<Оптика атмосферы и океана>, **6**, N 1 (1993)

УДК 538.56

А.А. Суворов

ОБОСНОВАНИЕ ИСЧИСЛЕНИЯ СТРАТОНОВИЧА ДЛЯ АНАЛИЗА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В СРЕДАХ С δ -КОРРЕЛИРОВАННЫМИ ФЛУКТУАЦИЯМИ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ

В квазиоптическом приближении рассмотрено распространение электромагнитной волны в среде с δ-коррелированными флуктуациями комплексной диэлектрической проницаемости. Получены уравнения для среднего поля и функций когерентности в произвольном стохастическом исчислении. Показано, что единственным, совместимым с законом сохранения мощности излучения, является исчисление Стратоновича.

Теоретическое исследование поведения систем, подверженных воздействию случайных сил, значительно упрощается, если удается доказать, что последние являются δ-коррелированными случайными процессами (полями). При этом обнаруживаются весьма общие закономерности в поведении динамических систем, относящихся к различным областям естествознания: физике, химии, биологии и прочим (см., например, [1, 2, 3]). Однако при воздействии мультипликативного шума за упрощение решения задач, обусловленное δ-коррелированностью, приходится расплачиваться неоднозначностью перехода от стохастических уравнений, описывающих поведение динамической системы, к уравнениям для статистических моментов (или к уравнениям типа Фоккера–Планка для распределения плотности вероятностей). В этом случае имеет место так называемая дилемма Ито–Стратоновича (см., например, [1, 3, 4]).

С одной стороны, поскольку приближение диффузионного случайного процесса является нулевым приближением по времени корреляций шума, то представляется естественным исчисление Стратоновича, позволяющее оперировать с δ-коррелированными случайными процессами (полями) как с обычными функциями [2]. С другой стороны, как показано в [5], для термодинамических систем принципу симметрии Онзагера удовлетворяет «кинетическое» исчисление, которое не соответствует ни исчислению Ито, ни исчислению Стратоновича (см. также [4]). Математикам, занимающимся теорией стохастических дифференциальных уравнений, более импонирует исчисление Ито (см., например, [1, 3, 6]).

Как известно, эта неоднозначность связана с крайней нерегулярностью поведения белого шума, что для Винеровского процесса $W(\xi)$ математически выражается соотношениями

$$\delta W(\xi) \sim \sqrt{\delta\xi}\,,\ \ (\delta W(\xi))^2 \sim C_\alpha \delta\xi\,.$$

При этом постоянная C_α принимает различные значения в зависимости от вида исчисления, в частности, в исчислении Стратоновича ($\alpha = 1\ /2$):$C_\alpha = 0$. Для устранения неоднозначности и выбора соответствующего стохастического исчисления после формального решения динамического уравнения требуется привлекать дополнительные (физические) соображения, касающиеся поведения системы.

Данная статья посвящена вопросу выбора стохастического исчисления при исследовании распространения волн в средах с δ-коррелированными флуктуациями комплексной диэлектрической проницаемости $\tilde{\varepsilon}$. Хотя прошло уже более двадцати лет с тех пор, как было показано, что при определенных условиях случайные изменения $\tilde{\varepsilon}$ можно считать δ-коррелированными (см., например, [7, 8]), обоснование выбора исчисления для этой задачи не проводилось и все вычисления «по умолчанию» выполнялись в смысле Стратоновича без специального обоснования возможности этого. Однако рассмотрение указанной задачи интересно с двух точек зрения. Во-первых, потому что параболическое уравнение квазиоптики (которому подчиняется комплексная амплитуда поля) со случайным полем диэлектрической проницаемости является примером динамического уравнения с мультипликативным белым шумом, и в случае, когда $\mathrm{Im}(\tilde{\varepsilon}) = 0$, можно четко проследить, каким образом устанавливается однозначность решения. А именно, при $\mathrm{Im}(\tilde{\varepsilon}) = 0$ комплексная амплитуда поля помимо уравнения (2) должна удовлетворять закону сохранения мощности излучения (непосредственно вытекающему из (2)). Во-вторых, если мнимая часть $\tilde{\varepsilon}$ отлична от нуля, то вследствие несохранения мощности в этом случае необходимо для установления однозначности привлекать дополнительные соображения. В частности, дилемма Ито–Стратоновича разрешается, если предполагать, что случайные воздействия действительной и мнимой составляющих $\tilde{\varepsilon}$ описываются в рамках одного исчисления.

Будем рассматривать распространение электромагнитной волны в среде с флуктуациями комплексной диэлектрической проницаемости, изменение которой дается выражением

$$\tilde{\varepsilon}(z, \rho) = \tilde{\varepsilon}_R(z, \rho) + i\,\tilde{\varepsilon}_I(z, \rho)\,, \tag{1}$$

где $\tilde{\varepsilon}_R$ и $\tilde{\varepsilon}_I$ – действительная и мнимая составляющие $\tilde{\varepsilon}$ соответственно. Пусть условия задачи таковы, что распространение волны можно описывать в рамках параболического уравнения квазиоптики [7]

$$2\,i\,k\,\frac{\partial}{\partial z}U + \Delta_{\perp}U + k^2\,\tilde{\varepsilon}(z, \rho)\,U = 0\,, \tag{2}$$

(где $U(z, \rho)$ – комплексная амплитуда напряженности электрического поля, k – волновое число) и считать поле $\tilde{\varepsilon}$ гауссовым, однородным и δ-коррелированным в преимущественном направлении распространения волны (вдоль оси z, ρ –радиус-вектор в поперечном направлении). Заметим, что в этом приближении хорошо описывается распространение оптического излучения в турбулентной атмосфере, а также акустических волн в океане, где флуктуирующей является скорость звука. В (2) не включено среднее значение мнимой части ε, поскольку оно непосредственно не влияет на статистические характеристики волны и будет учтено в заключительном разделе при анализе результатов.

Первые два раздела статьи посвящены выводу замкнутых уравнений, описывающих поведение среднего поля $\langle U\rangle$ и функций когерентности

$$\Gamma_{mn}(z, \{\rho_j\}_{j=1,\,n+m}) = \langle\prod_{j=1}^{n}\prod_{l=n+1}^{n+m} U(z, \rho_j)\,U^*(z, \rho_l)\rangle$$

без конкретизации стохастического исчисления и являющихся обобщением известных уравнений [7] на случай распространения волн в средах с флуктуациями комплексной диэлектрической проницаемости. В третьем разделе решение для случайной реализации поля в произвольном исчислении будет выражено через решение в смысле Стратоновича. Анализ результатов и выбор исчисления будут проведены в последнем разделе. В основной части статьи будет рассматриваться случай, когда действительная и мнимая составляющие $\tilde{\varepsilon}$ подчиняются одному исчислению. А вопрос о раздельном исчислении для $\tilde{\varepsilon}_R$ и $\tilde{\varepsilon}_I$ будет кратко рассмотрен в конце статьи.

1. **Уравнение для среднего поля**

В дальнейшем наравне с (2) будем также использовать следующую форму записи параболического уравнения:

$$\delta U(z, \rho) = \frac{i}{2\,k}\,\Delta_{\perp}U(z, \rho)\delta z + \frac{i\,k}{2}\,U(\tilde{z}, \rho)\,\delta W(z; \rho)\,. \tag{3}$$

Здесь обозначен через $\delta W(z;\ \rho) = \tilde{\varepsilon}\,(z,\ \rho)\,\delta z$ Винеровский процесс (точнее было бы назвать: поле, но мы будем придерживаться устоявшейся терминологии), характеризуемый нулевым средним

$$<\delta W(z;\rho)> = <\tilde{\varepsilon}\,(z,\rho)>\delta z = 0 \tag{4a}$$

и корреляционными функциями

$$<\delta W(z;\rho_1)\,\delta W(z;\rho_2)> = <\tilde{\varepsilon}\,(z,\rho_1)\,\tilde{\varepsilon}\,(z,\rho_2)>\delta z\,\delta z = A_{\varepsilon\varepsilon}(\rho_1-\rho_2)\,\delta z\,;$$

$$<\delta W(z;\rho_1)\,\delta W^*(z;\rho_2)> = <\tilde{\varepsilon}\,(z,\rho_1)\,\tilde{\varepsilon}^*\,(z,\rho_2)>\delta z\,\delta z = A_{\varepsilon\varepsilon^*}(\rho_1-\rho_2)\delta z\,. \tag{4b}$$

Причем функции

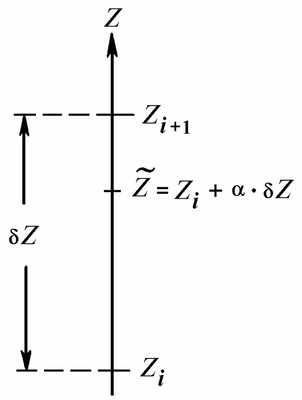
$$A_{\varepsilon\varepsilon}(\rho) = A_{RR}\,(\rho) + 2\,i\,A_{RI}\,(\rho) - A_{II}\,(\rho)\,,$$

$$A_{\varepsilon\varepsilon^*}(\rho) = A_{RR}\,(\rho) + A_{II}\,(\rho) \tag{5}$$

следующим образом выражаются через трехмерную спектральную плотность $\Phi_{qq'}(\varkappa_z,\ \boldsymbol{\varkappa})$ составляющих $\tilde{\varepsilon}$:

$$A_{qq'}(\rho) = 2\pi\int\!\!\int d^2\boldsymbol{\varkappa}\,\Phi_{qq'}(0,\boldsymbol{\varkappa})\,\mathrm{e}^{i\varkappa\rho}\,,$$

где $\{q,\ q'\} = \{R,\ I\}$. В уравнении (3) значение $U(\tilde{z},\ \rho)$ во втором слагаемом слева берется в плоскости $z = z_i + \alpha\delta z$ (см. рисунок), причем в зависимости от величины параметра $\alpha \in [0,\ 1]$ имеем дело с различными стохастическими исчислениями; в частности, значение $\alpha = 0$ соответствует решению в смысле Ито, $\alpha = 1/2$ – в смысле Стратоновича, обычно используемое при решении (3). Мы пока не будем конкретизировать значение параметра α, а обобщим известные результаты [7] для среднего поля в исчислении Стратоновича на случай произвольного исчисления. Угловые скобки <...> означают усреднение по ансамблю реализаций случайного поля $\tilde{\varepsilon}$.



В соответствии с (3) запишем уравнение для среднего поля:

$$\delta<U(z,\rho)> = \frac{i}{2k}\,\Delta_\perp<U(z,\rho)>\delta z + \frac{i\,k}{2}<U(\tilde{z},\rho)\,\delta W(z;\rho)>. \tag{6}$$

Для определения коррелятора $<U(\tilde{z})\delta W(z)>$ разложим U в окрестности «точки» z_i (см. рисунок) в ряд Тейлора

$$U(\tilde{z}) = U(z_i) + \alpha\delta U(z_i)$$

и, воспользовавшись уравнением (5), свойством неупреждающей функции в исчислении ИТО [1] и характеристиками поля $\alpha W(z, \rho)$ (4), получим

$$<U(\tilde{z})\,\delta W(z_i)> = <[U(z_i) + \alpha\delta U(z_i)]\,\delta W(z_i)> = \frac{i\,k}{2}\alpha<U(z_i, \rho)><\delta W^2(z_i; \rho)> = \frac{i\,k}{2}\,\alpha\,A_{\varepsilon\varepsilon}(0)<U(z_i, \rho)>\delta\,z. \tag{7}$$

После подстановки (7) в исходное уравнение (6) приходим к уравнению для среднего поля

$$\delta<U(z, \rho)> = \frac{i}{2k}\,\Delta_\perp<U(z, \rho)>\delta z - \frac{k^2}{4}\,\alpha\,A_{\varepsilon\varepsilon}(0)<U(z, \rho)>\delta\,z$$

или в более привычном виде

$$2i\,k\,\frac{\partial}{\partial z}<U> + \Delta_\perp<U> + \frac{i\,k^3}{4}\,\alpha\,A_{\varepsilon\varepsilon}(0)<U(z, \rho)> = 0\,. \tag{8}$$

Уравнение (8) при значении $\alpha = 1/2$ (исчисление Стратоновича) совпадает с результатом, если $\tilde{\varepsilon} = 0$, полученным ранее другим способом (см., например, [7]).

В заключение этого раздела заметим, что решение уравнения (8) можно представить в виде

$$<U(z, \rho)> = <U(z, \rho)>_{1/2}\,\exp\left[-\frac{k^2}{4}\,(\alpha - 1/2)\,A_{\varepsilon\varepsilon}(0)\,z\right], \tag{9}$$

здесь $<U(z, \rho)>_{1/2}$ – решение в смысле Стратоновича при $\alpha = 1/2$. В дальнейшем обозначение $F_{1/2}$ (для функций от параметра α) будет иметь тот же смысл.

2. Уравнения для функций когерентности

Здесь нам придется использовать еще одно необычное свойство функций от Винеровского процесса. (Первое, это неоднозначность перехода к уравнениям для статистических моментов, вследствие зависимости результата усреднения, например в (7), от выбора «точки» $\tilde{z}(\alpha)$). Поскольку в среднеквадратическом пределе в исчислении Иго имеет место соотношение [1]

$$\delta W(z; \rho_1)\,\delta W(z; \rho_2) = A_{;\,;}(\rho_1 - \rho_2)\,\delta\,z,$$

которое следующим образом обобщается на случай произвольного исчисления:

$$\delta W(z; \rho_1)\,\delta W(z; \rho_2) = (1 - 2\alpha)\,A_{\varepsilon\varepsilon}(\rho_1 - \rho_2)\delta\,z\,. \tag{10}$$

то для дифференциала произведения двух функций U, взятых в разных поперечных точках, воспользовавшись определением δU (3) и сохраняя слагаемые первого порядка по δz, имеем

$$\delta(U(z, \rho_1)\,U^*(z, \rho_2)) = U(z, \rho_1)\delta U^*(z, \rho_2) + U^*(z, \rho_2)\delta U(z, \rho_1) + \delta U(z, \rho_1)\delta U^*(z, \rho_2) =$$

$$= U(z, \rho_1)\,\delta U^*(z, \rho_2) + U^*(z, \rho_2)\,\delta U(z, \rho_1) - \frac{k^2}{2}\,(\alpha - 1/2)\,A_{\varepsilon\varepsilon^*}(\rho_1 - \rho_2)\,U(z, \rho_1)U^*(z, \rho_2)\delta\,z\,. \tag{11}$$

Во-первых, выведем уравнение для функции когерентности второго порядка

$$\Gamma_{11}(\rho_1, \rho_2; z) = <U(z, \rho_1)\,U^*(z, \rho_2)>\,.$$

Для этого поступим стандартным образом. Уравнения, которым удовлетворяют U_1 и U_2^*, домножим на U_2^* и U_1, соответственно вычтем одно из другого и, после усреднения и использования (11), получим

$$\delta\Gamma_{11} = \frac{i}{2k}\,[\Delta_1 - \Delta_2]\,\Gamma_{11}\,\delta z - \frac{k^2}{2}\,(\alpha - 1/2)\,A_{\varepsilon\varepsilon^*}(\rho_1 - \rho_2)\,\Gamma_{11}\,\delta z + \frac{i\,k}{2} <U_1(\tilde{z})\,U_2^*\,\tilde{z}\,[\delta W_1(z) - \delta W_2^*(z)]> ,$$

где обозначено

$$U_j(z) = U(z, \rho_j)\,,\ \delta W_j(z) = \delta W(z; \rho_j)\,,\ \Delta_j = \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_j^2}\,,\ j = 1, 2.$$

После дальнейших вычислений, подобных проведенным в п. 1 для среднего поля, приходим к уравнению для функции когерентности второго порядка в случае произвольного исчисления

$$2\,i\,k\,\frac{\partial}{\partial z}\Gamma_{11} + [\Delta_1 - \Delta_2]\,\Gamma_{11} + \frac{i\,k^3}{4}[A_{\varepsilon\varepsilon}(0) + A^*_{\varepsilon\varepsilon}(0) - 2\,A_{\varepsilon\varepsilon^*}(\rho_1 - \rho_2)]\,\Gamma_{11} + \frac{i\,k^3}{4}(\alpha - 1/2)\,\times$$

$$\times\,[A_{\varepsilon\varepsilon}(0) + A^*_{\varepsilon\varepsilon}(0)]\,\Gamma_{11} = 0. \tag{12}$$

Данное уравнение в случае $\alpha = 1/2$ также совпадает с известным уравнением (если $\tilde{\varepsilon}_I = 0$) для Γ_{11}, полученным ранее в исчислении Стратоновича [7]. Его решение представим в виде

$$\Gamma_{11}(\rho_1, \rho_2; z) = \Gamma_{11}(\rho_1, \rho_2; z)_{1/2}\,\exp\left\{-\frac{k^2}{4}\,(\alpha - 1/2)\,[A_{\varepsilon\varepsilon}(0) + A^*_{\varepsilon\varepsilon}(0)]\,z\right\}. \tag{12a}$$

Проводя аналогичные вычисления, уравнение (12) без труда обобщается на случай $n + m$-го момента поля. Не выписывая промежуточные выкладки, приведем окончательный результат

$$2\,i\,k\,\frac{\partial}{\partial z}\Gamma_{nm} + \left[\sum_{j=1}^{n}\Delta_j - \sum_{j=n+1}^{n+m}\Delta_j\right]\Gamma_{nm} + \frac{i\,k^3}{4}\,(\alpha - 1/2)\,[n\,A_{\varepsilon\varepsilon}(0) + m\,A^*_{\varepsilon\varepsilon}(0)]\,\Gamma_{nm} +$$

$$+\frac{i\,k^3}{4}\left[\sum_{j,\,l=1}^{n}\sum A_{\varepsilon\varepsilon}(\rho_j - \rho_l) + \sum_{j,\,l=n+1}^{n+m}\sum A^*_{\varepsilon\varepsilon}(\rho_j - \rho_l) - 2\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=n+1}^{n+m}A_{\varepsilon\varepsilon^*}(\rho_j - \rho_l)\right]\Gamma_{nm} = 0\,. \tag{13}$$

Уравнение (13) в исчислении Стратоновича ($\alpha = 1/2$), при распространении излучения в прозрачной среде (когда $\mathrm{Im}\,\tilde{\varepsilon}_I = 0$), также эквивалентно результату [7]. Его решение, подобно (9) и (12 а) можно записать в следующем виде:

$$\Gamma_{nm}(z, \{\rho_j\}_{j=1,\,n+m}) = \Gamma_{nm}(z, \{\rho_j\}_{j=1,\,n+m})_{1/2}\,\exp\left\{-\frac{k^2}{4}\,(\alpha - 1/2)\,[n\,A_{\varepsilon\varepsilon}(0) + m\,A^*_{\varepsilon\varepsilon}(0)]\,z\right\}. \tag{14}$$

Из соотношений (9), (12 а) и (14) можно заметить, что решение уравнения (2) для случайной реализации комплексной амплитуды поля в произвольном исчислении выражается через решение в смысле Стратоновича

$$U(z, \rho) = U(z, \rho)_{1/2}\,\exp\left\{-\frac{k^2}{4}\,(\alpha - 1/2)\,A_{\varepsilon\varepsilon}(0)\,z\right\}. \tag{15}$$

Покажем теперь, что это следует непосредственно из (2).

3. Решение для реализации поля

Решение уравнения (2) представим в форме интеграла Гюйгенса-Кирхгофа

$$U(z, \rho) = \int\!\!\int d^2\rho_0\,U_0(\rho_0)\,G(\rho, z\,|\,\rho_0, 0)\,, \tag{16}$$

где $G(\rho, z\,|\,\rho_0, z_0)$ – функция Грина уравнения (2), удовлетворяющая «начальному» условию

$$G(\rho, z\,|\,\rho_0, z_0)\big|_{z=z_0} = \delta(\rho - \rho_0)$$

и подчиняющаяся групповому свойству

$$G(\rho, z\,|\,\rho_0, z_0) = \int\!\!\int d^2\rho_1\, G(\rho, z\,|\,\rho_1, z_1)\, G(\rho_1, z_1\,|\,\rho_0, z_0), \qquad (17)$$

на многократном применении которого основано представление функции Грина $G(\rho, z|, \rho_0, z_0)$ в форме фейнмановского интеграла по траекториям [9]. Примеры использования метода функционального интегрирования для задач распространения волн в случайных средах можно найти в [8, 10]. Здесь же воспользуемся идеей [9] и рассмотрим решение (2) на элементарном отрезке $z \in [z_i + \delta z, z_i]$ (см. рисунок), в пределах которого поперечным изменением $\tilde{\varepsilon}$ можно пренебречь (у $\tilde{\varepsilon}\,(z, \rho)$ считать ρ фиксированным параметром). Тогда перейдем от (2) к уравнению для Фурье образа функции $G(\rho\,, z_i + \delta\, z\,|\, \rho_0, z_i)$

$$\tilde{G}(\varkappa, z_i + \delta z\,|\,\rho_0, z_i) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int\!\!\int d^2\rho\; G(\rho, z_i + \delta\, z\,|\,\rho_0, z_i)\, e^{-i\varkappa\rho},$$

которое имеет вид

$$\delta\tilde{G}(\varkappa, z\,|\,\rho_0, z_i) = -\frac{i}{2k}\varkappa^2\, \tilde{G}(\varkappa, z)\,\delta z + \frac{i\,k}{2}\,\tilde{G}(\varkappa, \tilde{z})\,\delta W(z; \rho)\,,$$

$$\tilde{G}(\varkappa, z\,|\,\rho_0, z_i)\big|_{z=z_i} = \frac{1}{(2\pi)^2}\, e^{-i\varkappa\rho_0}\,. \qquad (18)$$

Решение уравнения (18) отдельно, в исчислениях Ито и Стратоновича, приведено в [1] и с применением соотношения (10) для Винеровского процесса легко обобщается на случай произвольного исчисления. В итоге после выполнения обратного преобразования Фурье для функции Грина на элементарном участке δz, получим

$$G(\rho, z_i + \delta\, z\,|\,\rho_0, z_i) = G(\rho, z_i + \delta\, z\,|\,\rho_0, z_i)_{1/2}\, \exp\left\{-\frac{k^2}{4}(\alpha - 1/2)\, A_{\varepsilon\varepsilon}(0)\,\delta\, z\right\}.$$

Далее, так же как и в [9], многократно используя свойство (17), для функции Грина придем к окончательному результату

$$G(\rho, z\,|\,\rho_0, z_0) = G(\rho, z\,|\,\rho_0, z_0)_{1/2}\, \exp\left\{-\frac{k^2}{4}(\alpha - 1/2)A_{\varepsilon\varepsilon}(0)z\right\}.$$

Что совместно с (16) приводит к выражению (15).

4. Выбор стохастического исчисления

Чтобы избавиться от неоднозначности и определить величину параметра α, воспользуемся дополнительным условием, которому должно подчиняться решение уравнения (2). Для этой цели используем тот факт, что в прозрачной среде(когда $\tilde{\varepsilon}_I = 0$) должна сохраняться мощность излучения [7], определяемая согласно выражению

$$P(z) = \int\!\!\int d^2\rho\; I(z, \rho)\,,$$

где $I(z, \rho)$ – интенсивность излучения.

Пользуясь определением $P(z)$, уравнением (2) для $U(z, \rho)$ и соотношением (11) для дифференциала произведения двух функций, получим в произвольном исчислении уравнение для $P(z)$

$$\frac{d}{dz}P(z) = -k\left\{\tilde{\varepsilon}_I + \frac{k}{4}(\alpha - 1/2)\,[A_{\varepsilon\varepsilon}(0) + A^*_{\varepsilon\varepsilon}(0)]\right\}P(z) - k\int\int d^2\rho\,\tilde{\varepsilon}_I(z,\rho)\,I(z,\rho)\,,\ P(z)\big|_{z=0} = P_0\,, \quad (19)$$

где $\tilde{\varepsilon}_I$ – среднее значение мнимой части диэлектрической проницаемости среды.

Далее, остановимся на случае, когда волна распространяется в прозрачной среде, $\bar{\varepsilon}_I = 0$. Тогда решение уравнения (19) будет иметь вид

$$P(z) = P_0\exp\left\{-\frac{k^2}{4}(\alpha - 1/2)\,A_{RR}(0)\,z\right\}.$$

Отсюда видно, что для задач распространения волн единственным исчислением, удовлетворяющим сохранению мощности пучка, является исчисление Стратоновича $\alpha = 1/2$. То есть совместное решение уравнений (2) и (19) позволяет избавиться от неоднозначности, связанной с выбором стохастического исчисления.

Поскольку мы приняли предположение о том, что флуктуации действительной и мнимой частей диэлектрической проницаемости среды подчиняются одному исчислению, то обобщение этого результата на случай ослабляющей среды очевидно. Раз параметр α не зависит от составляющих $\tilde{\varepsilon}$, то результат в случае комплексной диэлектрической проницаемости не должен измениться.

В заключение работы кратко рассмотрим случай, когда составляющие $\tilde{\varepsilon}$ подчиняются различным стохастическим исчислениям. Например, в турбулизованном прозрачном газе взвешены хорошо поглощающие частицы (в подобной постановке в [11] решалась задача о распространении лазерного пучка в дожде) и случайные изменения обеих частей $\tilde{\varepsilon}$ некоррелированны. Тогда каждой составляющей будет соответствовать свой параметр $\alpha_q(q = \{P, I\})$, и соотношение (10) преобразуется в следующее:

$$\delta W(z;\rho_1)\,\delta W(z;\rho_2) = (1 - 2\alpha_R)\,A_{RR}(\rho_1 - \rho_2)\delta z - (1 - 2\alpha_I)\,A_{II}(\rho_1 - \rho_2)\,\delta z\,. \quad (20)$$

Между тем для флуктуации $\tilde{\varepsilon}_R$ остается в силе результат, полученный в совместном случае, т.е. $\alpha_R = 1/2$. А с учетом соотношения (20) уравнение (19) для мощности примет вид

$$\frac{d}{dz}P(z) = -k\left\{\bar{\varepsilon}_I - \frac{k}{4}(\alpha_I - 1/2)\,A_{II}(0)\right\}P(z) - k\int\int d^2\rho\,\tilde{\varepsilon}_I(z,\rho)\,I(z,\rho)\,. \quad (21)$$

Теперь воспользуемся независимостью параметра α_i от длины трассы и запишем решение (21) в нулевом приближении по малому параметру a_{ef}/L_0 (где a_{ef}, L_0 – соответственно эффективный радиус пучка и внешний масштаб турбулентности)

$$P(z) = P_0\exp\left\{-k\left[\bar{\varepsilon}_{\rm I} - \frac{k}{2}(\alpha_{\rm I} - \frac{1}{2})A_{\rm II}(0)\right]z - k\int_0^z d\xi\bar{\varepsilon}_I(\xi,0)\right\}.$$

Данный закон изменения мощности соответствует логнормальному распределению вероятности случайных изменений мощности. При этом от вида стохастического исчисления зависит лишь ее среднее значение и, в принципе, любое исчисление не противоречиво. Только возвращаясь к реальным процессам с конечной длиной корреляции и учитывая, что эффекты, обусловленные приближением δ-коррелированности процесса, должны быть пренебрежимо малы, можно остановиться на значении параметра $\alpha_I = 1/2$.

Автор благодарен Р.Х. Алмаеву за внимание к работе и ценные замечания.

1. Г о р д и н е р К . В . Стохастические методы в естественных науках. М.: Мир, 1986. 528 с.
2. К л я ц к и н В . И . , Т а т а р с к и й В . И . //УФН. 1973. Т. ПО. Вып. 2. С. 499–536.
3. Х о р с т х е м к е В . , Л е ф е в р Р . Индуцированные шумом переходы: Теория и применения в физике, химии и биологии. М.: Мир, 1987. 400 с.

4. К л и м о н т о в и ч Ю . Л . Турбулентное движение и структура хаоса: Новый подход к статистической теории открытых систем. М.: Наука, 1990. 320 с.
5. Г у р о в и ч Е . В . //ТМФ. 1990. Т. 83. № 2. С. 268–273.
6. В а т а н а б э С . , И к э д а Н . Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М.: Наука, 1986. 448 с.
7. Р ы т о в С . М . , К р а в ц о в Ю . А . , Т а т а р с к и й В . И . Введение в статистическую радиофизику. Ч. II. Случайные поля. М.: Наука, 1978. 464 с.
8. T a t a r s k i i V . I . , Z a v o r o t n y i V . U . //Progress in Optics. 1980. V. 18. P. 204–256.
9. Ф е й н м а н Р . , Х и б б с А . Квантовая механика и интегралы по траекториям. М.: Мир, 1968. 382 с.
10. D a s h e n K . //J. Math. Phvs. 1979. V. 20. № 5. P. 894–920.
11. М и р о н о в В . Л . , Т у з о в а С . И . //Изв. вузов. Сер. Радиофизика. 1980. Т. 23. № 12. С. 1454–1463.

Институт экспериментальной метеорологии,
Обнинск

Поступила в редакцию
20 сентября 1992 г.

A . A . S u v o r o v . **Grounds for Stratonovich Calculus for Analysis of the Wave Propagation in Media with Delta-Correlated Random Fluctuations of the Dielectric Constant.**

The electromagnetic wave propagation through a medium with delta-correlated refractive-index fluctuations is considered within the frameworks of the paraxial approximation. Equations for the mean field and mutual coherence functions are obtained in an arbitrary stochastic calculus. It is shown that the Stratonovich calculus is the only one that is compatible with the law of conservation of the radiation power.