

С.С. Суворов, Б.Д. Панин

Использование методов теории чувствительности для исследования тенденций изменения климата

Военный инженерно-космический университет им. А.Ф. Можайского, г. Санкт-Петербург

Поступила в редакцию 23.02.2001 г.

Рассмотрены современные подходы к моделированию климата и тенденций его изменения, проанализированы их достоинства и недостатки и указаны основные трудности, возникающие при решении задач моделирования. Предложен подход к оцениванию тенденций изменения климата, основанный на использовании идей и методов теории чувствительности распределенных систем. Развита теория чувствительности, построены модели чувствительности климатических моделей к вариациям их параметров. Получены выражения для чувствительности функционалов, зависящей от решений уравнений гидродинамических моделей.

Введение

Вопросы исследования тенденций изменения климата Земли в целом, так и отдельных ее регионов привлекают в настоящее время все более пристальное внимание ученых. Это обусловлено, с одной стороны, увеличившимися техногенными нагрузками на окружающую среду и, как следствие, значительными отклонениями в климатических системах, последствия которых для социально-экономического развития отдельных стран и человечества в целом, по крайней мере, не очевидны и поэтому требуют детального исследования. К числу таких эффектов можно отнести глобальное потепление нижней атмосферы вследствие увеличения выбросов углекислого газа в атмосферу, увеличение потока ультрафиолетовой радиации, приходящей к поверхности Земли, вследствие эффекта, получившего название озоновой дыры, и др.

С другой стороны, пристальное внимание к изучению эволюции климатических систем обусловлено необходимостью перспективного планирования социально-экономического развития регионов и решением вопросов геополитики.

Подходы к моделированию климата

В моделировании климата и тенденций его изменения, как и в моделировании других атмосферных процессов, можно выделить три подхода: физико-статистический, гидродинамический и динамико-стохастический.

Первый подход, получивший свое наибольшее развитие в трудах Е.П. Борисенкова и М.И. Будыко, основан на экстраполяции по времени информации о состоянии той или иной климатической системы. Однако условия эволюции климата в прошлом и будущем нельзя считать одинаковыми, так как, например, влияние человеческой деятельности на глобальные

атмосферные процессы вплоть до конца XIX в. было пренебрежимо мало, а в настоящее время оно является одним из главных факторов, под воздействием которого эволюционирует климат. В связи с этим прогностические оценки, полученные в русле такого подхода, обладают низкой достоверностью.

Попытка учета изменения факторов, под воздействием которых формируется и эволюционирует климат Земли, приводит к необходимости использования при моделировании фундаментальных физических законов, выражаемых системой уравнений гидротермодинамики атмосферы, записанной с учетом тех или иных предположений. В зависимости от того, какие приняты предположения о характере параметров моделей (являются ли они случайными объектами или нет), результаты моделирования также будут случайными или неслучайными объектами (величинами, векторами, полями). В первом случае имеем дело с динамико-стохастическим моделированием, а во втором – с гидродинамическим.

Очевидно, что два последних подхода являются наиболее конструктивными, так как их использование позволяет рассмотреть различные сценарии изменения влияющих факторов. Однако их реализация наталкивается на целый ряд трудностей.

Введем следующие обозначения, традиционно используемые при построении климатических моделей: $\Phi_{\langle m \rangle}$ – вектор состояния, компонентами которого являются поля параметров состояния

$$\Phi_{\langle m \rangle} = \Phi_{\langle m \rangle}(X_{\langle 3 \rangle}, t; \Psi_{\langle n \rangle}),$$

где $X_{\langle 3 \rangle}$ – вектор пространственных координат; t – время; $\Psi_{\langle n \rangle}$ – вектор параметров модели, компонентами которого, в общем случае, являются поля, определяемые исходя из физической постановки задачи и ее конкретной математической формализации:

$$\Psi_{\langle n \rangle} = \Psi_{\langle n \rangle}(X_{\langle 3 \rangle}, t).$$

Тогда общая формулировка модели будет выглядеть следующим образом (индексы для упрощения записи опущены):

$$B \frac{\partial \Phi}{\partial t} + G(\Phi, \Psi) = 0; \quad (1)$$

$$\Phi \in Q(D_t), \quad \Psi \in R(D_t),$$

где $B = B_{[m,m]}$ – диагональная матрица размерности $m \times m$; $G(\Phi, \Psi) = G_{<m>}(\Phi, \Psi)$ – нелинейный матричный дифференциальный оператор; D_t – область изменения пространственных координат и времени; $Q(D_t)$ – пространство функций, удовлетворяющих краевым условиям, входящим в формулировку задачи, которому принадлежит решение; $R(D_t)$ – область допустимых значений параметров.

Оператор G , фигурирующий в (1), должен являться нелинейным дифференциальным оператором, так как в настоящее время стало очевидным, что линейные (линеаризованные) модели не могут претендовать на реалистичность описания климатических систем.

Так как под климатическими значениями подразумевают некоторые установившиеся значения либо собственно решений (1), либо некоторых функционалов от них, то реализация климатической модели при гидродинамическом подходе состоит в решении задачи (1) на установление с использованием средних значений параметров модели (их математических ожиданий). Не говоря уже о большой ресурсоемкости такого процесса, следует отметить, что ввиду нелинейности оператора G решение задачи (1) будет смещено относительно математического ожидания $\bar{\Phi}_{<m>}$ (или функционала от него), которое и представляет собой оценку будущего состояния климата. Этим и объясняется низкая адекватность гидродинамических климатических моделей.

При динамико-стохастическом подходе предполагается, что параметры модели (1) являются случайными объектами (величинами, векторами, полями) с известным распределением, а искомая величина суть распределение $\hat{\Phi}_{<m>}$ (« $\hat{}$ » – символ случайной величины) или некоторые числовые характеристики этого распределения. Такой подход позволяет получать более реалистичные оценки климатических характеристик, однако в настоящее время его реализация наталкивается на ряд трудностей как прикладного, так и теоретического характера.

В качестве выхода из создавшегося положения может быть использован подход, основанный на имитационном моделировании эволюции климата. В этом случае на основе информации о распределении параметров модели (1) с помощью датчика случайных объектов моделируются реализации $\hat{\Psi}_{<m>}$, затем производится многократное решение задачи (1) с использованием этих реализаций, после чего оцениваются числовые характеристики распределения $\hat{\Phi}_{<m>}$. Однако для проведения исследований такого рода, учитывая размерность вектора параметров модели, необ-

ходимо затратить столько вычислительных ресурсов, что это делает такой подход нереалистичным.

Наша задача состояла в разработке математического аппарата, использование которого позволяет преодолеть отмеченные трудности. Этот аппарат основан на идеях и методах теории чувствительности распределенных систем и имитационного моделирования.

Методы исследования чувствительности климатических моделей

В дальнейшем будем говорить о чувствительности климатических моделей, так как из контекста будет видно, что под этим подразумевается: чувствительность решений системы уравнений модели либо чувствительность функционалов от этих решений. Кроме того, будем вести речь о чувствительности дискретных моделей, т. е. дискретизированных тем или иным способом непрерывных моделей.

Методы исследования чувствительности математических моделей получили широкое развитие в теории оптимального управления и идентификации систем [1–4]. В метеорологии методы исследования чувствительности широко использовались при решении задач, идейно восходящих к обратным задачам математической физики и теории идентификации распределенных систем, а также задач, связанных с оценкой начальных полей и параметров моделей по экспериментальной информации [5–10 и др.].

Дискретный аналог (1), полученный с использованием некоторого способа дискретизации, обширный обзор которых приведен в [11, 12], выглядит следующим образом:

$$B \Lambda_t \Phi_h + G^h(\Phi_h, \Psi_h) = 0; \quad (2)$$

$$\Phi_h \in Q^h(D_t^h), \quad \Psi_h \in R^h(D_t^h),$$

где $\Lambda_t \Phi_h$ и $G^h(\Phi_h, \Psi_h)$ – дискретные аналоги $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ и $G(\Phi, \Psi)$; D_t^h – сеточная область, соответствующая D_t ; $Q^h(D_t^h)$ – пространство сеточных функций, удовлетворяющих дискретным аналогам краевых условий; $R^h(D_t^h)$ – область допустимых значений сеточных функций, являющихся параметрами модели (2).

Дискретная модель вида (2) может быть получена, например, с использованием вариационной формулировки задачи в виде некоторого интегрального тождества, вытекающего из определения обобщенного решения задачи (1) [12]:

$$I(\Phi, \Psi, \Phi^*) = 0, \quad \Phi \in Q(D_t), \quad (3)$$

$$\Phi^* \in Q^*(D_t), \quad \Psi \in R(D_t),$$

где $\Phi^* = \Phi_{<m>}^*$ – некоторая произвольная достаточно гладкая вектор-функция, а функционал $I(\Phi, \Psi, \Phi^*)$ выбирается таким образом, чтобы на классах достаточно гладких функций описания модели в виде (1) и

(3) были эквивалентны. Процесс построения дискретных аналогов моделей сводится в этом случае к дискретизации (3) в соответствующих функциональных пространствах, т.е. к получению выражений вида

$$\begin{aligned} I^h(\Phi_h, \Psi_h, \Phi_h^*) &= 0, \Phi_h \in Q^h(D_t^h), \\ \Phi_h^* &\in Q^{*h}(D_t^h), \Psi_h \in R^h(D_t^h), \end{aligned} \quad (4)$$

и к записи условий стационарности дискретного аналога $I^h(\Phi_h, \Psi_h, \Phi_h^*)$ сумматорного функционала $I(\Phi, \Psi, \Phi^*)$.

Размерность сеточных функций $\Phi_h \in Q^h(D_t^h)$ и $\Psi_h \in R^h(D_t^h)$ выражается через размерность сеточной области $D_t^h \subset D_t$ и число различных по физическому смыслу полей, являющихся компонентами векторов $\Phi_{\langle m \rangle}$ и $\Psi_{\langle n \rangle}$ соответственно. Учитывая структуру дискретного представления (2) или (4), перенумеруем подряд все компоненты векторов Ψ_h и Φ_h :

$$\begin{aligned} \Psi_h &= \{\psi_{hi}\}, i = 1(1)N; \\ \Phi_h &= \{\phi_{hi}\}, i = 1(1)M, \end{aligned} \quad (5)$$

где N и M – общее число компонент соответствующих векторов. В дальнейшем для упрощения записи подстрочный индекс « h » будем опускать.

Полагая, что задача (1) поставлена корректно, можно предположить [11–14], что класс вектор-функций $\Phi = \Phi(X, t, \Psi)$ ($(X, t) \in D_t^h$, $\Psi \in R^h(D_t^h)$) непрерывно зависит от Ψ , т.е. малым возмущениям $\delta\Psi$ вектора Ψ соответствуют малые возмущения $\delta\Phi$ вектора Φ . Под вектором $\delta\Psi$ понимается вектор

$$\delta\Psi = \{\delta\psi_i\}, i = 1(1)N, \Psi + \delta\Psi \in R^h(D_t^h)$$

при условии $2 \delta\Psi 2 \ll 2 \Psi 2$, где $2 \bullet 2$ – символ нормы, а под вектором $\delta\Phi$ – вектор

$$\delta\Phi = \Phi(X, t, \Psi + \delta\Psi) - \Phi(X, t, \Psi).$$

Тогда математически задача определения функций чувствительности [1] сводится к вычислению частных производных от искомого решения или от функционалов, определенных на множестве решений, по параметрам Ψ модели в окрестности некоторых невозмущенных значений Ψ_0 . Учитывая особенности динамических процессов, протекающих в атмосфере [15], и учитывая специфику решаемой проблемы, ограничимся оценением функций чувствительности первого порядка.

Оценивание функций чувствительности решений (1) может быть осуществлено одним из трех методов:

- методом прямого моделирования;
- с использованием уравнений в вариациях;
- с использованием непосредственного дифференцирования (1).

В рассматриваемом нами случае задача оценивания функций чувствительности представляет собой задачу оценивания (с учетом нумерации (5)) элементов матрицы

$$H_{[M,N]} = \{h_{ij}\} = \left. \frac{\partial \Phi_{\langle M \rangle}}{\partial \Psi_{\langle N \rangle}} \right|_{\Psi_{\langle N \rangle} = \Psi_0} = \left\{ \frac{\partial \phi_i}{\partial \psi_j} \right\}, \quad (6)$$

$$i = 1(1)M, j = 1(1)N.$$

Основной идеей, положенной в основу метода прямого моделирования, является замена частных производных в (6) отношением конечных разностей. Вначале находим из (2) значение $\Phi(\Psi_0)$, затем, придав небольшое приращение $\delta\psi_j$ j -й компоненте вектора Ψ_0 , получаем, опять же решив (2), значение $\Phi(\Psi)$, где все компоненты вектора Ψ равны компонентам вектора Ψ_0 , за исключением j -й, которая равна $\psi_{j0} + \delta\psi_j$. Тогда j -й столбец матрицы H будет примерно равен вектору-столбцу

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\phi_1(\Psi) - \phi_1(\Psi_0)}{\delta\psi_j} \\ \frac{\phi_2(\Psi) - \phi_2(\Psi_0)}{\delta\psi_j} \\ \vdots \\ \frac{\phi_M(\Psi) - \phi_M(\Psi_0)}{\delta\psi_j} \end{array} \right\}.$$

Аналогичным образом находятся все столбцы матрицы $\bar{H}_{[M,N]}$, представляющей собой оценку матрицы чувствительности $H_{[M,N]}$.

Несмотря на универсальность, метод прямого моделирования обладает рядом недостатков, значительно ограничивающих область его применения. При задании малых вариаций $\delta\psi_j$, $j = 1(1)N$, следует ожидать малых вариаций $\delta\Phi = \Phi(\Psi_0) - \Phi(\Psi_0)$, которые могут быть сравнимы с ошибками численного интегрирования уравнений модели. Это обуславливает низкую точность аппроксимации $H_{[M,N]}$ матрицей $\bar{H}_{[M,N]}$. При задании больших вариаций $\delta\psi_j$, $j = 1(1)N$, оценка $\bar{H}_{[M,N]}$ в случае нелинейной зависимости Φ от Ψ будет загроблена. Кроме того, реализация этого метода требует производства значительного числа вычислений, что зачастую нереализуемо.

С учетом сказанного метод прямого моделирования может быть рекомендован при оценивании чувствительности решений (2), зависящих линейно от небольшого числа параметров.

Метод, основанный на решении уравнений в вариациях, предложенный в [12], свободен от первых двух недостатков, указанных выше. В работе [12] уравнение, связывающее вариации $\delta\Phi$ с вариациями $\delta\Psi$, получено из условия стационарности сумматорного функционала (4), относительно вариаций $\delta\Phi$ и $\delta\Psi$, т.е. из условия

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \xi} I^h(\Phi_0 + \xi \delta\Phi, \Psi_0 + \xi \delta\Psi, \Phi^*) = 0. \quad (7)$$

Потребовав также стационарности левой части (7) относительно вариаций Φ^* , получим

$$B\Lambda_t \delta\Phi + A^h(\Phi_0, \Psi_0) \delta\Phi + C^h(\Phi_0, \Psi_0) \delta\Psi = 0, \quad (8)$$

где матрица A^h размерности $M \times M$ и матрица C^h размерности $M \times N$ определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} & A_{[M,M]}^h(\Phi_{<M>0}, \Psi_{<N>0}) = \\ & = \frac{\partial}{\partial \Phi'_{<M>}} \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \xi} G_{<M>}(\Phi_{<M>0} + \xi \Phi'_{<M>}, \Psi_{<N>0}); \\ & C_{[M,M]}^h(\Phi_{<M>0}, \Psi_{<N>0}) = \\ & = \frac{\partial}{\partial \Psi'_{<M>}} \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \xi} G_{<M>}(\Phi_{<M>0}, \Psi_{<N>0} + \xi \Psi'_{<N>}). \end{aligned}$$

Здесь $\Phi'_{<M>}$, $\Psi'_{<N>}$ – произвольные векторы, с компонентами ϕ'_i , $i = 1(1)M$, и ψ'_j , $j = 1(1)N$, соответственно такие, что $\Phi_{<M>0} + \xi \Phi'_{<M>} \in Q^h(D_t^h)$, $\Psi_{<N>0} + \xi \Psi'_{<N>} \in R^h(D_t^h)$ при малых ξ .

Уравнение (8) является линейным относительно $\delta\Phi_{<M>}$ и $\delta\Psi_{<N>}$. Учитывая определение (6) функций чувствительности и то, что $\delta\Phi_{<M>} = \Phi_{<M>}(\Psi_{<N>0} + \delta\Psi_{<N>}) - \Phi_{<M>}(\Psi_{<N>0})$, получаем

$$H_{[M,N]} = \left. \frac{\partial \Phi_{<M>}}{\partial \Psi_{<N>}} \right|_{\Psi_{<N>0}} = \left. \frac{\delta \Phi_{<M>}}{\delta \Psi_{<N>}} \right|_{\delta \Psi_{<N>0}}.$$

Продифференцировав (8) по $\delta\Psi_{<N>}$, имеем

$$B\Lambda_t H + A^h(\Phi_0, \Psi_0) H = -C^h(\Phi_0, \Psi_0) E, \quad (9)$$

где E – единичная матрица размерности $N \times N$ (индексы в (9) для упрощения записи опущены).

Система уравнений (2), (9) образует систему уравнений чувствительности дискретной модели, соответствующей непрерывной модели (1).

Как отмечалось, предложенный метод, основанный на использовании уравнений в вариациях, свободен от недостатков, присущих методу прямого моделирования, за исключением громоздкости схемы реализации. Действительно, количество расчетов функции $\Phi(\Psi + \delta\Psi)$, производимых при использовании метода прямого моделирования, равно количеству уравнений относительно функций $\Phi_0(\Psi_0)$ и $\delta\Phi(\Psi)/\delta\Psi_j$, $j = 1(1)N$, в системе (2), (9).

Этот недостаток может быть устранен с учетом следующих обстоятельств. Обычно исследование чувствительности моделей является подготовительным этапом для идентификации параметров этих моделей. В результате решения задачи идентификации получаем вектор $\Psi_{<N>}^{\text{опт}}$ наилучших (в некотором смысле) значений параметров. Так как размерность этого вектора обычно достаточно велика, то для удобства его хранения и дальнейшего использования прибегают к аппроксимации $\Psi_{<N>}^{\text{опт}}$ (представляющего собой сеточную функцию) некоторой малопараметрической пространственно-временной зависимостью, т.е. находят такую функцию

$$\tilde{\Psi}_{<N>}^{\text{опт}} = \tilde{\Psi}_{<n>}(X_{<3>}, t; \Pi_{<k>}^{\text{опт}}), \quad (10)$$

проекция которой в пространство сеточных функций, которому принадлежит $\Psi_{<N>}$, в фиксированном зара-

нее смысле близка к сеточной функции $\Psi_{<N>}^{\text{опт}}$, и удовлетворяет условию

$$k \ll N.$$

Кроме того, некоторые параметры, входящие в уравнение (1) (например, параметры диссипации, притоки тепла и т.д.), зачастую задаются в аналитическом виде

$$\Psi'_{<n'>} = \Psi'_{<n'>}(X_{<3>}, t; \Pi'_{<k'>}), \quad (11)$$

причем

$$\Psi_{<n>} = \langle \Psi'_{<n'>}, \Psi''_{<n''>} \rangle, \quad (12)$$

где $n' + n'' = n$ и $\Psi''_{<n''>}$ – вектор параметров, не заданных в виде (11). Отметим, что в (10) и в (11) компонентами векторов $\Pi_{<k>}^{\text{опт}}$ и $\Pi'_{<k'>}$ являются скаляры.

При решении задач идентификации с последующим нахождением зависимости вида (10) эта задача может быть переформулирована в задачу идентификации непосредственно параметров $\Pi_{<k>}$, входящих в непрерывную модель атмосферы:

$$B \frac{\partial \Phi(X, t, \Pi)}{\partial t} + G(X, t, \Pi, \Phi) = 0; \quad (13)$$

$$\Phi \in Q(D_i), \quad \Pi \in R(D_i).$$

Постановки такого рода задач идентификации и их решения представлены в работах [10, 16]. Задача исследования чувствительности в такой постановке изложена в [9].

Аналогичную форму примет уравнение (1) и в случае (12):

$$B \frac{\partial \Phi(X, t, \Pi', \Psi'')}{\partial t} + G(X, t, \Pi', \Phi, \Psi'') = 0; \quad (14)$$

$$\Phi \in Q(D_i), \quad \Pi' \in R'(D_i), \quad \Psi'' \in R''(D_i).$$

Далее будем рассматривать задачу (14), так как она является более общей. Задача оценивания чувствительности в этом случае сводится к оцениванию чувствительности Φ к параметрам Ψ'' и Π' . Исследование чувствительности решения (2) к Ψ'' проводится методами, изложенными выше.

Если задача (14) поставлена корректно и выполнены условия непрерывной дифференцируемости оператора $G(X, t, \Pi', \Phi, \Psi'')$ по Π' в области $R'(D_i)$, то согласно [5] решение уравнения

$$B \frac{\partial}{\partial t} H'_i + \frac{\partial}{\partial \pi'_i} G(X, t, \Pi', \Phi, \Psi'') \Big|_{\substack{\Pi' = \Pi'_0 \\ \Psi'' = \Psi''_0}} = 0 \quad (15)$$

существует и является функцией чувствительности решения уравнения (14) к π'_i при $\Pi' = \Pi'_0$, $\Psi'' = \Psi''_0$, т.е.

$$H'_i = H'_{<M>i} = \left. \frac{\partial \Phi_{<M>}}{\partial \pi'_i} \right|_{\substack{\Pi' = \Pi'_0 \\ \Psi'' = \Psi''_0}}$$

Проведя дифференцирование второго слагаемого правой части с учетом условия $\Pi' = \Pi'_0$, $\Psi'' = \Psi''_0$, получим

$$B \frac{\partial}{\partial t} H'_i + G'(X, t, \Pi'_0, \Phi_0, \Psi''_0, H'_i) = 0, \quad i = 1(1)k', \quad (16)$$

где $\Phi_0 = \Phi(X, t, \Pi'_0, \Psi''_0)$, а $G' = G'_{<m>}$ – векторный дифференциальный оператор, получаемый в результате дифференцирования оператора G по π'_i .

Система уравнений (14), (16) является системой уравнений модели чувствительности модели (1) к компонентам вектора Π' . Функцией чувствительности дискретной модели (2) к компонентам вектора Π' при $\Pi' = \Pi'_0$, $\Psi'' = \Psi''_0$ будет являться матрица H' размерности $M \times k'$:

$$H'_{[M, k']} = \{h'_{ij}\}, \quad i = 1(1)M, \quad j = 1(1)k', \quad (17)$$

компонентами которой являются значения i -го элемента решения j -го уравнения системы (16).

Обозначим через $H''_{[M, N'']}$ матрицу чувствительности дискретной модели (2) к вариациям параметров $\Psi''_{<n''>}$ ($N'' = n'' L$, где L – число узлов сеточной области). Общее количество уравнений вида (9), (16), которое необходимо решить для получения оценки чувствительности модели (2), в случае, когда параметры заданы в виде (11), (12), составляет $k' + N''$. Учитывая то, что $k' \ll N' = n' L$ и $N = N' + N''$, можно заключить, что оценивание чувствительности модели (2) гораздо экономичнее проводить, если ее параметры Ψ заданы аналитически как функции пространственных координат, времени и некоторых числовых параметров.

Если оценены матрицы $H_{[M, N]}$ ($H'_{[M, k']}$ и $H''_{[M, N'']}$), то вариация $\delta\Phi_{<M>}$ решения (2), соответствующая вариации $\delta\Psi_{<N>}$ ($\delta\Pi'_{<k'>}$ и $\delta\Psi''_{<N''>}$), вычисляется следующим образом:

$$\delta\Phi_{<M>} = H_{[M, N]} \delta\Psi_{<N>} \quad (18)$$

или

$$\delta\Phi_{<M>} = H'_{[M, k']} \delta\Pi'_{<k'>} + H''_{[M, N'']} \delta\Psi''_{<N''>}. \quad (19)$$

Перейдем теперь к решению задачи оценивания чувствительности функционалов от решений (2). Пусть $I(\Phi)$ – функционал от Φ , который для определенности будем считать явно зависящим от компонент Φ . В силу зависимости Φ от Ψ этот функционал будет всегда неявно зависеть от компонент вектора Ψ . Будем искать выражения для вариации δI функционала I через вариации $\delta\Phi$ и $\delta\Psi$.

В предположении ограниченности и непрерывной зависимости функционала I от Φ (а именно такой случай и представляет интерес при решении широкого класса прикладных задач) можно в общем случае определить векторы

$$\text{grad}_{\Phi} I(\Phi) = \left\{ \frac{\partial I(\Phi)}{\partial \phi_i} \right\}, \quad i = 1(1)M, \quad (20)$$

$$\text{grad}_{\Psi} I(\Phi(\Psi)) = \left\{ \frac{\partial I(\Phi(\Psi))}{\partial \psi_j} \right\}, \quad j = 1(1)N \quad (21)$$

и в частном случае, когда Ψ описывается выражениями (11), (12), векторы

$$\text{grad}_{\Phi} I(\Phi) = \left\{ \frac{\partial I(\Phi)}{\partial \phi_i} \right\}, \quad i = 1(1)M, \quad (22)$$

$$\text{grad}_{\Pi'} I(\Phi(\Pi')) = \left\{ \frac{\partial I(\Phi(\Pi'))}{\partial \pi'_j} \right\}, \quad j = 1(1)k' \quad (23)$$

и

$$\text{grad}_{\Psi''} I(\Phi(\Psi'')) = \left\{ \frac{\partial I(\Phi(\Psi''))}{\partial \psi''_j} \right\}, \quad j = 1(1)N''. \quad (24)$$

В силу явной зависимости I от Φ векторы (20), (22) могут быть выписаны в явном виде. Тогда

$$\delta I(\delta\Phi) |_{\Phi=\Phi_0} = (\text{grad}_{\Phi} I(\Phi) |_{\Phi=\Phi_0}, \delta\Phi), \quad (25)$$

где (\bullet, \bullet) – символ скалярного произведения.

Аналогично (в общем случае)

$$\delta I(\delta\Psi) |_{\Psi=\Psi_0} = (\text{grad}_{\Psi} I(\Phi(\Psi)) |_{\Psi=\Psi_0}, \delta\Psi) \quad (26)$$

или, с учетом того что

$$\begin{aligned} \text{grad}_{\Psi} I(\Phi(\Psi)) |_{\Psi=\Psi_0} &= \text{grad}_{\Psi} I(\Phi) |_{\Phi=\Phi_0}, \\ \delta I(\delta\Psi) |_{\Psi=\Psi_0} &= (\text{grad}_{\Psi} I(\Phi) |_{\Phi=\Phi_0}, \delta\Psi). \end{aligned} \quad (27)$$

В случае (11), (12)

$$\delta I(\delta\Pi') |_{\Pi'=\Pi'_0} = (\text{grad}_{\Pi'} I(\Phi) |_{\Phi=\Phi_0}, \delta\Pi'), \quad (27')$$

$$\delta I(\delta\Psi'') |_{\Psi''=\Psi''_0} = (\text{grad}_{\Psi''} I(\Phi) |_{\Phi=\Phi_0}, \delta\Psi''). \quad (27'')$$

Получим явные выражения для $\text{grad}_{\Psi} I(\Phi(\Psi))$. Подставив в (25) выражение для $\delta\Phi$ из (18), получим

$$\begin{aligned} \delta I(\delta\Phi) |_{\Phi=\Phi_0} &= \delta I(\delta\Phi(\delta\Psi)) |_{\Phi=\Phi_0} = \delta I(\delta\Psi) |_{\Phi=\Phi_0} = \\ &= (\text{grad}_{\Phi} I(\Phi) |_{\Phi=\Phi_0}, H\delta\Psi). \end{aligned} \quad (28)$$

Учитывая тождество Лагранжа

$$(X, AY) = (A^T X, Y),$$

где T – символ транспонирования; X, Y – произвольные векторы; A – матрица размерности, соответствующей размерностям векторов X и Y , (28) можно записать в следующем виде:

$$\delta I(\delta\Phi) |_{\Phi=\Phi_0} = (H^T \text{grad}_{\Phi} I(\Phi) |_{\Phi=\Phi_0}, \delta\Psi). \quad (29)$$

Сравнивая выражения (29) и (25), приходим к выводу:

$$\text{grad}_{\Psi} I(\Phi(\Psi)) |_{\Psi=\Psi_0} = H^T \text{grad}_{\Phi} I(\Phi) |_{\Phi=\Phi_0}. \quad (30)$$

Аналогично

$$\text{grad}_{\Pi'} I(\Phi(\Pi')) |_{\Pi'=\Pi'_0} = H'^T \text{grad}_{\Phi} I(\Phi) |_{\Phi=\Phi_0}, \quad (31)$$

$$\text{grad}_{\Psi} I(\Phi(\Psi)) \Big|_{\Psi=\Psi_0} = H'^T \text{grad}_{\Phi} I(\Phi) \Big|_{\Phi=\Phi_0}, \quad (32)$$

где H' – матрица, определяемая выражением (17), а матрица

$$H'' = H''_{[M, N'']} = \left\{ \frac{\partial \Phi_i}{\partial \Psi_l} \Big|_{\Phi=\Phi_0} \right\}, \quad i = 1(1)M, \quad l = 1(1)N''.$$

Выражение (30) (или (31), (32)) позволяет считать чувствительность функционалов от решений (2) к вариациям параметров модели атмосферы. Отметим, что чувствительность функционалов к вариациям параметров модели может быть также оценена с использованием аппарата теории сопряженных уравнений в частных производных [12, 17, 18], однако значительных преимуществ по сравнению с использованием (20), (30), (31), (32) этот подход не предоставляет.

Заметим, что в вышеприведенных формулах градиент функционала по своим аргументам считался вектором-столбцом. Это находится в некотором разногласии с предположениями, используемыми при дифференцировании векторных полей. Учитывая сделанную нами оговорку, нетрудно выписать формулы, в которых градиент будет являться вектором-строкой. Однако в этом случае выкладки будут чрезвычайно громоздки большим количеством знаков транспонирования.

Заключение

Предложенный в данной статье математический аппарат оценивания чувствительности климатических моделей предоставляет возможность более адекватного оценивания тенденций изменения климата в условиях априорной неопределенности факторов, под воздействием которых формируется и эволюционирует климатическая система. При этом в качестве исходного состояния климатической системы необходимо использовать состояние, наблюдаемое в настоящее время. Это состояние может быть оценено путем обработки климатологической информации, в связи с чем отпадает необходимость его реалистичного воспроизведения с помощью некоторой климатической модели. Последнее является несомненным достоинством предлагаемого подхода к исследованию тенденций изменения климата как Земли в целом, так и отдельных ее регионов.

Схема оценивания тенденций изменения климата с использованием предлагаемых в работе методов выглядит следующим образом. Вначале на основе модели чувствительности оценивается чувствительность исследуемых климатических характеристик к вариациям интересующих параметров. При этом в модели чувствительности используются климатические характеристики и значения параметров, наблюдаемые в настоящее время. Затем производится моделирование реализаций параметров факторов, под воздействием которых эволюционирует климатическая система, на основе априорной информации об их распределениях. Далее по формулам (18), (27) оцениваются вариации исследуемых характеристик и, наконец, производится

статистическая обработка полученных результатов с целью определения числовых характеристик распределений интересующих нас характеристик. Такая схема, в отличие от аналогичной, описанной выше, сохраняя преимущества метода имитационного моделирования, не требует огромных затрат вычислительных ресурсов.

Для проверки конструктивности предлагаемого метода исследования чувствительности моделей была проведена серия численных экспериментов, в основу которых были положены следующие послылки.

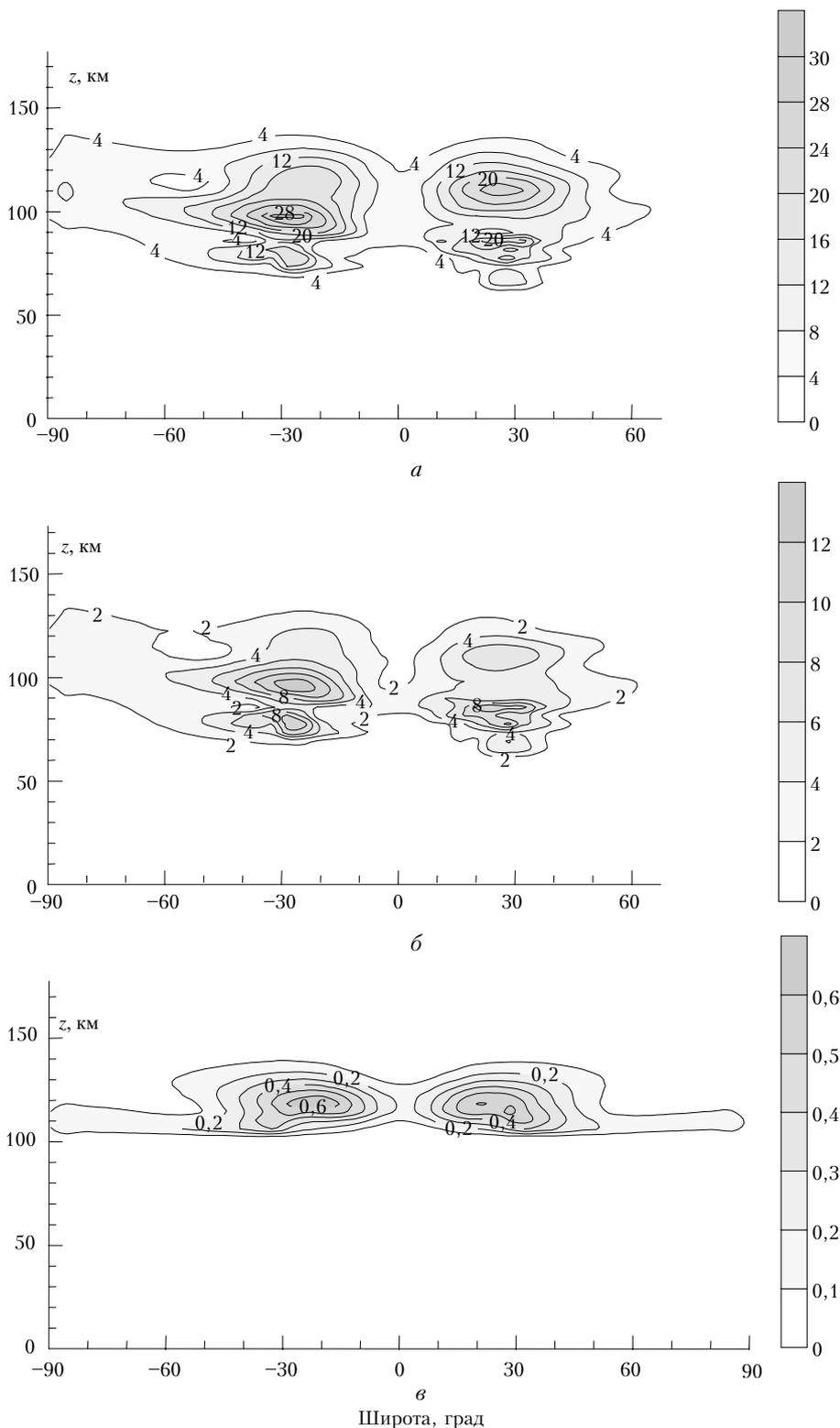
Как известно, средняя атмосфера существенным образом влияет на процессы формирования глобального климата Земли и определяет тенденции его изменения. Это обусловлено тем, что в средней атмосфере сосредоточена основная масса активных газовых компонентов, таких как озон и углекислый газ, контролирующих радиационный режим атмосферы. С другой стороны, одним из основных процессов, протекающих в средней атмосфере, являются приливные движения. В связи с этим эксперименты касались исследования чувствительности модели установившихся приливных движений к вариациям своих параметров.

В рассматриваемой модели учтены все известные физические эффекты, влияющие на термодинамический режим средней атмосферы, такие как вязкость, теплопроводность, радиационное выхолаживание в длинноволновом участке спектра, гидромагнитные эффекты. Диффузионные процессы параметризованы в терминах рэлеевского трения.

На вариации состояния средней атмосферы, обусловленные волновыми процессами, наиболее значимо влияют параметры, входящие в описание диссипативных эффектов, а именно параметры, которые определяют степень турбулизации атмосферы.

Особенно часто в моделях приливных движений в качестве параметризаций турбулентной диффузии используются параметризации, в которых вклад турбулентного обмена в коэффициент рэлеевского трения описывается некоторой функцией высоты и трех параметров: значения на турбопаузе добавки α_0 (обусловленной турбулентностью) в коэффициент рэлеевского трения, высоты z_1 нижней границы и высоты z_2 верхней границы турбопаузы. Значения этих параметров, предлагаемые в работах различных авторов, существенно отличаются. Это связано не только с несовершенством методик идентификации этих параметров по экспериментальным данным, которые использовались исследователями. Представляется, что такой разброс в значениях параметров обусловлен различной интенсивностью генерации ВГВ в тропосфере, т.е. этот разброс имеет под собой некоторую физическую основу. В связи с этим интересен вопрос о том, насколько чувствительны характеристики приливных движений к вариациям этих параметров.

На рисунке представлены функции чувствительности амплитуды суточных вариаций зонального ветра, полученные с использованием модели чувствительности, разработанной с использованием предлагаемого в работе подхода.



Функции чувствительности амплитуды суточных приливных вариаций скорости зонального ветра к вариациям параметров:
 $a - \alpha_0 \cdot 10^3$, (м/с)/с⁻¹; $b - z_1$, (м/с)/км; $v - z_2$, (м/с)/км

Из анализа результатов, представленных на этом рисунке, можно сделать вывод, что они находятся в полном соответствии с теоретическими положениями, изложенными, например, в [19, 20]. Так, максимальная чувствительность полей амплитуд наблюдается по

отношению к параметру α_0 , характеризующему степень турбулизации атмосферы на высоте турбопаузы. Чувствительность к высоте z_1 нижней границы турбопаузы максимальна ниже турбопаузы. Это связано с наличием в волновых полях отраженных от турбопаузы

вниз приливных мод. Чувствительность же к высоте верхней границы турбопаузы практически отсутствует ниже турбопаузы, что свидетельствует о том, что турбопауза даже при ее незначительной толщине является главным фактором формирования картины волновых движений в области высот 50–90 км.

1. Розенвассер Е.Н., Юсупов Р.М. Чувствительность систем управления. М.: Наука, 1981. 464 с.
2. Эйкофф П. Основы идентификации систем управления. М.: Мир, 1975. 683 с.
3. Юсупов Р.М. Развитие и состояние теории чувствительности в стране // Вопр. кибернетики. Теория чувствительности и ее применение. Вып. 23. М.: Связь, 1977. С. 6–15.
4. Tomovic R., Vukobratovic M. General sensitivity theory. Elsevier, 1972. 258 p.
5. Курбаткин Г.П. Исследование ультрадлинных волн в атмосфере // Численные методы решения задач прогноза и общей циркуляции атмосферы. Новосибирск, 1970. С. 174–226.
6. Курбаткин Г.П., Синяев В.Н. Изучение влияния нелинейных взаимодействий на поведение ультрадлинных волн // Численные методы решения задач прогноза и общей циркуляции атмосферы. Новосибирск, 1970. С. 227–257.
7. Марчук Г.И., Пененко В.В., Протасов А.В. Малопараметрическая модель центрально-разностного типа // Метеорология и гидрология. 1978. № 11. С. 5–19.
8. Пененко В.В. Оценка параметров дискретных моделей динамики атмосферы и океана // Метеорология и гидрология. 1979. № 7. С. 77–90.
9. Суворов С.С., Кузьмина С.И., Кулешов Ю.В. и др. Исследование чувствительности решений системы уравнений квазидвумерной модели атмосферы // Тез. докл. I Международной науч.-практ. конференции «Дифференциальные уравнения и их применения». 3–5 декабря 1996 г. СПб., 1996. С. 130–131.
10. Суворов С.С., Кулешов Ю.В., Степанов В.Г. и др. Идентификация параметров в задаче для приливного оператора Лапласа // Тез. докл. I Международной научно-практ. конференции «Дифференциальные уравнения и их применения». 3–5 декабря 1996 г. СПб., 1996. С. 102–103.
11. Марчук Г.И. Численное решение задач динамики атмосферы и океана. Л.: Гидрометеоздат, 1977. 303 с.
12. Пененко В.В. Методы численного моделирования атмосферных процессов. Л.: Гидрометеоздат, 1981. 352 с.
13. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 407 с.
14. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970. 288 с.
15. Холтон Дж.Р. Динамическая метеорология стратосферы и мезосферы. Л.: Гидрометеоздат, 1979. 224 с.
16. Suvorov S.S., Kouzmina S.I. Identification of Gravity Wave Spectrum in Simulation of the Zonal Mean State of the Middle Atmosphere // WGENE Report «Research Activities in Atmospheric and Oceanic Modelling». WMO/TD, N25, Feb. 1996. P. 239–240.
17. Марчук Г.И. Сопряженные уравнения и анализ сложных систем. М.: Наука, 1992.
18. Марчук Г.И., Агошков В.И., Шутяев В.П. Сопряженные уравнения и методы возмущений в нелинейных задачах математической физики. М.: Наука, 1993. 224 с.
19. Госсард Э., Хук У. Волны в атмосфере. М.: Мир, 1978. 532 с.
20. Чепмен С., Линдзен Р. Атмосферные приливы: термические и гравитационные. М.: Мир, 1972. 275 с.

S.S. Suvorov, B.D. Panin. Application of the sensitivity theory to the study of climate changes.

In the paper the state-of-the-art approaches to the modeling of climate and its change are considered, their merits and demerits are analysed. Main difficulties arising from the model preparation are pointed out. The approach to the assessment of the climate change, based on the ideas and methods of sensitivity theory of un lumped-parameter systems is suggested. Methods of sensitivity theory are developed further in order to construct sensitivity models of climate parameters. Expressions for the sensitivity of functionals to the solutions of hydrodynamical models are obtained.