

# Алгоритм вычисления фазового набега электромагнитных волн в неоднородной рефракционной среде

В.В. Дудоров, В.В. Колосов\*

*Институт оптики атмосферы им. В.Е. Зуева СО РАН  
634021, г. Томск, пл. Академика Зуева, 1*

Поступила в редакцию 9.02.2011 г.

Предлагается алгоритм расчета фазового набега электромагнитных волн от когерентных источников в неоднородной рефракционной среде. Метод основан на построении линий тока энергии, касательные к которым совпадают с направлением вектора Умова–Пойнтинга. Показана возможность использования данного метода для распространения в турбулентной атмосфере.

*Ключевые слова:* набег фазы, лучевые методы, рефракционная среда, атмосферная турбулентность; phase incursion, ray-tracing technique, refractive medium, atmospheric turbulence.

## Введение

Оптическое излучение при распространении в турбулентной атмосфере на протяженных трассах претерпевает существенные фазовые искажения. Информация о величине дисперсии фазового набега оптического излучения для различных атмосферных условий распространения является актуальной при конструировании адаптивных систем, работающих на основе обращения волнового фронта от некоторого опорного источника излучения [1–4].

В работах [1, 2] показано, что осуществление фазовой коррекции в диапазоне, превышающем интервал  $(0, 2\pi)$ , может существенно улучшить динамические характеристики таких систем. Это связано с отсутствием скачка корректирующей фазы при превышении значения  $2\pi$ . Кроме того, в работе радиолокационных систем фазовые искажения радиосигнала приводят к ошибкам измерения координат объектов и снижению качества радиолокационного изображения [5, 6]. В данном случае для построения изображения также необходимы измерения изменений набега фазы за пределами интервала  $(0, 2\pi)$ .

В реальных условиях работы радиосинтезированных антенн искажения траекторного сигнала, обусловленные флуктуациями среды распространения радиоволн, также достаточно существенны. Для исследования распространения когерентного излучения в неоднородных средах обычно используют решение параболического волнового уравнения [7]. Решение данного уравнения численными методами позволяет найти в заданной плоскости распределение интенсивности и фазы поля. Однако в этом случае целое число набегов фазы, кратных

$2\pi$ , отбрасывается и можно определить только значения «приведенной фазы» в интервале от нуля до  $2\pi$ . В связи с этим определить длину фазового пути (фазовый набег) от источника излучения до заданной точки невозможно.

В настоящей статье представлены алгоритм расчета фазового набега радиоволн от произвольных когерентных источников в неоднородной (случайной и регулярной) рефракционной среде, а также апробация данного метода для задачи распространения оптического излучения в турбулентной атмосфере.

## Метод

Для определения фазового пути предполагается использовать лучевой метод решения параболического волнового уравнения [8–10]. Суть метода состоит в вычислении электрической (оптической) длины линии тока энергии, соединяющей точку наблюдения с источником излучения и перпендикулярной в каждой своей точке фазовой поверхности. Таким образом, необходимо выполнить построение траекторий, касательные в каждой точке к которым совпадают с направлением вектора Умова–Пойнтинга.

Данные траектории для трехмерного случая должны удовлетворять следующему уравнению:

$$\frac{d\mathbf{\rho}}{dz} = \mathbf{P}_{\perp}(z, \mathbf{\rho}) / I(z, \mathbf{\rho}) = \frac{1}{k} \nabla_{\perp} \varphi(z, \mathbf{\rho}). \quad (1)$$

При этом поперечная составляющая вектора Умова–Пойнтинга определяется выражением:

$$\mathbf{P}_{\perp}(z, \mathbf{\rho}) = \frac{1}{k} I(z, \mathbf{\rho}) \nabla_{\perp} \varphi(z, \mathbf{\rho}) = \frac{1}{k} \text{Im}[E^*(z, \mathbf{\rho}) \nabla_{\perp} E(z, \mathbf{\rho})], \quad (2)$$

где  $k = 2\pi/\lambda$  – волновое число;  $E(z, \mathbf{\rho})$  – комплексная амплитуда поля в точке  $(z, \mathbf{\rho})$ ;  $z$  – координата

\* Вадим Витальевич Дудоров (dvv@iao.ru); Валерий Викторович Колосов (kvv@iao.ru).

вдоль оси распространения излучения;  $\mathbf{p} = \{x, y\} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y$  – радиус-вектор в плоскости, перпендикулярной оси распространения;  $\nabla_{\perp} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y}$ ;

$I = A^2$  и  $\varphi$  – интенсивность и фаза поля  $E = Ae^{i\varphi}$ .

Определим выражение для фазового набега вдоль лучевых траекторий на основе решения параболического уравнения для комплексной амплитуды поля:

$$2ik \frac{\partial E}{\partial z} + \nabla_{\perp}^2 E(z, \mathbf{p}) + k^2 \varepsilon(z, \mathbf{p}) E(z, \mathbf{p}) = 0, \quad (3)$$

где  $\varepsilon$  – распределение возмущения диэлектрической проницаемости среды распространения. Подставив в данное уравнение выражение комплексной амплитуды поля через вещественные амплитуду и фазу  $E = Ae^{i\varphi}$  и далее разделяя мнимую и вещественные части данного уравнения, можно записать следующую известную систему уравнений [7]:

$$\begin{cases} \frac{\partial A^2}{\partial z} + \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{p}} A^2 \right) = 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{2k} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{p}} \right)^2 = \frac{k}{2} \varepsilon + \frac{1}{2k} A^{-1} \frac{\partial^2 A}{\partial \mathbf{p}^2}. \end{cases} \quad (4)$$

С учетом выражения (1) второе уравнение данной системы может быть записано для полной производной фазы  $\frac{d\varphi}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{dz}{dz} + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{p}} \frac{d\mathbf{p}}{dz}$  в следующем виде:

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{1}{2k} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{p}} \right)^2 + \frac{k}{2} \varepsilon + \frac{1}{2k} A^{-1} \frac{\partial^2 A}{\partial \mathbf{p}^2}. \quad (5)$$

Таким образом, в рамках параксиального приближения для изменения фазы поля, распространяющегося из плоскости  $z = 0$  в плоскость  $z = L$ , с учетом дифракционных эффектов следует выражение [11]:

$$\Delta\varphi = \frac{k}{2} \int_0^L dz \left[ |\boldsymbol{\theta}(z, \mathbf{p})|^2 + \varepsilon(z, \mathbf{p}) + \frac{\nabla_{\perp}^2 A(z, \mathbf{p})}{k^2 A(z, \mathbf{p})} \right], \quad (6)$$

где  $\boldsymbol{\theta}(z, \mathbf{p}) = \frac{1}{k} \nabla_{\perp} \varphi(z, \mathbf{p})$  – вектор, направление которого совпадает с направлением вектора Умова–Пойнтинга, определяет наклон линии тока энергии  $\rho(z)$ .

Третье слагаемое в подынтегральном выражении (6) определяет дополнительный дифракционный набег фазы при распространении поля в неоднородной среде. В рамках приближения геометрической оптики им можно пренебречь, и тогда выражение (6) будет иметь вид

$$\Delta\varphi = \frac{k}{2} \int_0^L dz \left[ |\boldsymbol{\theta}(z, \mathbf{p})|^2 + \varepsilon(z, \mathbf{p}) \right]. \quad (7)$$

Данное выражение соответствует параксиальному приближению известного дифференциального

равенства, связывающего геометрическую фазу с длиной линии тока энергии  $l$  [12]:

$$d\varphi = kn(z, \mathbf{p}) dl, \quad (8)$$

где  $n = 1 + \Delta n$  – показатель преломления среды распространения ( $\varepsilon = 2\Delta n$ ). Выражение (7) получается из (8) при использовании разложения элемента длины линии тока энергии в ряд  $dl \approx dz \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{d\mathbf{p}}{dz} \right)^2 \right]$

и ограничении до слагаемых второго порядка малости.

Решения для линий тока энергии  $\rho(z)$  могут быть получены методом дифракционных лучей, который основывается на решении параболического уравнения методом характеристик [8–10]. Было показано, что дифракционные лучи (линии тока энергии) удовлетворяют следующему характеристическому уравнению [8]:

$$\frac{d^2 \mathbf{p}}{dz^2} = \frac{1}{2} \nabla_{\perp} \varepsilon(z, \mathbf{p}) + \frac{1}{2k^2} \nabla_{\perp} \left[ A^{-1}(z, \mathbf{p}) \Delta_{\perp} A(z, \mathbf{p}) \right]. \quad (9)$$

Таким образом, уравнения (6), (9) с учетом выражения для вектора, определяющего наклон линии тока энергии  $\boldsymbol{\theta}(z, \mathbf{p}) = \frac{d\mathbf{p}(z)}{dz}$ , позволяют вы-

числить фазовый набег поля при его распространении в среде с произвольным распределением диэлектрической проницаемости. Для решения лучевого уравнения (9) необходимо задать начальные условия для  $\rho(0)$  и  $d\rho(0)/dz$  на сетке, плотно перекрывающей область распределения начального поля излучения [1]. Данный метод позволяет определить траектории линий тока энергии от всего источника излучения и установить области локальных фокусировок и дефокусировок излучения при распространении в неоднородной среде.

Однако если нам необходимо знать набег фазы только в одной заданной точке, то нет явной необходимости решать лучевые уравнения (9) для всего множества лучей, заданного начальными условиями и обеспечивающего необходимую точность решения системы лучевых уравнений. В таком случае для определения единственной траектории линии тока энергии мы предлагаем использовать уравнение (1), где функция  $\nabla_{\perp} \varphi(z, \mathbf{p})$  определяется из решения параболического уравнения (3), т.е.

$$\frac{d\mathbf{p}}{dz} = \frac{1}{k} \nabla_{\perp} \varphi(z, \mathbf{p}) = \frac{1}{k} \frac{\text{Im} \left[ E^*(z, \mathbf{p}) \nabla_{\perp} E(z, \mathbf{p}) \right]}{E^*(z, \mathbf{p}) E(z, \mathbf{p})}. \quad (10)$$

Рассмотрим поведение фазы поля, распространяющегося в турбулентной среде. Для решения параболического уравнения (3) воспользуемся методом расщепления по физическим факторам, когда случайное распределение диэлектрической проницаемости турбулентной атмосферы моделируется с помощью фазовых экранов [13, 14]. На рис. 1 изображена схема расчета продольного набега фазы представленным методом.

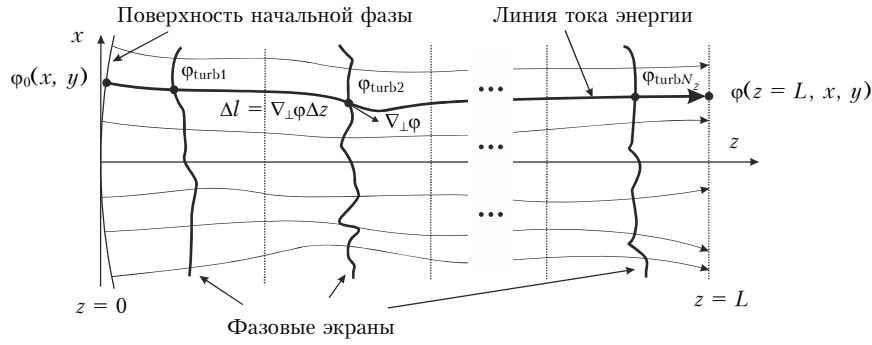


Рис. 1. Схема расчета продольного набега фазы методом дифракционных лучей

Вся дистанция разбивается на  $N_z$  частей, учет турбулентных искажений осуществляется путем постановки фазовых экранов в центр каждого из  $N_z$  слоев. Для решения лучевых уравнений (построения траектории линии тока энергии) дистанция между экранами разбивается на  $N_d$  шагов. Таким образом, общее число шагов по эволюционной переменной  $z$  составляет  $N_{zd} = N_z \cdot N_d$ .

В выражении для вычисления набега фазы вдоль лучевых траекторий (6) первые два слагаемых представляют собой геометрооптический набег вдоль данной траектории. Третье слагаемое учитывает изменения фазы, вызванные дифракцией распространяющегося поля. Таким образом, фаза поля в некоторой точке  $\rho(z=L)$  в нашем случае определяется как

$$\varphi(z=L, \rho) = \varphi_0 + \frac{k}{2} \int_0^L dz \left( \theta^2 + \frac{\nabla_{\perp}^2 A}{k^2 A} \right) + \sum_{k=1}^{N_z} \varphi_k^{\text{turb}}, \quad (11)$$

где  $\varphi_0$  — начальное значение фазы поля, определяемое кривизной начального фазового фронта; второе слагаемое определяется решением лучевых

уравнений;  $\sum_{k=1}^{N_z} \varphi_k^{\text{turb}}$  — суммарный набег фазы поля в турбулентной среде вдоль линии тока энергии, определяемый фазовыми экранами, моделирующими турбулентные неоднородности.

В случае если нам необходимо найти набег фазы в фиксированной точке ( $z=L, \rho$ ) от источника, расположенного в плоскости  $z=0$ , нужно вначале решить параболическое уравнение (3) методом расщепления из плоскости  $z=0$  в плоскость  $z=L$ , затем выполнить обращение волнового фронта и найти решение лучевого уравнения (10) в обратную сторону для луча, исходящего из точки ( $z=L, \rho$ ).

## Апробация метода и результаты

Для определения точности лучевого метода в свободном пространстве было выполнено сравнение решений для продольного набега фазы с аналитическим решением задачи распространения пучка с гауссовым распределением начальной интенсивности

$$I(z=0, \rho) = E(z=0, \rho)E^*(z=0, \rho), \quad (12)$$

где

$$E(z=0, \rho) = \exp\left(-\frac{\rho^2}{d_0^2} - i\frac{k\rho^2}{2F}\right).$$

В работе [7] представлены решения как для самих лучевых траекторий, так и для набега фазы вдоль этих траекторий. На рис. 2, а и б показано решение лучевых уравнений для семейства лучей, соответствующих распространению сфокусированного пучка.

Стоит отметить, что в случае распространения пучка в свободном пространстве ошибка представленного метода в определении как лучевых траекторий, так и продольного набега фазы вдоль них не превышает долей процента для значений  $N_{zd} < 40$ .

На рис. 2, в и г показано решение лучевых уравнений при распространении пучка в турбулентной среде. В качестве параметра, характеризующего силу проявления турбулентных эффектов, было выбрано отношение диаметра приемной апертуры к радиусу Фрида  $D/r_0$  ( $r_0 = (0,423k^2C_n^2L)^{-3/5}$ ),

широко применяемое исследователями распространения волн в турбулентной атмосфере. Фактически данный параметр определяет количество характерных радиусов корреляции электромагнитной волны, прошедшей слой турбулентной среды, на размере приемной апертуры. Для турбулентной среды отсутствуют необходимые аналитические решения, которые можно было бы использовать в качестве тестовых, поэтому для данного случая тестирование лучевого метода было выполнено путем сравнения разности фаз в двух точках, полученной с использованием лучевой техники, с численным решением параболического уравнения на основе стандартного спектрального подхода. Зная решение параболического уравнения в виде распределения комплексной амплитуды поля  $E(z, \rho)$ , можно записать выражение для разности фаз в двух точках ( $z, \rho_1$ ) и ( $z, \rho_2$ ) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \varphi(z, \rho_1) - \varphi(z, \rho_2) &= \\ &= \arctan\left\{\frac{\text{Re}[E(z, \rho_1)]}{\text{Im}[E(z, \rho_1)]}\right\} - \arctan\left\{\frac{\text{Re}[E(z, \rho_2)]}{\text{Im}[E(z, \rho_2)]}\right\}. \quad (13) \end{aligned}$$

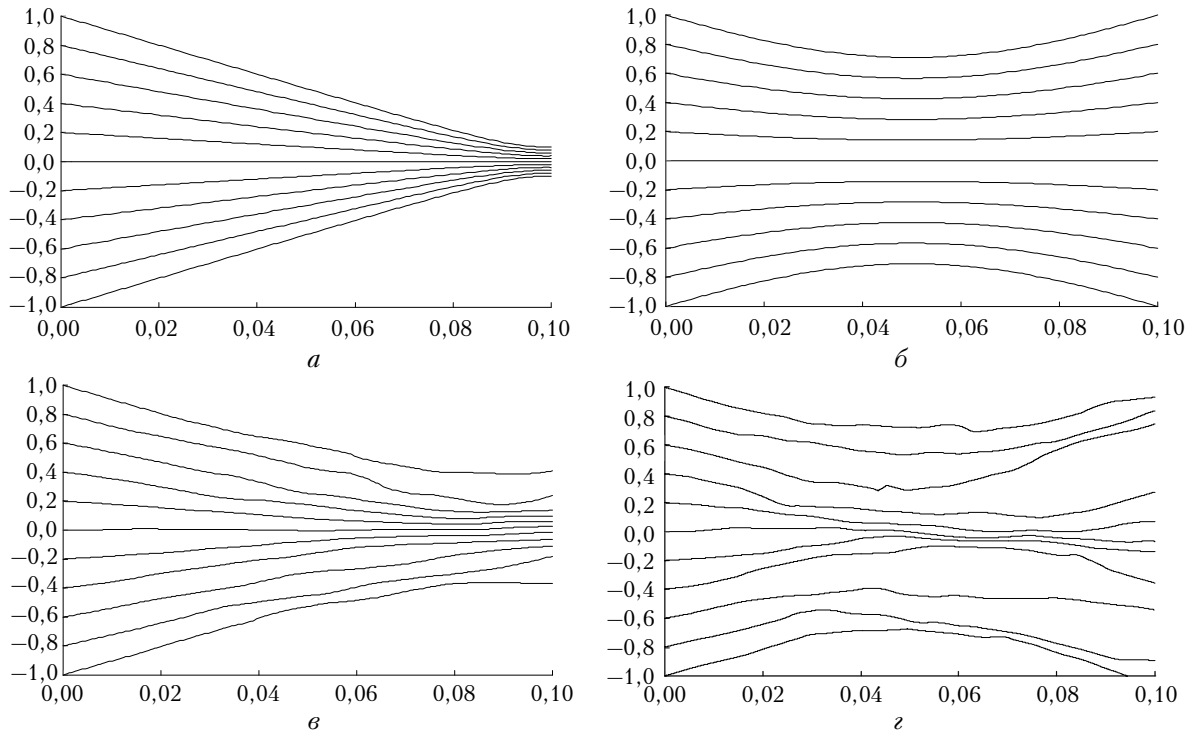


Рис. 2. Решение лучевых уравнений (9) при распространении сфокусированного пучка в свободном пространстве (а), (б) и турбулентной среде  $D/r_0 = 4$  (в),  $D/r_0 = 16$  (г). Дистанция распространения  $L = 0,1l_d$  (а), (в), (г),  $L = 1,0l_d$  (б),  $l_d = kd_0^2/2$

Вычисленная таким образом разность фаз может отличаться на  $2\pi n$  от истинного из-за периодичности функции  $\arctan$ .

Результаты моделирования показывают, что для значений параметра  $D/r_0 = 8$  при  $N_{zd} = 1000$  ошибка в определении разности фаз составляет менее  $0,05 \cdot 2\pi$ . При этом среднеквадратическое отклонение продольного набега фазы в проведенных численных экспериментах составляло несколько  $2\pi$ .

Очевидно, что на дистанциях, когда фазовые флуктуации поля трансформируются в амплитудные, дифракционные эффекты вносят существенный вклад в изменение фазового фронта волны и соответственно продольного набега фазы. Для оценки данного вклада было выполнено сравнение стандартных отклонений флуктуаций набега фазы, вычисленных в приближении геометрической оптики и представленным в настоящей статье методом, учитывающим рефракционные и дифракционные искривления лучевых траекторий. Для численного моделирования турбулентных искажений использовался метод генерации бесконечных фазовых экранов, позволяющий задавать спектр флуктуаций показателя преломления с внешним масштабом турбулентности  $L_0$ , существенно превышающим размер расчетной сетки [15].

На рис. 3 показана зависимость стандартного отклонения флуктуаций фазы от параметра  $L_0/r_0$ , характеризующего степень проявления турбулентных эффектов.

Видно, что значение стандартного отклонения флуктуаций фазы, рассчитанного в приближении геометрической оптики (штриховая линия), хорошо

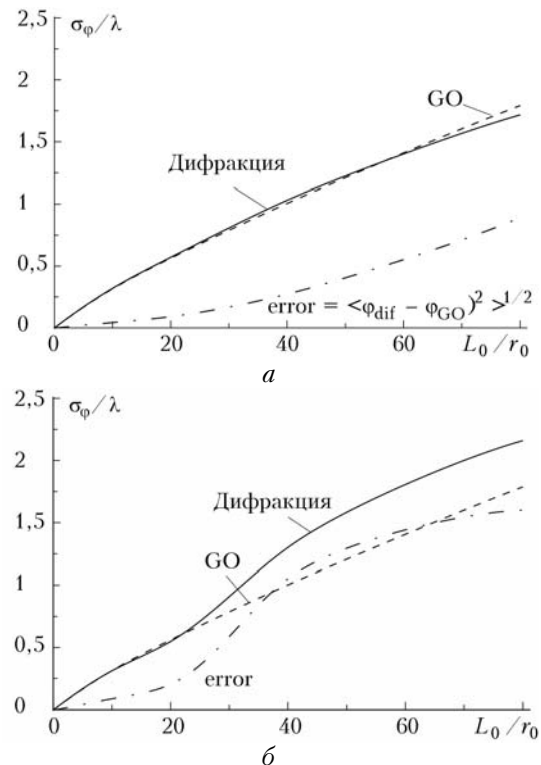


Рис. 3. Зависимость стандартного отклонения флуктуаций фазы от параметра  $L_0/r_0$ . Усреднение выполнено по 20 реализациям турбулентных неоднородностей для дистанции  $L = 0,1l_d$ . В численных расчетах в качестве нормировочного параметра использовался радиус приемной апертуры  $a$ ,  $L_0 = 5a$ , интенсивность источника излучения задавалась в виде  $I(r) = \exp(-r^2/a_n^2)$ ,  $a_n = 0,1a$  (а);  $I(r) = \exp\{-(r/a_w)^{16}\}$ ,  $a_w = 5a$  (б)

согласуется со значением стандартного отклонения, рассчитанного с учетом дифракции (сплошная линия). Однако для любой фиксированной реализации турбулентных неоднородностей (при использовании одних и тех же фазовых экранов) наблюдается существенное отличие в значениях продольного набега фазы, рассчитанных в приближении геометрической оптики и с учетом дифракции.

Для оценки погрешности приближения геометрической оптики мы использовали среднеквадратическое отклонение  $\left(\text{err}_{\text{G.O.}} = \sqrt{\langle(\varphi_{\text{G.O.}} - \varphi_{\text{dif}})^2\rangle}\right)$  продольного набега фазы  $\varphi_{\text{G.O.}}$ , полученного в данном приближении, от  $\varphi_{\text{dif}}$ , полученного с учетом дифракции (на рис. 3 отмечено штрихпунктирной линией). Основная ошибка расчета набега фазы методом геометрической оптики связана с тем, что в данном случае набег фазы рассчитывается вдоль осевой линии, а в методе дифракционных лучей — вдоль лучевых траекторий, претерпевающих существенные искажения по мере распространения излучения (см. рис. 2). При этом для узкого источника излучения (рис. 3, а) ошибка при расчете продольного набега фазы в приближении геометрической оптики меньше, чем при использовании широкого источника (рис. 3, б). Это объясняется тем, что для узкого источника излучения, расположенного на оси оптической системы, лучевая траектория, исходящая из осевой точки в плоскости приемника, проходя через турбулентные неоднородности, возвращается в приосевую область. При использовании широкого опорного источника лучевая траектория, вдоль которой интегрируется фаза, зачастую заканчивается на периферии источника излучения вдали от оси. Очевидно, что расчет геометрооптического набега фазы, рассчитанного вдоль оси, ближе к набегу фазы, рассчитанному вдоль траектории, начинающейся и заканчивающейся на оси распространения излучения.

Таким образом, можно заключить, что для оценки дисперсии флуктуаций набега фазы можно использовать приближение геометрической оптики. Однако если нужно выполнить численное моделирование динамики изменения продольного набега фазы при поперечном сдвиге турбулентных неоднородностей, то необходимо учитывать дифракционный набег фазы, поскольку погрешность приближения геометрической оптики в данном случае существенна.

Авторы выражают благодарность М.А. Воронцову за полезное обсуждение результатов.

1. Vorontsov M.A., Lachinova S.L. Laser beam projection with adaptive array of fiber collimators. I. Basic consi-

derations for analysis // J. Opt. Soc. Amer. A. 2008. V. 25, N 8. P. 1949–1959.

2. Lachinova S.L., Vorontsov M.A. Laser beam projection with adaptive array of fiber collimators. II. Analysis of atmospheric compensation efficiency // J. Opt. Soc. Amer. A. 2008. V. 25, N 8. P. 1960–1973.
3. Лукин В.П. Динамические характеристики адаптивных оптических систем // Оптика атмосф. и океана. 2010. Т. 23, № 11. С. 1027–1035.
4. Копылов Е.А., Лукин В.П. Статистические характеристики биморфного зеркала DM2-100-31 и возможность его применения в адаптивной оптической схеме Большого солнечного вакуумного телескопа // Оптика атмосф. и океана. 2010. Т. 23, № 12. С. 1111–1113.
5. Загорин Г.К., Зражевский А.Ю., Коньков Е.В., Соколов А.В., Титов С.В., Хохлов Г.И., Черная Л.Ф. Факторы, влияющие на распространение мм-волн в приземном слое атмосферы // Ж. радиоэлектрон. 2001. № 8.
6. Андреев Г.А., Черная Л.Ф. Флуктуации пучка миллиметровых волн в турбулентной поглощающей тропосфере Земли // Радиотехника. 1978. Т. 33, № 1. С. 16–29.
7. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. М.: Наука, 1979. 363 с.
8. Беспалов В.И., Литвак А.Г., Таланов В.И. Самовоздействие электромагнитных волн в кубичных средах. Нелинейная оптика. Новосибирск: Наука, 1968. 428 с.
9. Колосов В.В. Лучевой метод решения уравнения для функции когерентности // Оптика атмосф. и океана. 1992. Т. 5, № 4. С. 397–403.
10. Дудоров В.В., Колосов В.В. Исследование распространения оптического излучения в сильно поглощающих неоднородных средах методом дифракционных лучей // Оптика атмосф. и океана. 1997. Т. 10, № 12. С. 1561–1567.
11. Колосов В.В. Исследование распространения частично когерентного лазерного излучения в неоднородных средах лучевыми методами: Автореф. дис. ... докт. физ.-мат. наук. Томск: Ин-т оптики атмосферы, 1998. 31 с.
12. Журавлева В.А., Кобозев И.К., Кравцов Ю.А. Поток энергии в окрестности дислокаций фазового поля волнового фронта // Ж. эксперим. и теор. физ. 1993. Т. 104, вып. 5. С. 3769–3783
13. Fleck J.A., Morris J.R., Feit M.D. Time-dependent propagation of high energy laser beams through the atmosphere // Appl. Phys. 1976. Т. 10, N 2. С. 129–160.
14. Коняев П.А. Модификация метода расщепления для численного решения квазиоптических задач: Тезисы докл. // VI Всесоюз. симпоз. по распространению лазерного излучения в атмосфере. Ч. III. Томск, 1981. С. 195–198.
15. Воронцов А.М., Парамонов П.В. Генерация бесконечных фазовых экранов для моделирования распространения оптического излучения через турбулентность // Изв. вузов. Радиофиз. 2006. Т. 49, № 1. С. 21–34.

#### V.V. Dudorov, V.V. Kolosov. Algorithm for calculation of phase incursion of electromagnetic waves in the inhomogeneous refractive medium.

The new algorithm for calculation of phase incursion of coherent electromagnetic waves propagating through inhomogeneous refractive medium is considered. The method is based on construction of energy-flux trajectories, which tangent coincides with Umov–Poynting vector. Availability of this method is shown for the case of propagation through turbulent atmosphere.