

А.Н. Кучеров, Н.К. Макашев, Е.В. Устинов

### РАСПРОСТРАНЕНИЕ ОПТИЧЕСКОГО ПУЧКА ПЕРЕМЕННОГО РАДИУСА В УСЛОВИЯХ ГРАВИТАЦИОННОЙ КОНВЕКЦИИ И ОБДУВА

На примере лабораторного эксперимента с оптическим пучком переменного радиуса показано, что с помощью фактора теплового самовоздействия можно оценивать возмущения пучка в условиях гравитационной конвекции и поперечного обдува. Для сильно сфокусированных (в начальном сечении или вследствие самовоздействия) пучков возмущение среды на трассе распространения предлагается оценивать по величине среднего радиуса, для которого получены приближенные аналитические выражения.

Рассматриваемый в лабораторном эксперименте интенсивный оптический пучок искажается вследствие теплового самовоздействия. В настоящей статье приведены результаты исследований самонаведенной гравитационной конвекции в покоящейся среде, а также в среде с принудительным обдувом поперечным потоком газа, который может привести к ослаблению возмущений. Трасса пучка содержит, как правило, поворотные и фокусирующие (дефокусирующие) зеркала и линзы, телескопы, участки с расширенным или суженным поперечным размером пучка и т.д.

Обезразмеренные уравнения параксиальной оптики ( $a/L \ll 1$ ,  $a$  – характерный радиус пучка,  $L$  – характерная длина трассы) в приближении геометрической оптики ( $F = 2\pi a^2/\lambda L \rightarrow \infty$ ,  $\lambda$  – длина волны излучения) можно записать в следующем виде:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial z} + (\boldsymbol{\theta}, \nabla_{\perp}) \right] \ln I + (\nabla_{\perp}, \boldsymbol{\theta}) = -N_{\alpha}; \quad (1)$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial z} + (\boldsymbol{\theta}, \nabla_{\perp}) \right] \boldsymbol{\theta} = N \nabla_{\perp} \rho_1(x, y, z; L); \quad \nabla_{\perp} = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y}; \quad (2)$$

$$I|_{z=0} = I_0(x, y); \quad \boldsymbol{\theta}|_{z=0} = \boldsymbol{\theta}_0(x, y). \quad (3)$$

Здесь интенсивность  $I$  отнесена к характерной интенсивности  $I_*$ , угол отклонения пучка  $\boldsymbol{\theta}$  от направления распространения  $z$  – к величине  $a/L$ , координата  $z$  – к характерной длине трассы  $L$ , координаты  $x, y$  – к характерному поперечному размеру пучка  $a$ . Параметр поглощения равен  $N_{\alpha} = \alpha L$ , где  $\alpha$  – коэффициент поглощения излучения средой, параметр самовоздействия –  $N = \varepsilon(L/a)^2(n_0 - 1)/n_0$ , где  $n_0$  – показатель преломления невозмущенной среды;  $\varepsilon$  – масштаб возмущения плотности среды;  $\rho_1 = \Delta\rho/\varepsilon\rho_0$  – безразмерная функция возмущения плотности;  $\rho_0$  – плотность невозмущенной среды;  $I_0(x, y)$ ,  $\boldsymbol{\theta}_0(x, y)$  – заданные начальные распределения интенсивности и угла отклонения (расходимости) пучка;  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$  – единичные орты по осям  $x, y$ . В общем случае функция  $\rho_1$  определяется из решения системы уравнений гидродинамики (сохранения массы, импульса, энергии и уравнения состояния). При поперечном обдуве со скоростью  $V_0$ , значительно меньшей скорости звука, возмущение плотности описывается уравнением переноса, которое следует из линеаризованного уравнения сохранения энергии:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \right) \rho_1 = -I; \quad \varepsilon = \alpha I_* a / \rho_0 h_0 V_0; \quad I_* = W_0/\pi a^2. \quad (4)$$

Здесь  $W_0$  – полная начальная мощность пучка,  $h_0$  – энтальпия невозмущенной среды. Время  $t$  отнесено к характерному времени пролета жидкой (газовой) частицы поперек пучка  $a/V_0$ . Ось  $y$  направлена по скорости обдува.

В случае самоиндуцированной гравитационной конвекции на горизонтальной трассе пучка возмущение плотности определяется системой уравнений гидромеханики в приближении Буссинеска:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{V} = 0; \varepsilon_{\kappa} = \alpha I_{*} a / \rho_0 h_0 V_{\kappa}; V_{\kappa} = (\alpha I_{*} g a^2 / \rho_0 h_0)^{1/3}, & (5) \\ d\mathbf{V}/dt + \nabla_{\perp} p_1 = \mathbf{e}_y \rho_1; p = 1 + (\text{Eu}/\text{Fr}) (-y + \varepsilon p_1 + \dots), & (6) \\ d\rho_1/dt = -I(x, y, z, t); d/dt = \partial/\partial t + (\mathbf{V}, \nabla_{\perp}). & (7) \end{cases}$$

Здесь  $g$  – ускорение свободного падения,  $\text{Eu} = \rho_0 V_{\kappa}^2 / p_0$  – число Эйлера;  $p_0$  – давление невозмущенного газа;  $V_{\kappa}$  – характерная скорость гравитационной конвекции;  $t_{\kappa} = a/V_{\kappa}$  – характерное время ее развития;  $\text{Fr} = V_{\kappa}^2 / ag$  – число Фруда. Вязкостью и теплопроводностью во многих случаях можно пренебречь. Отметим, что при скоростях обдува  $V_0 \gg V_{\kappa}$  масштаб возмущения плотности  $\varepsilon$  и параметр теплового самовоздействия  $N$  значительно меньше, чем в условиях гравитационной конвекции. Следовательно, принудительным обдувом можно существенно уменьшить тепловое самовоздействие.

Рассмотрим модельную лабораторную трассу, состоящую из трех участков. На первом пучок имеет в начале радиус  $a_1 \equiv a$ , длина участка равна  $L_1$ . В конце этого участка установлен телескоп с коэффициентом увеличения  $k_1$ . В конце второго участка длины  $L_2$  установлено фокусирующее зеркало (или линза). В отсутствие начальной расходимости и возмущений на трассе пучок на третьем заключительном участке длины  $L_3$  фокусируется в точку.

В вакууме ход лучей (соответствующих, например, экспоненциальному радиусу) описывается следующими выражениями:

$$z = 0 \div z_1; z_1 = L_1/L; \theta_{01} = \theta_0; \quad (8)$$

$$r_{01}(z) = a_1/a + z \theta_{01}; r_{011} = r_{01}(z_1); \quad (9)$$

$$z = z_1 \div z_2; z_2 = (L_1 + L_2)/L; \theta_{02} = \theta_{01}/k_1; \quad (10)$$

$$r_{02}(z) = r_{011} k_1 + (z - z_1) \theta_{02}; r_{022} = r_{02}(z_2); \quad (11)$$

$$z = z_2 \div z_3; z_3 = (L_1 + L_2 + L_3)/L; \theta_{03} = \theta_{02} - r_{022}/f; f = L_3/L; \quad (12)$$

$$r_{03}(z) = r_{022} + (z - z_2) \theta_{03}. \quad (13)$$

В выражениях (10), (11) учтено, что телескоп увеличивает размер пучка в  $k_1$  раз и уменьшает расходимость пучка в  $1/k_1$  раз.

В нелинейной среде, следуя работам [1, 2], возмущение угла расходимости и радиуса пучка по порядку величины будем оценивать соотношениями

$$B_1(z) = \frac{N}{r_0(z)} \int_0^z \frac{(e^{-N\alpha z'})^m}{r_0^n(z')} dz'; \Delta\theta/r_0(z) \sim \Delta B_1(z); \quad (14)$$

$$\frac{\Delta r}{r_0(z)} \sim B_2(z) = \int_0^z \frac{B_1(z')}{r_0(z')} dz'. \quad (15)$$

Здесь  $r_0(z) = r_{01}(z); r_{02}(z); r_{03}(z)$  – переменный радиус пучка в вакууме. Показатели степени  $m, n$  в (14) равны:  $m = 1, n = 1$  при поперечном обдуве;  $m = 2/3, n = 1$  – в условиях гравитационной конвекции. Факторы  $B_1(z), B_2(z)$  получены на основе линеаризованного решения уравнений (1), (2), строго справедливого при  $N \rightarrow 0$ . Сравнение с численными расчетами [1] показало, что по крайней мере для усредненных характеристик эти величины дают удовлетворительные результаты при умеренных значениях  $N \sim 1$ . В то же время вычисление интегралов

(14), (15) значительно проще, чем численное решение уравнений (1), (2). В ряде ситуаций справедливы приближенные аналитические соотношения для функций  $B_1$ ,  $B_2$ , которые позволяют быстро оценить вклад в возмущения пучка того или иного участка трассы.

Учитывая, что параметр поглощения, как правило, мал ( $N_\alpha \ll 1$ ) угол расходимости и средний радиус пучка в нелинейной среде можно оценить по формулам:

$$z = 0 \div z_1 : \theta_1(z) \simeq \theta_{01} + r_{01}(z) B_1(z) C ;$$

$$\left\{ B_1(z) = \frac{N_1}{1 + \theta_0 z} \frac{\ln(1 + \theta_0 z)}{\theta_0} \right\}_{\theta_0 \rightarrow 0} \simeq N_1 z ; \theta_{11} = \theta_1(z_1), \quad (16)$$

$$\left\{ r_1(z) \right\}_{\theta_0=0} = 1 + CB_2(z) ; r_{11} = r_1(z_1) ; B_2(z) \Big|_{\theta_0=0} = N_1 \frac{z^2}{2}, \quad (17)$$

$$z = z_1 \div z_2 : \theta_2(z) \simeq \theta_{11}/k_1 + r_{02}(z) C \Delta B_1(z) ;$$

$$\left\{ B_1(z) = B_1(z_1) + \frac{N_2}{r_{02}(z)} \frac{\ln \left[ 1 + \frac{\theta_{01}}{k_1 r_{011}} (z - z_1) \right]}{(\theta_{01}/k_1)} \right\}_{\theta_0 \rightarrow 0} \rightarrow B_1(z_1) + \frac{N_2(z - z_1)}{r_{022}^2}, \quad (18)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_{22} = \theta_2(z_2) ; \\ \frac{r_2(z)}{r_{02}(z)} = 1 + CB_2(z) ; B_2(z) \Big|_{\theta_0=0} = B_2(z_1) + B_1(z_1) \frac{z - z_1}{r_{022}} + \frac{N_2}{r_{022}^3} \frac{(z - z_1)^2}{2}, \\ r_{22} = r_2(z_2) ; \end{array} \right. \quad (19)$$

$$z = z_2 \div z_3 : B_1(z) = B_1(z_2) + \frac{N_3}{r_{03}(z) \theta_{03}} \ln \left[ 1 + \frac{\theta_{03}}{r_{022}} (z - z_2) \right] ;$$

$$\left\{ \theta_3(z) = \theta_{22} + N_3 \frac{\ln \left[ 1 + \frac{\theta_{03}}{r_{022}} (z - z_2) \right]}{\theta_{03}} \right\}_{\theta_0 \rightarrow 0} \rightarrow \theta_{22} + \frac{N_3(z - z_2)}{r_{022}^2}, \quad (20)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{r_3(z)}{r_{03}(z)} = 1 + CB_2(z) ; B_2(z) = B_2(z_2) + \frac{B_1(z_2)}{\theta_{03}} \ln \left[ 1 + \frac{\theta_{03}}{r_{022}} (z - z_2) \right] + \\ + \frac{N_3}{r_{022} \theta_{03}^2} \left\{ - \frac{\theta_{03}(z - z_2)}{r_{03}(z)} + \ln \left[ 1 + \frac{\theta_{03}}{r_{022}} (z - z_2) \right] \right\}. \end{array} \right. \quad (21)$$

Параметр  $N$  записали с индексами – номерами участков, учитывая, что различные участки могут содержать различные вещества и при разных условиях (например, на участках трассы различаются коэффициенты поглощения и скорости обдува).

С использованием приближенных (16) – (21) и точных (14), (15) значений факторов  $B_1$ ,  $B_2$  проанализированы возмущения пучка на трассах, содержащих один или два телескопа, на трассах, включающих участки с воздухом различной влажности и участки с техническим азотом, имеющим различные концентрации окислов, хорошо поглощающих излучение рассматриваемого инфракрасного диапазона. Рассматривался режим самонаведенной конвекции и поперечный обдув пучка. Для контроля проводились численные расчеты уравнений (1), (2) путем разбиения пучка на множество (порядка 10 тысяч) элементарных лучевых трубок, каждой из которых приписывалась доля энергии пучка и первоначальный угол. Изменение угла и, следовательно, координат индивидуальной трубки вычислялось согласно (2), а вместо уравнения (1) учитывалось убывание энергии в трубке за счет поглощения по закону Бутера–Бэра. Дифракция на нелинейных неоднородностях среды не учитывалась. Уравнения Буссинеска (5)–(7) решались по алгоритму, описанному в [3]. На рис. 1 построены зависимости среднего

радиуса пучка  $r_{cp} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [x^2 + (y - \Delta y)^2] I dx dy / W$  (где  $\Delta y = \int_{-\infty}^{+\infty} y I dx dy / W$  – смещение центра тяжести,  $W = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} I dx dy$  – полная мощность пучка) от фактора теплового расширения

$B_2(z = z_3)$  для различных ситуаций, упомянутых выше. При умеренных значениях фактора  $B_2(z_3) < 6,5$  средний радиус прямо пропорционален величине  $B_2$ , при значениях  $B_2$ , приближающихся к 10, линейность зависимости  $r_{cp}(B_2)$  нарушается. Для сфокусированных в конце трассы пучков факторы  $B_1, B_2$  имеют особенность в фокусе, так как радиус пучка в вакууме стремится к нулю при отсутствии начальной расходимости (в рамках волновой теории радиус пучка стремится к дифракционно ограниченному пределу  $\sim 1/F$ ). Факторы  $B_1, B_2$  во многих ситуациях принимают значения больше десяти.

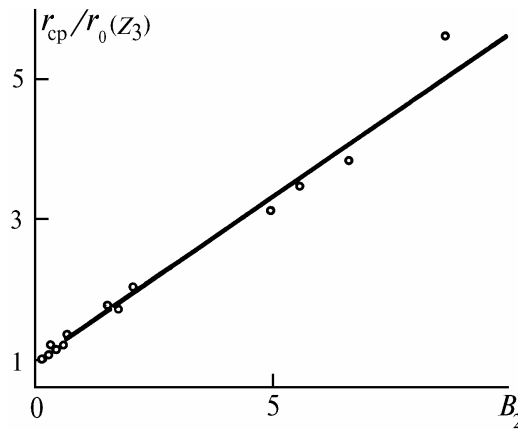


Рис. 1. Зависимость среднего радиуса пучка в контрольном сечении от фактора теплового самовоздействия

Для оценки возмущений пучка в таких и подобных ситуациях введем в рассмотрение модель пучка эллиптического сечения с переменными размерами по координатам  $r_x(z), r_y(z)$  и соответствующими углами расходимости  $\theta_x(z) = dr_x/dz, \theta_y(z) = dr_y/dz$ , а также с координатой смещения центра тяжести распределения интенсивности  $r_c(z)$  и соответствующим углом  $\theta_c(z) = dr_c/dz$ .

Переменную по трассе интенсивность пучка можно записать в виде  $I_{физ} = W_{физ}/[\pi r_x(z) r_y(z)]$ , а возмущение плотности  $\rho_1$ , согласно (4) или (7), оценить по формулам (по крайней мере, для установившегося самовоздействия)

$$\rho_1 \sim \exp(-N_\alpha z) / r_x(z); \quad \rho_1 \sim [\exp(-N_\alpha z)]^{2/3} / r_x^{2/3}(z) r_y^{1/3}(z)$$

для случая обдува либо для случая гравитационной конвекции соответственно. На основании уравнений (1), (2) для оценки возмущений пучка можно использовать следующую систему:

$$\frac{dr_x}{dz} = \theta_x; \quad \frac{d\theta_x}{dz} = \frac{b [\exp(-N_\alpha z)]^l}{r_x^n r_y^m}, \quad b = K_x N; \quad (22)$$

$$\frac{dr_y}{dz} = \theta_y; \quad \frac{d\theta_y}{dz} = \frac{b_1 [\exp(-N_\alpha z)]^l}{r_x^p r_y^q}, \quad b_1 = K_y N; \quad (23)$$

$$\frac{dr_c}{dz} = \theta_c; \quad \frac{d\theta_c}{dz} = \frac{c [\exp(-N_\alpha z)]^l}{r_x^p r_y^q}, \quad c = K_c N; \quad (24)$$

где в условиях обдува имеем  $l = 1, p = 1, q = 1, m = 0, n = 2$  и в условиях гравитационной конвекции –  $l = 2/3, n = 5/3, m = 1/3, p = 2/3, q = 4/3$ . Постоянные  $K_x, K_y, K_c$ , как показало сравнение с вы-

шеупомянутыми численными расчетами, в условиях гравитационной установившейся конвекции равны  $K_x = 1$ ,  $K_y \simeq 0,5 \simeq K_c$ . Если пренебречь ослаблением за счет поглощения ( $N_\alpha = 0$ ), то в условиях обдува уравнение (22) сводится к уравнению свободного падения (индексы  $\langle x \rangle$  в дальнейшем опускаем):

$$r'' = \pm b/r^2; \quad r' = \theta. \quad (25)$$

В условиях гравитационной конвекции, предположив, что  $r_x = \text{const } r_y$  (для оценок возмущений по порядку величины такое предположение справедливо), можно также свести анализ решения системы (22) – (24) к анализу поведения решения уравнения (25). Нижний знак <минус> перед параметром  $b$  в (25) соответствует распространению пучка в условиях самофокусировки вследствие формы профиля либо свойств среды.

Интегрируя (25) один раз, находим

$$r'^2 \pm 2b/r = \pm A^2; \quad |\theta| = \sqrt{\mp \frac{2b}{r} \pm A^2}; \quad r = (2b/(A^2 \mp \theta^2)); \quad A^2 = \theta_1^2 \pm (2b/r_1), \quad (26)$$

где  $\theta_1, r_1$  – заданные начальные значения.

Проинтегрируем (26) и сделаем замену:  $\tilde{\theta} = q/A$ ,  $\tilde{r} = rA/2b$ ,  $\tilde{z} = (z - z_1)A^3/2b$ . Получим следующие универсальные решения в случае дефокусировки и самофокусировки соответственно:

$$\tilde{z} = \tilde{r} \tilde{\theta} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \tilde{\theta}}{1 - \tilde{\theta}} \right|, \quad z_1 = \frac{2b}{A^3} \left( \tilde{r}_1 \tilde{\theta}_1 + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \tilde{\theta}_1}{1 - \tilde{\theta}_1} \right| \right); \quad (27)$$

$$\tilde{z} = -\tilde{r} \tilde{\theta} - \arctg \tilde{\theta}, \quad z_1 = (2b/A^3) \left( -\tilde{r}_1 \tilde{\theta}_1 - \arctg \tilde{\theta}_1 \right), \quad (28)$$

$$\tilde{r} = 1/(1 \mp \tilde{\theta}^2). \quad (29)$$

Начало координат оси  $z$  сдвинули на величину  $z_1$  таким образом, чтобы  $\tilde{\theta}(\tilde{z} = 0) = 0$ ,  $\tilde{r}(\tilde{z}) = 1$ . На рис. 2 построены решения (27), (29), соответствующие распространению пучка в дефокусирующей среде (кривые 1). Для сравнения приведена линейная зависимость  $\tilde{r} = \tilde{z}$ . Там же приведены зависимости (28), (29), соответствующие самофокусирующемуся пучку (кривые 2).

В конкретной задаче реализуется некоторый участок универсальных решений (27) – (29), который в зависимости от величины заданных параметров  $\theta_1, r_1, b$  и длины трассы может содержать или не содержать внутри себя сечение с минимальным (или максимальным) средним радиусом.

Решение (27), (29) имеет асимптотические соотношения:

$$\tilde{r} = \tilde{z} - 0,5 \ln(4\tilde{z}) + \dots; \quad \tilde{\theta} = 1 - 1/2\tilde{z} + \dots; \quad \tilde{z} \rightarrow \infty, \quad (30)$$

$$\tilde{r} \simeq 1 + \tilde{z}^2/4 + \dots; \quad \tilde{\theta} \simeq |\tilde{z}/2 + \dots; \quad \tilde{z} \rightarrow 0. \quad (31)$$

Решение (28), (29) определено в ограниченной области  $|\tilde{z}| \leq \pi/2$  и имеет следующие асимптотические выражения:

$$\tilde{r} \simeq 1 - \tilde{z}^2/4 + \dots; \quad \tilde{\theta} \simeq -\tilde{z}/2 + \dots; \quad \tilde{z} \rightarrow 0, \quad (32)$$

$$\tilde{r} \approx \left[ \frac{3}{2} \left( \mp \frac{\pi}{2} + \tilde{z} \right) \right]^{2/3} + \dots; \quad \tilde{\theta} \gg \mp \left[ \frac{2}{3(\mp \pi/2 + \tilde{z})} \right]^{1/3} + \dots; \quad \tilde{z} \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}. \quad (33)$$

Эти соотношения позволяют установить аналитические зависимости между заданными размерами пучка в конце трассы (заданным допустимым уровнем возмущений) и требуемыми

для этого уровнями значений физических параметров: поглощаемой мощности, скорости обдува, состава и состояния среды и т.д.

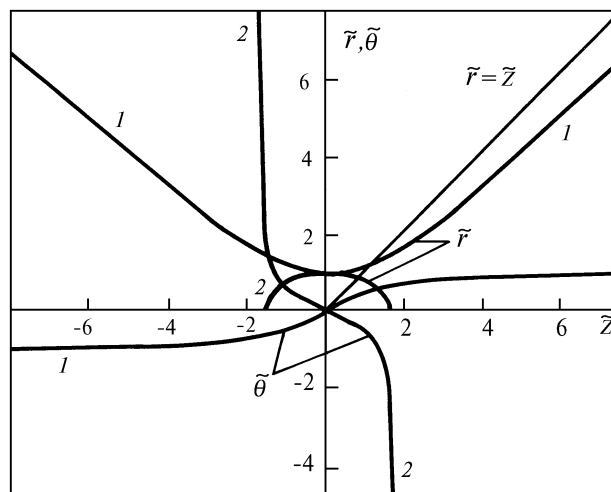


Рис. 2. Изменение среднего радиуса пучка и угла отклонения вдоль трассы, полученное из решения уравнений (27)–(29)

В заключение отметим, что предложен эффективный алгоритм оценки возмущений пучка вследствие теплового самовоздействия на сложных лабораторных трассах, включающих в себя множество участков с различными условиями распространения. Естественно, развитый подход справедлив и в случае распространения оптического пучка в атмосфере.

1. Кучеров А.Н., Макашев Н.К., Устинов Е.В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1991. Т. 34. №5. С. 528 – 535.
2. Кучеров А.Н., Макашев Н.К., Устинов Е.В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1993. Т. 36. №2. С. 135 – 142.
3. Кучеров А.Н., Макашев Н.К., Устинов Е.В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1992. Т. 35. №2. С. 145–154.

Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н.Е. Жуковского, г. Москва

Поступила в редакцию 22 сентября 1993г.

**A. N. Kucherov, N. K. Makashev, E. V. Ustinov. Propagation of an Optical Beam of Variable Radius under Conditions of Gravitational Convection and Air Blow.**

A possibility of estimating beam perturbations due to gravitational convection and transverse air blow from the thermal blooming effect is demonstrated in this paper for optical beams of variable radii propagating along a model laboratory path. Perturbations of focused and self-focused beams occurring on the propagation path are proposed to be estimated based on the value of their mean radii, for which we have derived approximate analytical relationships.