственно находятся искомые величины. Следует отметить, что иногда можно обходиться без регистрации фонового строба. Такие случаи будут рассмотрены ниже.

В реальном эксперименте при оценке физических параметров необходимо учитывать дополнительные погрешности, обусловленные нестабильностью внутренних электронных параметров прибора. Рассмотрим вариант, когда на вход счетчика поступает равновероятный поток событий. Кроме того, допустим, что среднее и дисперсия числа отсчетов в отдельном канале гистограммы для счетчика с БМВ оценивается по всем каналам с последующим вычисле-

нием выборочного среднего и дисперсии. В этом случае для вероятности регистрации отсчета в отдельном канале гистограммы используем следующее рандомизированное выражение (аналог формулы Манделя):

$$P_n = \int_0^{\infty} \Phi(z) \frac{z^n}{n!} \exp(-z) dz. \quad (16)$$

Нетрудно получить выражения для среднего и дисперсии:

$$M(n) = \bar{z} = \int_0^{\infty} \Phi(z) z dz; \quad (17)$$

$$D(n) = \bar{z}^2 - (\bar{z})^2 + \bar{z}. \quad (18)$$

Включим в область значений $\Phi(z)$ обобщенные функции вида $\Phi(z) = \delta(z - z_0)$. В этом случае для каналов счетчика с НМВ

$$M(n_i) = z_0. \quad (19)$$

При переходе в режим работы с БМВ

$$M(n_i) = (1 - \exp(-z_0)) \exp(-(i-1)z_0). \quad (20)$$

Очевидно, что увеличением числа отсчетов в каналах гистограммы можно сделать относительные отклонения от z_0 сколь угодно малыми для всех каналов.

Допустим, что в режиме работы счетчика с НМВ существуют небольшие отклонения от z_0 в каналах гистограммы, обусловленные разбросом эффективностей регистрации фотонов по каналам. Этот фактор можно учесть путем введения набора величин $\{\Delta z_i\}; i = 1, \dots, k$. В этом случае

$$\Phi_i(z) = \delta(z - z_0 - \Delta z_{0i}) = \delta(z - z_i) \text{ в } \Omega_1. \quad (21)$$

Рассмотрим методику, по которой можно сравнить погрешности при оценке площади сигнального пика, вычисленного двумя способами. В первом способе используется аппроксимация прямой через выделенный участок восстановленной гистограммы <сигнал + фон> для определения уровня фона (см. рис. 2, а). Во втором случае фоновую подложку или уровень фона характеризуют числа отсчетов в ячейках, расположенных на соответствующем участке отдельной фоновой гистограммы.

Таким образом, при рассмотрении выражения для вероятности (16) разброс $\{\Delta z_i\}, i = 1, \dots, k$ в каналах восстановленной гистограммы можно охарактеризовать функцией распределения $\Phi^1(z)$. При этом ширина $\Phi^1(z)$ будет характеризовать дополнительный вклад стохастических источников в пуассоновскую часть погрешности см. (18).

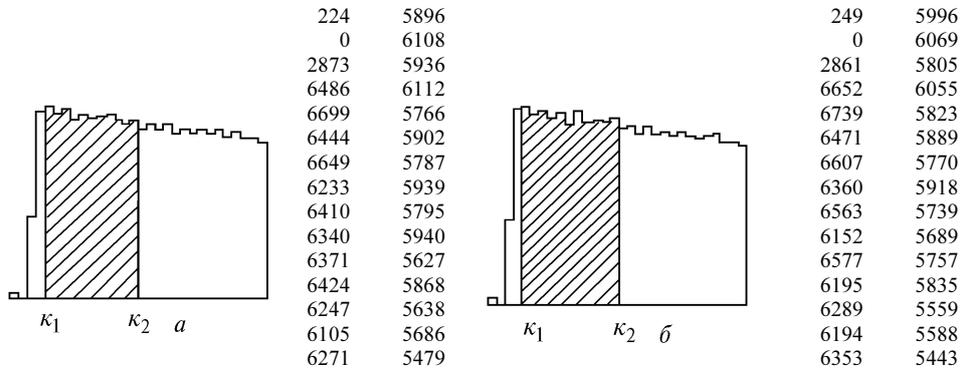


Рис. 3. Характерный вид гистограмм с соответствующими таблицами текущих значений чисел фотоотсчетов для иллюстрации способа оценки вклада стохастических источников шума

Допустим, в процессе измерения поочередно формируются два строба для получения двух массивов данных. В первом массиве могут накапливаться сигнальные и фоновые фотоотсчеты, во втором стробе накапливаются только фоновые события (фотоны внешней засветки и собственные шумы детектора). В обоих случаях на вход приемника поступает равновероятный стационарный случайный поток событий. После восстановления гистограмм выделяем участок, ограниченный каналами κ_1 и κ_2 (рис. 3).

Запишем выражение для среднего числа отсчетов в канале для первой гистограммы:

$$\bar{N}^{(1)} = \frac{1}{\kappa_2 - \kappa_1} \sum_{j=\kappa_1}^{\kappa_2} N_j^{(1)} \text{ в } \Omega_1, \quad (22)$$

для второй –

$$\bar{N}^{(2)} = \frac{1}{\kappa_2 - \kappa_1} \sum_{j=\kappa_1}^{\kappa_2} N_j^{(2)} \text{ в } \Omega_1, \quad (23)$$

где $N_j^{(1)}, N_j^{(2)}$ – числа отсчетов в j -м канале для первой и второй гистограмм соответственно.

Выпишем выражение для дисперсии отсчетов в канале при наличии дополнительных стохастических источников:

$$D_p = \sigma_p^2 = \sigma_n^2 + \sigma_{д.с.}^2, \quad (24)$$

где σ_n – среднеквадратическое отклонение числа отсчетов в канале, обусловленное пуассоновским распределением; $\sigma_{д.с.}$ – среднеквадратическое отклонение, обусловленное дополнительными стохастическими источниками; D_p – реальная дисперсия числа отсчетов в канале; σ_p – средне-квадратическое отклонение.

В первом случае для характеристики вклада дополнительных стохастических источников без использования фоновой гистограммы можно записать следующее выражение:

$$\xi_1 = \frac{1}{\kappa_2 - \kappa_1} \sum_{j=\kappa_1}^{\kappa_2} \frac{(\bar{N}^{(1)}(\Omega_1) - N_j^{(1)}(\Omega_1))^2}{\bar{N}^{(1)}(\Omega_1) \exp^{(1)}(\mu(1; j-1))} - 1. \quad (25)$$

Во втором случае при использовании фоновой гистограммы для такой же характеристики можно использовать выражение

$$\xi_2 = \frac{1}{\kappa_2 - \kappa_1} \sum_{j=\kappa_1}^{\kappa_2} \frac{(N_1^{(1)}(\Omega_1) - N_1^{(2)}(\Omega_1))^2}{\bar{N}^{(1)}(\Omega_1) \exp^{(1)}(\mu(1; j-1)) + \bar{N}^{(2)}(\Omega_1) \exp^{(2)}(\mu(1; j-1))} - 1. \quad (26)$$

В общем случае выражения под знаком суммы для ξ_1, ξ_2 представляют собой отношение квадрата абсолютного отклонения от среднего числа отсчетов в текущем канале восстановленной гистограммы к теоретическому значению дисперсии в соответствующем канале, вытекающему из методики восстановления. При отсутствии дополнительных источников шума значения ξ_1 и ξ_2 должны находиться вблизи нуля, так как соответствующие выражения записаны в предположении пуассоновского распределения статистических выбросов в отдельных каналах невосстановленных гистограмм.

Сравнивая значения ξ_1 и ξ_2 , можно утверждать следующее:

1. Если $\xi_1 > \xi_2$, то использование фоновой гистограммы оправдано с точки зрения повышения точности получаемых результатов.

2. Если ξ_1 существенно меньше ξ_2 , то использование фоновой гистограммы не всегда оправдано. По значениям ξ_1 и ξ_2 можно оценить связь между реальной дисперсией и дисперсией, соответствующей чисто пуассоновскому процессу:

$$D_{p_i} = (\xi_i + 1) D_n, \quad i = 1, 2. \quad (27)$$

Тогда оценка дополнительных вкладов стохастических источников будет выражаться простым соотношением:

$$D_{d.ci} = \xi_i D_n, \quad i = 1, 2, \quad (28)$$

где $D_{d.ci}$ – дисперсия, обусловленная дополнительными случайными источниками.

Кроме того, для проверки гипотезы о наличии пуассоновского распределения здесь используется критерий χ^2 :

$$\xi_i = \frac{1}{n} \chi_i^2 - 1; \quad i = 1, 2. \quad (29)$$

Аналогия с χ^2 становится наиболее полной, если суммы для ξ_1 и ξ_2 выразить через $N_i(\Omega_2)$.

В дальнейшем этим критерием необходимо пользоваться при анализе реальных гистограмм, так как он позволяет проводить сравнение работы реальных приборов по размеру вклада дополнительных источников шума в распределение (16). Отметим, что при малом числе отсчетов в каналах БМВ-гистограмм относительный вклад дополнительных факторов в пуассоновскую часть погрешности, как правило, не существен. В случаях, когда требуется измерить интенсивность потока сигнальных фотонов с возможно большей точностью, следует учитывать вклад дополнительных стохастических источников шума в погрешность измеренной величины.

Отдельную регистрацию фона следует также проводить с целью упрощения алгоритмов поиска и обработки сигнала.

5. Оценка вклада стохастических источников шума в погрешность измерений сигнала

Возможность использования разработанной методики для оценки вклада стохастических источников шума в погрешность измерений сигнала рассматривалась на конкретном примере анализа реальных гистограмм, полученных на действующем макете лидара. Гистограммы чисел отсчетов (см. рис. 3, а, б) формировались в режиме чередования при регистрации только шума в отсутствие лазерных импульсов. Число включений приемника в обоих случаях было равно 1 024 000. Для расчета ξ_1 и ξ_2 на гистограммах выбирались произвольные участки, включающие более 10 каналов. Результаты расчета, необходимые для выявления стохастических источников, и оценки их величины сведены в таблицу.

№ п/п	Среднее количество отсчетов	ξ_1	ξ_2	Канал в Ω_1
1	$N = 6622$	1,23	- 0,12	5 – 30
2	$N = 6685$	1,015	0,042	5 – 15
3	$N = 6576$	1,38	- 0,23	16 – 30

П р и м е ч а н и е . Среднее количество отсчетов в выделенных каналах гистограммы на рис. 3, а после приведения ее к линеаризованному виду; величины ξ_1 и ξ_2 связаны с распределением χ^2 (29) и вычислены по значениям только первой гистограммы (25) и разностям текущих значений отсчетов в каналах обеих гистограмм (26) после их восстановления соответственно.

Конкретный пример расчета вклада стохастических источников в погрешность измерений будем рассматривать пользуясь данными третьей строки таблицы. Проверим гипотезу о том, что распределение чисел отсчетов в каналах гистограммы (рис. 3, а) соответствует закону Пуассона. Проведя оценку только одного параметра $N_i(\Omega_2)$ функции распределения получаем 13 степеней свободы для χ^2 [11].

Как видно из таблицы, значение ξ_1 , вычисленное по экспериментальным данным первой гистограммы, близко к 1, что соответствует значению $\chi^2 = 13 \times 2 = 26$. С целью выявления малых отличий исследуемого процесса от предложенной гипотезы выберем из стандартного набора максимальный уровень значимости при $\alpha = 0,05$ [11]. Для выбранного значения α найдем $\chi^2 = 22,4$ по таблицам из [11]. Сравнение показывает, что табулированное значение χ^2 меньше реального, поэтому наша гипотеза о Пуассоновском распределении отсчетов в ячейке анализируемой гистограммы не адекватна исследуемому процессу [11], так как дисперсия числа отсчетов, вычисленная по выбранной группе каналов, существенно превышает среднее значение.

Полученное несоответствие можно объяснить наличием стохастических источников шума, которые вносят дополнительный вклад в разброс параметров измерений сигнала. Существование этих источников шума может быть обусловлено разбросом эффективностей регистрации по номерам ячеек на малую величину $\{\Delta z_i\}$, $i = 1, \dots, k$, что подтверждается при визуальном сравнении статистических выбросов в отдельных ячейках гистограмм по сериям измерений (см. рис. 3). Наблюдаемая периодическая модуляция числа отсчетов вдоль гистограммы приводит к тому, что значение величины ξ_1 близко к единице, т.е. реальная дисперсия отсчетов в ячейках больше пуассоновской. Следовательно, в приборе есть дополнительные стохастические источники шума. Их вклад в разброс параметров можно оценить из соотношения (27), которое показывает, что в рассматриваемом примере реальная дисперсия более чем в два раза превышает расчетную. Учет вклада стохастических источников шума, которые проявляются в периодической модуляции чисел отсчетов по каналам рис. 3, а, возможен с использованием второй гистограммы и параметра ξ_2 .

Характерное значение ξ_2 , вычисленное по разности двух гистограмм (26), находится вблизи нуля. В этом случае

$$\chi^2 = n\xi_2 + n \quad \text{при } n = 15; \quad \xi_2 \cong 0; \quad \chi_{1-a}^2 = 15.$$

Поскольку реальное значение χ^2 , полученное по двум гистограммам, меньше табличного, то наше предположение согласуется с гипотезой о пуассоновском распределении чисел отсчетов в каналах невозстановленной гистограммы. Это является следствием уменьшения вклада от модуляции чисел отсчетов по каналам в погрешность измерения сигнала при вычитании шумовой гистограммы, так как имеется корреляция между статистическими выбросами в отдельных каналах на рассматриваемых гистограммах.

Таким образом, при рассмотрении критерия обнаружения сигнала в режиме счета с БМВ над уровнем фона по двум гистограммам с отдельной регистрацией шума можно использовать пуассоновский закон распределения для числа отсчетов в канале. Отрицательные значения ξ_2 могут быть обусловлены недостаточной точностью приближения (10), используемого при вычислении параметров восстановленных гистограмм, а также свойствами используемого распределения χ^2 .

Обсуждение правомерности использования распределения χ^2 для исследования вклада стохастических источников шума требует отдельного рассмотрения и будет проведено в последующих работах.

Здесь следует обратить внимание на чувствительность обсуждаемого статистического подхода к поиску сигнала. Так, например, введем сигнал в виде изменения числа отсчетов в отдельном канале на 4% с 5 787 до 6 037 (см. 22 канал на первой гистограмме и таблицу чисел отсчетов на рис. 3). Затем получим значение параметра ξ_2 , вычисленное по 15 каналам с 16 по 30, при отсутствии и наличии сигнала в 22 канале гистограммы. Сравнение показывает, что значение параметра ($\xi_2 + 1$) изменилось с 0,77 до 1,16 соответственно, что существенно (более чем на 4%) превышает значения параметра ($\xi_2 + 1$), вычисленные для других участков гистограммы (см. таблицу). Таким образом, рассматриваемый подход может быть использован для поиска строба с сигнальными отсчетами, распределенными по нескольким каналам гистограммы и для обнаружения сигнала, локализованного в одном или в нескольких каналах при высоком уровне шума.

В качестве примера рассмотрим вопрос о детектировании предельно малых потоков сигнальных фотонов лидаром с однофотонным приемником. Известно, что критерий надежной регистрации задается вероятностью ложного отсчета. Будем предполагать, что распределение

отсчетов в отдельном канале гистограммы с хорошей степенью точности можно аппроксимировать нормальным распределением (12, 13). Тогда для обнаружения сигнала с вероятностью ложного отсчета 0,3% необходимо превышение его амплитуды в отдельном канале более чем на 3σ от среднего значения [11].

Предположим, что уровень шума, измеренный лидаром за один цикл, соответствует 5 479 отсчетам в последних каналах гистограммы для счетчика с БМВ. Тогда в соответствии с предыдущим обсуждением можно получить два значения стандартного среднеквадратического отклонения, обусловленного функцией распределения $\Phi^1(z)$ без фоновой гистограммы и при ее наличии соответственно.

В первом случае получаем $\sigma_1 = \sqrt{5\,479 \cdot 2} = 105$, во втором – $\sigma_2 = \sqrt{5\,479} = 74$.

Отсюда следуют предельные значения сигнала и отношения сигнал-шум для обеспечения заданной надежности обнаружения: в первом случае не менее $3\sigma_1 = 315$; $(с/ш)_1 \cong \frac{315}{5\,479} = 5,7 \cdot 10^{-2}$ и во втором – не менее $3\sigma_2 = 222$; $(с/ш)_2 = \frac{222}{5\,479} = 4 \cdot 10^{-2}$.

Таким образом, приведенные оценки показывают, что лидар с однофотонным приемником может измерять сигнал в реальном времени на уровне нескольких процентов от уровня фона, с достоверностью обнаружения не менее 0,997. Этот вывод особенно важен для задач зондирования среды обитания или живой ткани, так как показывает возможность использования зондирующего луча с интенсивностью в десятки раз меньше интенсивности естественного фона, создаваемого солнечным излучением [12].

Кроме того, применение техники отдельной регистрации уровня шума с последующим вычитанием позволяет учесть вклад стохастических источников шума и повысить чувствительность и обнаружительную способность приемного тракта, что может иметь большое значение при исследовании нестационарных процессов с ограниченным временем регистрации сигнала.

Заключение

1. Предложена и теоретически обоснована модель работы лидара с однофотонным приемником. Проведен анализ работы детектора с различным мертвым временем. На основании этого анализа выработан способ перехода от реальных гистограмм, характеризующих функцию распределения актов регистрации фотонов по интервалам для счетчика с большим мертвым временем, к линеаризованным гистограммам для счетчика с нулевым мертвым временем. Такие гистограммы в линейной форме отражают физические характеристики зондируемой среды.

2. Проведен анализ факторов, определяющих предельное значение отношения сигнал-шум в лидаре с квантовым счетчиком. Рассмотрено влияние на это отношение стохастических источников шума и разработана методика оценки вклада таких источников в погрешность измерения. Получено и продемонстрировано экспериментально, что измерение сигнала с последующим вычитанием шума позволяет в 1,4 раза улучшить предельное значение отношения сигнал-шум при регистрации сигнала, в десятки раз меньшего уровня фона.

Выражаем благодарность А.В. Тюрину за существенную помощь при подготовке материалов рукописи.

1. Справочник по лазерной технике / Пер. с нем. М.: Энергоатомиздат, 1991. 544 с.
2. Proc. of the Laser Safety Symposium, Boston, Nov. 18, 1992.
3. Pershin S., Linkin V., Makarov V., Prochazka I., Hamal K. //Proc. of the CLEO:91, paper CFI 10.
4. Pershin S., Linkin V., Bukharin A., Makarov V., Patsaev D., Prochazka I., Kouki T. //Proc. of the XIII Annual International and Remote Sensing Symposium, IGARSS'93. Tokyo, 20 August 1993. V. II. P. 464–465.
5. Pershin S., Linkin V., Bukharin A., Makarov V., Patsaev D., Frochazka I., Hamal K. //Proc. of the SPIE's. 1992. Intern. Symposium on Optical Applied Science and Engineering II. San Diego, 1992. V. 1752. P. 293–296.
6. Гулаков И.Р., Холодырев С.В. Метод счета фотонов в оптико-физических измерениях. Минск: Университетское, 1989. 256 с.
7. Ван Кампен Г. Стохастические процессы в физике и химии. М.: Высшая школа, 1990. 376 с.
8. Чистяков В.П. Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1987. 240 с.
9. Ширяев А.Н. Вероятность. М.: Наука, 1980.
10. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1984. Т. 2. 751 с.

11. Королюк В. С., Портенко Н. И., Скороход А. В., Турбин А. Ф. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. М.: Наука, 1985. 640 с.
12. Милютин Е. Р., Яременко Ю. И. Оптика атмосферы и океана. 1992. Т. 5. N 1. С. 15–18.

Институт космических исследований
РАН, Москва

Поступила в редакцию
18 января 1994 г.

A. V. Bukharin, S. M. Pershin. Theoretical Analysis of an Eye-Safe Lidar.

In this paper we present theoretical analysis of an eye-safe semiconductor-laser-based lidar with a photon counting signal recording system. We have derived basic expressions to be used for assessing some physical parameters of the media under study for the case of extremely low (micro-Joules) energy of sounding radiation per pulse that is several times lower than that of the daytime sky background. In this paper we also present a technique for transforming the function of photons distribution over intervals to the form convenient for linear presentation of signals. Analytical expressions for estimating limiting parameters of the lidar under study are derived.