

Д.Н. Ромашов

## МАТРИЦА ОБРАТНОГО РАССЕЙЯНИЯ ДЛЯ МОНОДИСПЕРСНЫХ АНСАМБЛЕЙ ГЕКСАГОНАЛЬНЫХ ЛЕДЯНЫХ КРИСТАЛЛОВ

*Институт оптики атмосферы СО РАН, Томск*

Поступила в редакцию 12.01.99 г.

Принята к печати 10.03.99 г.

Излагается методология создания базы данных для интерпретации результатов измерений матриц обратного рассеяния (МОР) излучения облаков верхнего яруса. Для расчета МОР на гексагональных призмах используется метод деления пучков. Исследуется влияние ориентации ледяных гексагональных пластин и столбиков на МОР. Проводится анализ процессов образования пучков, дающих наибольший вклад в обратное рассеяние. Сделаны расчеты МОР для монодисперсных ансамблей хаотически ориентированных ледяных гексагональных пластин и столбиков. Все вычисления проведены для длины волны падающего излучения  $\lambda = 0,55$  мкм и показателя преломления  $m = 1,311$  (поглощение не учитывается).

### 1. Введение

Облака верхнего яруса состоят в основном из ледяных несферических частиц, имеющих форму гексагональных ледяных пластинок и колонок. В настоящее время накоплен достаточно обширный материал по исследованию закономерностей углового светорассеяния на хаотически ориентированных ледяных кристаллах [1–6]. Такое пристальное внимание к этому вопросу продиктовано прежде всего все возрастающим интересом к изучению влияния перистых облаков на перенос радиации через атмосферу, а также на искажение сигнала, посланного с борта космического аппарата.

Гораздо менее исследован вопрос о рассеивающих свойствах анизотропных ледяных кристаллических сред, в особенности для обратного рассеяния. Имеющиеся в этом направлении работы основываются на весьма упрощенных моделях ледяных кристаллов: круглые пластинки, круговые цилиндры и сфероиды [7–9].

В данной работе делается попытка комплексного подхода к интерпретации данных поляризационных лидарных измерений перистых облаков, т.е. излагается методология создания базы данных для интерпретации результатов поляризационного зондирования облаков верхнего яруса.

### 2. Метод расчета

В настоящее время разработано множество методов изучения светорассеивающих свойств ледяных кристаллов [1, 2], основанных на геометрическом анализе прохождения лучей внутри многогранников согласно законам Снеллиуса и Френеля (метод лучевых траекторий). Недостатком одних является то, что в них предполагается вклад в полное рассеянное поле от выходящих лучей в виде  $\delta$ -функции, что при компьютерной реализации, ввиду конечной сетки углов рассеяния, неизбежно будет приводить к значительным погрешностям рассчитанных характеристик светорассеяния, в особенности для обратного рассеяния, а других – неполнота вычисляемых характеристик светорассеяния. Наиболее последовательным является подход, разработанный в [5], в котором метод лучевых траекторий используется для нахождения поля в ближней зоне на поверхности кристалла, а затем, на основе теоремы электромагнитной

эквивалентности, находится поле в дальней зоне. Однако использование на ПЭВМ расчетных программ, написанных на основе этого метода, сопряжено со значительными трудностями из-за больших затрат машинного времени.

Также весьма перспективным является подход, предложенный автором [10], в котором при взаимодействии излучения с многогранником рассматриваются не лучи, а пучки лучей. Пучок – это совокупность лучей (равномощная множеству точек плоскости), которые при выходе (включая внешнее отражение) из многогранника испытали одинаковые взаимодействия с одними и теми же гранями. При первом взаимодействии плоской волны с какой-либо гранью сечением отраженного пучка является ее проекция на плоскость, перпендикулярную направлению отраженного луча. Аналогичные рассуждения можно привести для преломленного внутрь после первого взаимодействия пучка с гранями. Преломленный внутрь пучок может упасть на несколько граней, т.е. происходит деление пучка на ребрах и вершинах. Ясно, что после каждого внутреннего отражения сечения выходящих из многогранника пучков имеют форму многоугольников и их площадь уменьшается (за исключением случаев, когда пучок полностью вписывается в одну грань). Интегрирование по сечению пучка дает вклад по всем направлениям в рассеянное в дальней зоне поле. Затем проводится суммирование полей по всем вышедшим пучкам.

К сожалению, реализация этого подхода, представленная в [10], имеет множество недостатков: математически громоздкий метод лучевых траекторий, неучет дифракционного вклада, сложный алгоритм расчета вкладов выходящих пучков, выходными расчетными данными являются параметры Стокса рассеянного поля, а не матрица рассеяния.

Но ввиду того что данный подход позволяет экономить компьютерное время счета задач, автор пошел по пути модернизации последнего.

При создании программы рассеяния света на выпуклых многогранниках, основанной на методе деления пучков (МДП), использовались методика вычисления амплитудных матриц выходящего из многогранника пучка [5], алгоритм определения граничных точек пересечения двух плоских многоугольных областей [10].

Все остальные алгоритмы разработаны автором. Алгоритм определения вклада выходящего пучка приведен в Приложении. Вклад от дифракции на многоугольной тени кристалла рассчитывается стандартным образом [1] с использованием алгоритма, описанного в Приложении.

### 3. Матрица обратного рассеяния (МОР) монодисперсного ансамбля произвольно ориентированных гексагональных кристаллов

Размеры гексагона будем задавать посредством параметров  $L$  – длины вдоль оси симметрии и  $a$  – радиуса окружности, описанной вокруг гексагонального основания. При  $L > 2a$  такие тела обычно называются гексагональными столбиками, а при  $L < 2a$  – гексагональными пластинками.

Опишем геометрию рассеяния излучения на произвольно ориентированном гексагоне. Определим систему координат  $Oxyz$  (рис. 1), связанную с падающим излучением следующим образом: ось  $Oz$  совпадает с направлением падающего излучения, а состояние поляризации падающего излучения задается относительно плоскости  $xOz$  (плоскость референции или базисная плоскость лидара). Пусть система координат  $Ox'y'z'$  получается из  $Oxyz$  путем поворотов на три угла Эйлера  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и связана с гексагоном следующим образом: точка  $O$  находится в центре гексагона; ось  $Oz'$  является осью симметрии гексагона; ось  $Ox'$  перпендикулярна одной из боковых граней.

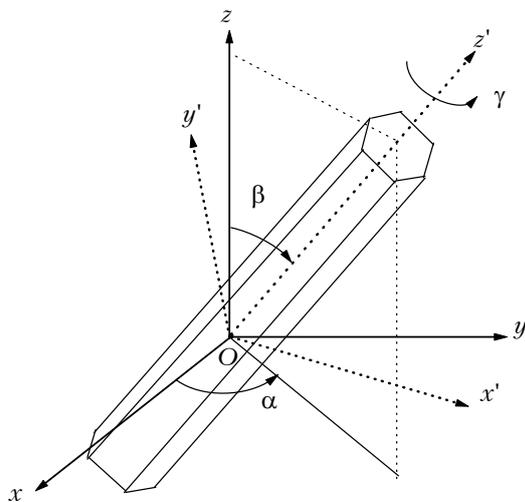


Рис. 1. Геометрия рассеяния на произвольно ориентированном гексагональном кристалле

Таким образом,  $\beta$  – это угол между направлением падающего излучения и осью гексагона,  $\alpha$  – угол между плоскостью референции и плоскостью, содержащей направление падающего излучения и ось гексагона;  $\gamma$  – угол поворота вокруг оси гексагона, по которому всегда в дальнейшем будет подразумеваться усреднение с плотностью вероятности  $3/\pi$ , т.е. если  $S'(\alpha, \beta, \gamma)$  – это МОР произвольно ориентированного гексагонального кристалла, то усредненная по углу  $\gamma$  МОР принимает вид

$$S(\alpha, \beta) = \frac{3}{\pi} \int_0^{\pi/3} S'(\alpha, \beta, \gamma) d\gamma.$$

$S(\alpha, \beta)$  можно выразить через  $M(0, \beta)$  (при  $\alpha = 0$  ось гексагонального кристалла лежит в плоскости референции) следующим образом:

$$S(\alpha, \beta) = R(-\alpha) M(0, \beta) R(-\alpha), \quad (1)$$

где  $R(\alpha)$  – матрица преобразования параметров Стокса при вращении плоскости референции на угол  $\alpha$ :

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\alpha & \sin 2\alpha & 0 \\ 0 & -\sin 2\alpha & \cos 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для нахождения  $P$  – МОР монодисперсного полиориентированного, с плотностью вероятности углового распределения  $g(\alpha, \beta)$ , ансамбля гексагональных кристаллов, необходимо провести интегрирование по полному телесному углу:

$$P = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} R(-\alpha) M(0, \beta) R(-\alpha) g(\alpha, \beta) \sin \beta d\beta d\alpha. \quad (2)$$

Вследствие симметрии обратного рассеяния и формы гексагонального кристалла пределы интегрирования в (2) можно взять по  $\alpha$  от 0 до  $\pi$ , по  $\beta$  – от 0 до  $\pi/2$ .

Таким образом, для того чтобы получить матрицу обратного рассеяния монодисперсного ансамбля произвольно ориентированных гексагональных кристаллов, необходимо рассчитать и сохранить в виде таблицы с достаточно мелким шагом по углу  $\beta$  матрицу  $M(0, \beta)$  (производя при этом усреднение по углу  $\gamma$  для каждого фиксированного угла  $\beta$ ).

Отметим, что матрица  $M(0, \beta)$  состоит из восьми ненулевых элементов, пять из которых линейно независимы, причем

$$M_{11}(0, \beta) - M_{22}(0, \beta) = M_{44}(0, \beta) - M_{33}(0, \beta);$$

$$M_{21}(0, \beta) = M_{12}(0, \beta); \quad M_{43}(0, \beta) = -M_{34}(0, \beta).$$

Накопив достаточно богатый расчетный материал для различных размеров кристаллов, можно вычислять матрицу обратного рассеяния для полидисперсных ансамблей частиц.

### 4. Результаты расчетов

Для тестирования программы вычисления характеристик светорассеяния на гексагональных кристаллах были проведены расчеты элементов матрицы рассеяния (МР) ансамбля хаотически ориентированных гексагональных ледяных кристаллов с размерами  $a = L = 180 \lambda / (2\pi)$ ,  $k = 2\pi/\lambda$  для длины волны падающего излучения  $\lambda = 0,55$  мкм и показателя преломления 1,311, причем для обратного рассеяния  $\theta = \pi$  расчеты были сделаны по методике, изложенной в предыдущем разделе. Рассчитанные автором угловые зависимости четырех элементов МР  $P_{22}/P_{11}$ ,  $P_{33}/P_{11}$ ,  $P_{44}/P_{11}$  и  $P_{34}/P_{11}$  приведены в левой колонке на рис. 2, а аналогичные угловые зависимости элементов МР, вычисленные по геометрико-оптическому методу интегральных уравнений (GOM2) авторами [5], приведены в правой колонке на рис. 2 (сплошная линия). Сравнение поведения кривых на рис. 2 показывает, что имеются небольшие отличия (до 5%) в значениях вышеуказанных элементов в основном в области больших углов рассеяния. Было проведено также сравнение элементов МОР для хаотически ориен-

тированных ансамблей гексагональных столбиков ( $a = 60$  мкм,  $L = 300$  мкм,  $n = 1,31$ ,  $\lambda = 0,55$  мкм) и пластинок ( $a = 10$  мкм,  $L = 8$  мкм,  $n = 1,31$ ,  $\lambda = 0,6328$  мкм), рас-

считанных автором по МДП с аналогичными элементами, вычисленными по методу лучевых траекторий (GOM1) авторами [2]. Результаты расчетов приведены в таблице.

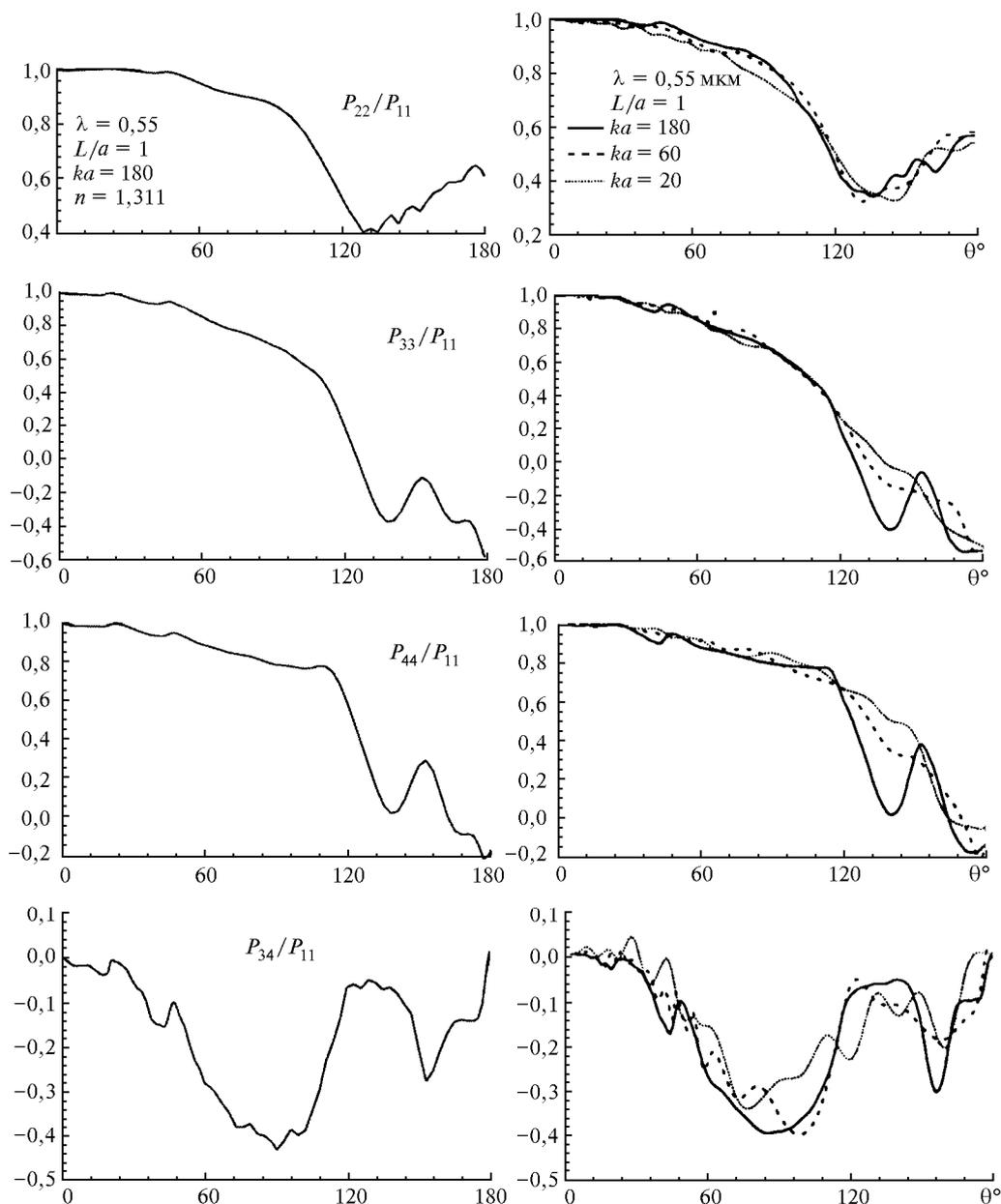


Рис. 2. Элементы матрицы рассеяния для гексагональных ледяных пластинок, хаотически ориентированных в пространстве. Значения элементов для обратного рассеяния отмечены пунктирными линиями

Элементы МОР	Столбики		Пластинки	
	МДП	GOM1 [2]	МДП	GOM1 [2]
$P_{22}/P_{11}$	0,69	0,26	0,58	0,44
$P_{33}/P_{11}$	-0,69	-0,26	-0,58	-0,44
$P_{44}/P_{11}$	-0,38	0,48	-0,16	0,12

Сравнение результатов расчетов автора с аналогичными из [2] показывает, что имеются существенные различия в значениях трех элементов МОР ( $P_{12}/P_{11} = P_{34}/P_{11} = 0$ ). Это прежде всего очень большие значения  $P_{44}/P_{11}$  и  $P_{33}/P_{11}$  и малые значения  $P_{22}/P_{11}$  данных для обратного рассеяния, приведенных в [2], по сравнению с расчетами автора. От-

метим, что значения вышеуказанных элементов МОР, рассчитанных по МДП, лучше соответствуют результатам экспериментальных измерений, приведенных в [11].

Как уже указывалось выше, метод GOM1, используемый авторами [2, 6], имеет ряд недостатков, присущих классической геометрической оптике (каустике). Так, в

частности, как это отмечается в [2], в их методе имеются неопределенности вычисления вклада выходящих из кристалла лучей в рассеянное поле для углов рассеяния  $\theta = 0$  и  $180^\circ$ , связанное с наличием в весовых коэффициентах амплитуд рассеяния выходящих лучей множителя  $1/\sin\theta$ , что дает бесконечные интенсивности рассеяния в прямом и обратном направлениях. Чтобы этого избежать, авторы [2] предлагают при вычислении весовых коэффициентов лучей, выходящих в прямом и обратном направлениях, использовать соответственно значения  $\theta = 0,5$  и  $179,5^\circ$ , что неизбежно должно приводить к большим погрешностям вычисленных значений  $P_{22}/P_{11}$ ,  $P_{33}/P_{11}$  и  $P_{44}/P_{11}$ . Аналогичная неопределенность: присутствие множителя  $1/\sin\theta_k$  в выражении для расчета дифференциального сечения рассеяния ( $\theta_k$  – узел сетки полярных углов рассеяния) наблюдается и в методе, изложенном в [12]. К сожалению, в [5] приводится сравнение угловых зависимостей лишь двух элементов МР:  $P_{11}$  и  $-P_{12}/P_{11}$ , рассчитанных по методам GOM1 [1, 2] и GOM2 [5], тогда как гораздо интереснее было бы сравнение остальных элементов МР. В [5] отмечается, что для обратного рассеяния значения  $P_{11}$ , рассчитанные по GOM2, больше, чем значения этого же элемента, рассчитанные по GOM1.

Как показали численные эксперименты, значения элементов МОР  $P_{22}/P_{11}$ ,  $P_{33}/P_{11}$  и  $P_{44}/P_{11}$  ансамблей хаотически ориентированных гексагональных кристаллов для  $\theta = 180^\circ$  сильно зависят от построения сетки ориентаций по углу  $\alpha$  и поэтому для обратного рассеяния вычисление элементов МОР ансамблей хаотически ориентированных кристаллов следует проводить по методике, изложенной в п. 2 (усреднение по углу  $\alpha$  проводится аналитически по формуле (2)).

Прежде чем приступить к анализу зависимостей элементов МОР  $M(0,\beta)$ , введенной в п. 2, для которой предполагается усреднение по углу  $\gamma$ , было бы интересно провести исследование зависимости  $M'_{11}(0,\beta,\gamma)$  от угла  $\gamma$  при фиксиро-

ванных значениях угла  $\beta$ . На рис. 3 приведены такие зависимости для четырех значений угла  $\beta$ . Расчеты сделаны для гексагонального ледяного столбика с  $L = 400$  мкм и  $a = 65,72$  мкм. Отметим также, что все расчеты, представленные в данной работе, сделаны для излучения с длиной волны  $\lambda = 0,55$  мкм и показателя преломления  $n = 1,311$  (предполагается отсутствие поглощения), а соотношение между  $a$  и  $L$  вычисляется по эмпирической формуле

$$L = A(2a)^p,$$

где  $A$  и  $p$  – константы, значения которых для столбиков и пластинок приведены в [13].

Как видно на рис. 3, для всех значений угла  $\beta$  имеется ярко выраженный максимум в точке  $\gamma = 0^\circ$ , затем значения  $M_{11}$  резко падают на 1–2 порядка по мере стремления  $|\gamma|$  к  $1^\circ$ . Имеются также достаточно широкие, по сравнению с центральным, симметричные боковые максимумы, значения которых составляют до 10% от значений центрального максимума ( $\gamma = 0^\circ$ ), а положение по оси  $\gamma$  определяется значением угла  $\beta$ . Таким образом, поведение МОР от угла  $\beta$  будет определяться в основном гексагональными кристаллами с ориентацией  $\gamma = 0^\circ$ , однако вкладом других ориентаций нельзя пренебречь, поэтому, ввиду их вращательной симметрии (6-го порядка) вокруг оси кристалла, необходимо всегда проводить усреднение по углу  $\gamma$  на отрезке  $[-\pi/6, \pi/6]$  с плотностью вероятности  $3/\pi$ . Вклад ориентации  $\gamma \neq 0^\circ$  в усредненную МОР при фиксированных значениях  $\beta$  можно оценить по значению разности  $\Delta(0,\beta) = 1 - M_{22}(0,\beta)/M_{11}(0,\beta)$ , так как  $M'_{22}(0,\beta,0)/M'_{11}(0,\beta,0) = 1$  при всех значениях  $\beta$ .

На рис. 4 изображены усредненные по  $\gamma$  угловые зависимости элементов МОР  $M(0,\beta)$  для гексагональной ледяной пластинки с диаметром  $2a = 400$  мкм и толщиной  $L = 30,64$  мкм. Усреднение по углу  $\gamma$  проводилось с шагом  $\Delta\gamma = 0,05^\circ$ .

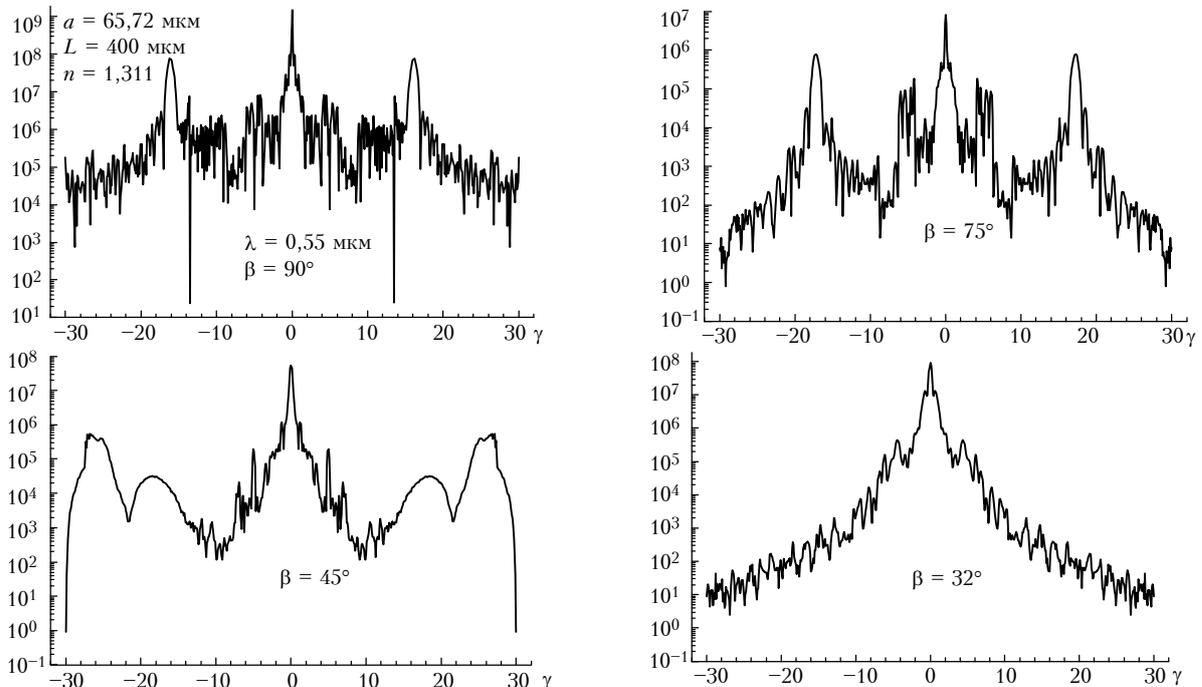


Рис. 3. Зависимость  $M'_{11}(0,\beta,\gamma)$  элемента МОР при фиксированных значениях угла  $\beta = 90, 75, 45, 32^\circ$  и  $\alpha = 0^\circ$  от угла  $\gamma$

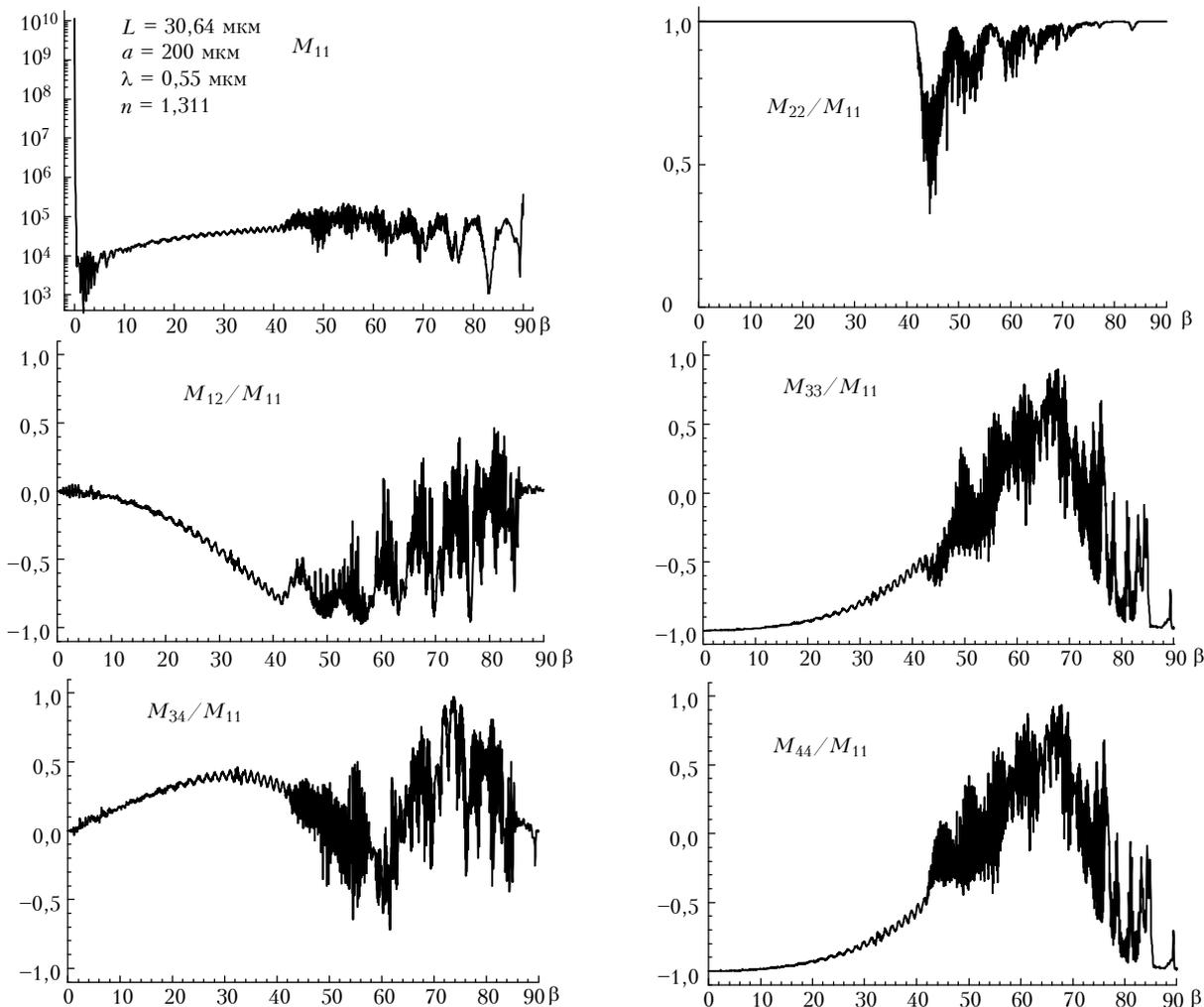


Рис. 4. Зависимость элементов МОР от угла  $\beta$  для ансамбля гексагональных пластинок, равномерно ориентированных вокруг оси

Как показывает геометрический анализ процессов образования пучков, выходящих в обратном направлении, исключая  $\beta = 0, 90^\circ$  и  $\beta$ , очень близкие к ним, наибольший вклад в обратное рассеяние дают пучки, для которых одновременно выполняются три следующих условия:

- пучки образуются после четного числа взаимодействий с гранями (включая первое внешнее);
- пучки выходят из той же грани, которая их и породила при первом взаимодействии;
- обязательно имеют место три последовательных внутренних взаимодействия с тремя соседними взаимно перпендикулярными гранями.

Проведем более подробный анализ этих процессов на примере гексагональных пластинок. На рис. 5 изображены сечения пластинки ( $\gamma = 0^\circ$ ), проходящие через ее ось, и нормали двух противоположных боковых четырехугольных граней  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ . Стрелками изображены указанные выше процессы: а) пучок выходит из шестиугольного основания  $O_1$  (рис. 5,а); б) пучок выходит из боковой грани  $\Gamma_1$  (рис. 5,б). На рис. 5 изображены только пучки 4- и 6-кратного взаимодействия, однако ясно, что при определенных значениях  $a$  и  $L$  могут образовываться пучки большей четной кратности. Если на рис. 5 поменять направления стрелок на противоположные, то получится схема образо-

вания взаимно обратных пучков, которые являются эквивалентными исходным по их вкладу в обратное рассеяние. Значения площади сечений выходящих пучков определяются значением параметров  $\beta$ ,  $a$  и  $L$ .

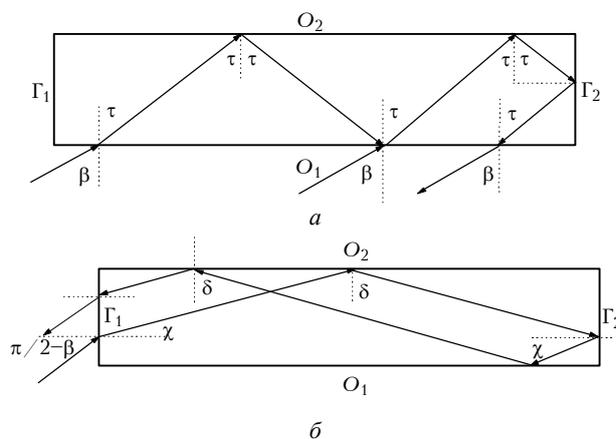


Рис. 5. Механизмы образования пучков на гексагональных пластинках с  $\gamma = 0^\circ$ , дающих наибольший вклад в обратное рассеяние при наклонном падающем излучении

Сделаем более детальный анализ поведения по углу  $\beta$  некоторых элементов МОР для гексагональной пластинки на основе вышеописанных процессов ( $\gamma = 0^\circ$ ). Найдем прежде всего значение  $\varepsilon$  – угла полного внутреннего отражения для льда:  $\varepsilon = \arcsin(1/1,311) \approx 49,7^\circ$ , которое может иметь место для процессов «а» на грани  $G_2$  (см. рис. 5,а), когда  $0^\circ < \beta < 58^\circ$ , и «б» – на основаниях  $O_1$  и  $O_2$  (см. рис. 5,б), когда  $\beta > 32^\circ$ . Вклад от процесса «а» будет увеличиваться с возрастанием  $\beta$  до  $58^\circ$  из-за роста площадей сечений выходящих пучков, так как  $L \ll 2a$ , и роста коэффициента внутреннего отражения от оснований до тех пор, пока не прекратится полное внутреннее отражение на боковой грани  $G_2$ , а затем он будет уменьшаться. Вклад от процесса «б» будет существенным начиная с  $\beta = 32^\circ$  (появится полное внутреннее отражение на основаниях  $O_1$  и  $O_2$ , и будут образовываться выходящие пучки после многократных отражений на этих основаниях), причем площадь сечения пучков фиксированной четной кратности будет резко увеличиваться, а затем уменьшаться на узком интервале значений  $\beta$ , так как  $L \ll 2a$ . Пучки большей кратности дают вклад при меньших значениях  $\beta$ , и наоборот. Таким образом, поведение  $M_{11}$  на рис. 4 можно интерпретировать следующим образом. Наибольшее значение  $M_{11}$  (см. рис. 5,а) имеет при  $\beta = 0^\circ$ , когда  $2nL = (m + 1/2)\lambda$ , или при  $\beta$ , очень близких к  $0^\circ$ , когда

$$2nL(1 - \sin^2\beta/n^2) = (m + 1/2)\lambda \quad (3)$$

( $m$  – целое число). В этом случае основания пластинки  $O_1$  и  $O_2$  остаются практически перпендикулярными направлению падающего излучения, все отраженные и многократно преломленные пучки выходят вблизи направлений вперед и назад (в области первого пика интеграла Фраунгофера, см. Приложение) только через основания и их амплитуды складываются. Это подтверждается поведением  $M_{11}(0,\beta)$  вблизи  $\beta = 0$  (шаг  $\Delta\beta = 0,01^\circ$ ) для гексагонального кристалла длиной  $L = 400\lambda/n$ , приведенного на рис. 6, где условие (3) выполняется при  $\beta \approx 0,07^\circ$ .

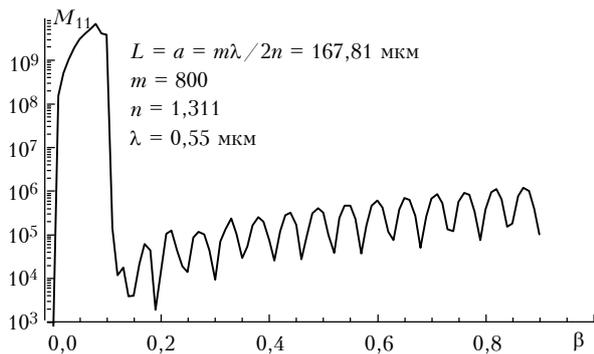


Рис. 6. Зависимость элемента МОР  $M_{11}(0,\beta)$  от угла  $\beta$  для гексагонального кристалла в интервале от 0 до  $1^\circ$

Похожие рассуждения можно привести для  $\beta = 90^\circ$ , только в этом случае не весь преломленный и отраженный свет выходит в обратном направлении и сечения пучков значительно меньше. На интервале  $0^\circ < \beta < 42^\circ$

$M_{11}$  монотонно возрастает, так как вклад обусловлен процессом «а». Вклад на интервале  $42^\circ < \beta < 90^\circ$  обусловлен интерференцией выходящих пучков, образовавшихся в результате процессов «а» и «б» с преобладанием на интервале  $42^\circ < \beta < 60^\circ$  вклада от процесса «а», а на интервале  $60^\circ < \beta < 90^\circ$  от «б». Поэтому  $M_{11}$ , периодически осциллируя, в начале увеличивается и достигает максимума в точке  $\beta \approx 58^\circ$ , а затем уменьшается, причем число локальных максимумов определяется соотношением  $L/a$  и  $p$  – количеством учитываемых взаимодействий. Для тонких пластинок оно равно  $p/2$ . В расчетах, представленных на рис. 4, учитывалось до 16 взаимодействий. Заметим, что пики вблизи  $\beta = 0, 90^\circ$  являются очень узкими по сравнению с другими максимумами и поэтому при усреднении по углу  $\beta$  с плотностью вероятности  $\sin\beta$  вклад от них будет сравним с вкладом от остальных ориентаций. В отличие от вышеприведенных результатов, в расчетах МОР для гексагональных ледяных кристаллов, приведенных в [14], на отрезке  $0^\circ < \beta < 90^\circ$  был обнаружен всего лишь один ярко выраженный максимум  $M_{11}$  при  $\beta \approx 32^\circ$ , а также два значительно уступающих ему по величине локальных максимума при  $\beta = 0$  и  $90^\circ$ .

Приведем здесь также качественный анализ зависимости от  $\beta$  элемента МОР  $M_{12}/M_{11}$  (см. рис. 4). Практически монотонное убывание этого элемента до  $-1$  с ростом  $\beta$  от 0 до  $52^\circ$  объясняется тем, что на данном интервале основной вклад в обратное рассеяние вносят процессы типа «а», для которых коэффициент внутреннего отражения параллельной плоскости падения компоненты электрического поля на основаниях  $O_1$  и  $O_2$  (см. рис. 5,а) монотонно убывает (с ростом  $\beta$ ) и становится равным нулю при  $\beta = 52^\circ$  (угол Брюстера для льда). Следовательно, на интервале  $40^\circ < \beta < 60^\circ$  интенсивность обратнорассеянного света максимальна тогда, когда он поляризован перпендикулярно плоскости падения (совпадающей с плоскостью референции  $\alpha = 0^\circ$ ). Заметим, что МОР (см. рис. 4) можно интерпретировать как МОР при наклонном зондировании (зенитный угол зондирования равен  $\beta$ ) ансамбля гексагональных ледяных пластинок, оси которых ориентированы строго вертикально, при равномерном распределении по углу  $\gamma$ .

Поведение  $M_{22}/M_{11}$  на интервале  $40^\circ < \beta < 60^\circ$  показывает, что вклад от ориентаций  $\gamma \neq 0^\circ$  является весьма значительным ( $M'_{22}(0,\beta,0)/M'_{11}(0,\beta,0) = 1$ ).

На рис. 7 изображены зависимости элементов МОР  $M(0,\beta)$  для гексагонального ледяного столбика с диаметром  $2a = 131,44$  мкм и длиной  $L = 400$  мкм. Вышеприведенные рассуждения относительно пластинок подходят и для столбиков, так как в этом случае основания и боковые грани меняются ролями и поэтому наибольшее значение  $M_{11}$  имеет в точке  $\beta = \pi/2$ . Если  $\beta_n$  – один из характерных углов на рис. 4, то соответствующий ему угол на рис. 6 будет  $\beta_c = \pi/2 - \beta_n$ .

Заметим, что на рис. 7 имеется всего лишь два локальных максимума  $M_{11}$ , так как их количество определяется не только числом учитываемых взаимодействий, но и отношением максимального размера к минимальному, которое для столбиков значительно меньше, чем для пластинок на рис. 4.

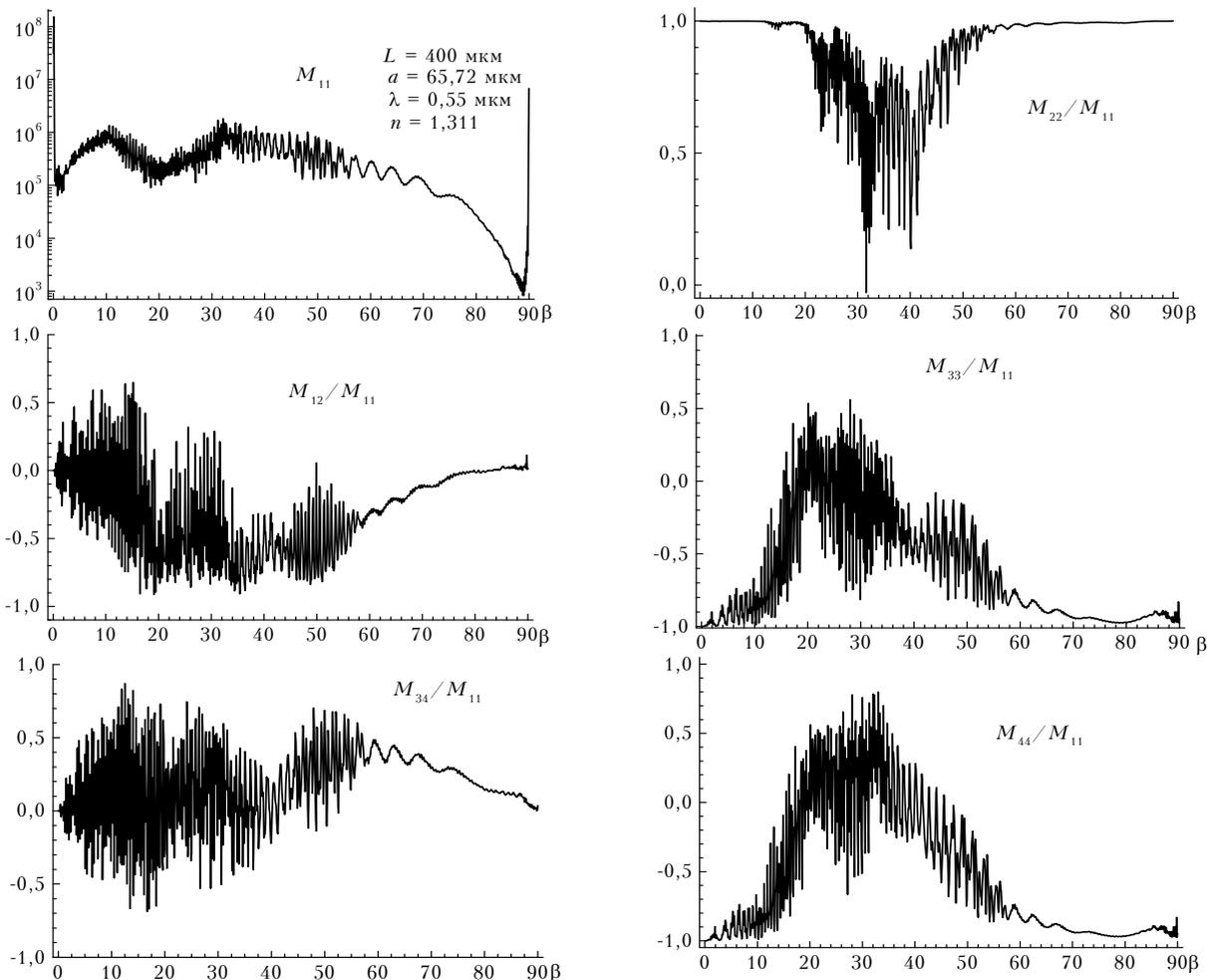


Рис. 7. Зависимость элементов МОР от угла  $\beta$  для ансамбля гексагональных столбиков, равномерно ориентированных вокруг оси

В заключение отметим, что расчеты, проведенные по методу лучевых траекторий [1, 2] или геометрической оптики [12], не могут быть признаны удовлетворительными для исследования обратного светорассеяния, поскольку они дают бесконечную интенсивность излучения при  $\theta = \pi$ , а попытки искусственного избегания этой неопределенности могут приводить к значительным погрешностям вычисления МОР. Метод, изложенный в [7] для расчета МОР круговых пластинок, свободен от этого недостатка, но имеет ограниченную область применимости ( $a \gg \lambda$ ,  $0^\circ < \beta < 5^\circ$ ), так как не учитывает внутренние взаимодействия с плоскими четырехугольными боковыми гранями, дающими основной вклад в обратное рассеяние при наклонной ориентации кристаллов ( $\beta \neq 0, \pi/2$ ). В методе деления пучков, представленном в данной статье, вышеуказанная сингулярность (деление на 0) устраняется путем вычисления пределов, приведенных в Приложении.

#### ПРИЛОЖЕНИЕ

Пусть в системе координат  $Ox_1z_1$ , связанной с падающим излучением, сечение пучка, имеющего форму многоугольника, задается координатами  $x_i, y_i, z_i$  ( $i = 1, n_p$ ),  $\mathbf{e}_p$  – единичный вектор, задающий направление распространения выходящего из кристалла пучка,  $\mathbf{e}_r$  – единичный вектор, задающий направление рассеяния,  $n_p$  – число вер-

шин в многоугольнике. Тогда в приближении дифракции Фраунгофера вклад пучка в результирующую амплитудную матрицу  $\mathbf{A}_p$  может быть записан в виде [5]:

$$\mathbf{A}_p(\mathbf{e}_r) = k^2/(4\pi) (1 + \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_p) \mathbf{S}_p q_p \exp(ik\delta_p), \quad (4)$$

где  $\mathbf{S}_p$  – амплитудная матрица (преобразования амплитуд при отражениях и преломлениях на гранях) луча, проходящего через вершину многоугольника, лежащую на грани, из которой выходит пучок, а  $\delta_p$  – фазовый набег этого луча [5];  $q_p$  – волновое возмущение в дальней зоне от выходящего пучка, вычисленное в приближении дифракции Фраунгофера:

$$q_p = \iint_{G_p} \exp(-ik \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}') d^2 \mathbf{r}', \quad (5)$$

где  $k = 2\pi/\lambda$  – волновое число;  $\lambda$  – длина волны излучения;  $G_p$  – сечение пучка;  $\mathbf{r}'$  – радиус-вектор точки сечения пучка. Так как всякий многоугольник можно представить в виде суммы треугольников относительно некоторой внутренней точки  $O'$ , то (5) можно переписать в виде

$$q_p = \sum_{j=1}^{n_p} q_p^j = \sum_{j=1}^{n_p} \iint_{G_p^j} \exp(-ik \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}') d^2 \mathbf{r}'. \quad (6)$$

Для упрощения интегрирования (6) удобно перейти из системы координат  $Oxyz$  в систему координат  $Ox'y'z'$ , связанную с выходящим пучком, у которой ось  $Oz'$  совпадает с  $e_p$ , а точка  $O'$  лежит в плоскости сечения пучка внутри многоугольника. Пусть в этой системе координат  $e_r = \begin{pmatrix} e_{x'} \\ e_{y'} \\ e_{z'} \end{pmatrix}$ ,

тогда

$$q_p^j = \iint_{G_p^j} \exp(-ik(e_{x'}x' + e_{y'}y')) dx' dy', \quad (7)$$

где  $G_p^j$  – треугольник с вершинами  $(0,0)$ ,  $(x'_j, y'_j)$ ,  $(x'_{j+1}, y'_{j+1})$ , как это изображено на рис. 8. Для вычисления (7) необходимо сделать еще одно преобразование из системы координат  $Ox'y'z'$  в систему координат  $Ouvz'$ , т.е. поворот вокруг оси  $Oz'$  на угол  $\phi_j$  такой, что ось  $Ou$  проходит через точку  $(x'_j, y'_j)$ . Нумерация вершин в многоугольнике идет по направлению положительных углов в системе координат  $Ox'y'z'$ . Обозначим координаты двух вершин треугольника  $(x'_j, y'_j)$  и  $(x'_{j+1}, y'_{j+1})$  соответственно  $(u_2, 0)$  и  $(u_1, v_1)$  (см. рис. 8). Тогда имеем

$$u_2 = \sqrt{x_j'^2 + y_j'^2}, \quad \sin\phi_j = y'_j/u_2, \quad \cos\phi_j = x'_j/u_2,$$

$$u_1 = x'_{j+1} \cos\phi_j + y'_{j+1} \sin\phi_j, \quad v_1 = -x'_{j+1} \sin\phi_j + y'_{j+1} \cos\phi_j;$$

$$e_u = e_{x'} \cos\phi_j + e_{y'} \sin\phi_j, \quad e_v = -e_{x'} \sin\phi_j + e_{y'} \cos\phi_j.$$

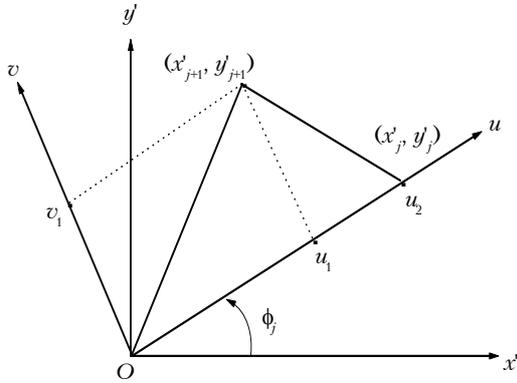


Рис. 8. Преобразование координат при вычислении вклада в дальнюю зону от выходящего из кристалла пучка треугольной формы

Следовательно, (7) запишется в виде

$$q_p^j = \int_0^{u_1} \int_0^{\frac{v_1}{u_1}u} \exp(w_1u + w_2v) du dv + \int_{u_1}^{u_2} \int_0^{\frac{(u_2-u)v_1}{u_2-u_1}} \exp(w_1u + w_2v) du dv, \quad (8)$$

где  $w_1 = -ike_u$ ,  $w_2 = -ike_v$ .

Интегрируя выражение (8), получаем

$$q_p^j = v_1u_2 [w_1u_1 + w_2v_1 - w_1u_2 - (w_1u_1 + w_2v_1) \exp(w_1u_2) + w_1u_2 \exp(w_1u_1 + w_2v_1)] / [w_1u_2(w_1u_1 + w_2v_1) \times (w_1u_1 + w_2v_1 - w_1u_2)].$$

Сделав переобозначения  $s = w_1u_1 + w_2v_1$ ,  $d = w_1u_2$ , получаем окончательно

$$q_p^j = w_1u_2 \frac{s-d-s e^d + d e^s}{s d (s-d)}. \quad (9)$$

Для алгоритмизации (9) необходимо избавиться от неопределенностей при делении на 0. Можно выделить 4 типа неопределенностей:

$$1) s=0, d \neq 0; \quad \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s-d-s e^d + d e^s}{s d (s-d)} = \frac{e^d - d - 1}{d^2},$$

$$2) d=0, s \neq 0; \quad \lim_{d \rightarrow 0} \frac{s-d-s e^d + d e^s}{s d (s-d)} = \frac{e^s - s - 1}{s^2},$$

$$3) s=d \neq 0; \quad \lim_{s \rightarrow d} \frac{s-d-s e^d + d e^s}{s d (s-d)} = \frac{d e^d - e^d + 1}{d^2},$$

$$3) s=d=0; \quad \lim_{d \rightarrow 0} \frac{d e^d - e^d + 1}{d^2} = \frac{1}{2}.$$

Описанная выше процедура приведена для произвольного  $j$ -го треугольника, входящего в многоугольник. Применяя ее для всех треугольников, составляющих многоугольник, и суммируя вклады, получаем вклад от всего пучка.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки РФ по теме «Лидар» (рег. № 06–21).

1. Cai Q., Liou K.N. // Appl. Opt. 1982. V. 21. № 19. P. 3569–3580.
2. Takano Y., Jeyaweera K. // Appl. Opt. 1985. V. 24. № 19. P. 3254–3263.
3. Muinonen K. // Appl. Opt. 1989. V. 28. № 15. P. 3044–3050.
4. Yang P., Liou K.N. // J. Opt. Soc. Am. A. 1996. V. 13. № 10. P. 2072–2085.
5. Yang P., Liou K.N. // Appl. Opt. 1996. V. 35. № 33. P. 6568–6584.
6. Takano Y., Liou K.N. // Appl. Opt. 1989. v. 46. № 1. P. 3–19.
7. Попов А.А., Шеффер О.В. // Оптика атмосферы. 1990. Т. 3. № 1. С. 44–50.
8. Ромашов Д.Н. // Оптика атмосферы и океана. 1997. Т. 10. № 1. С. 10–18.
9. Wielaard D.J., Mishchenko M.I., Macke A., Carlson B.E. // Appl. Opt. 1997. V. 36. № 18. P. 4305–4313.
10. Попов А.А. Рассеяние электромагнитной плоской волны на полупрозрачном выпуклом многограннике произвольной формы // Изв. вузов. Физика. Депон. № 8006. 1984. 56 с.
11. Кауль Б.В., Краснов О.А., Кузнецов А.Л., Половцева Е.Р., Самохвалов И.В., Стыкон А.П. // Оптика атмосферы и океана. 1997. Т. 10. № 4. С. 191–201.
12. Naats E.I., Borovoi A.G., Oppel U.G. // Atmosph. and Oceanic Optics. 1998. V. 11. № 1. P. 7–12.
13. Волковицкий О.П., Павлов Л.П., Петрушин А.Г. Оптические свойства кристаллических облаков. Л.: Гидрометеиздат, 1984. 200 с.
14. Naats E.I., Borovoi A.G., Oppel U.G. Backscattering by hexagonal ice crystals // SPIE. Atmosph. and Oceanic Optics. 1998. V. 3583. P. 155–161.

*D.N. Romashov. Back Scattering Matrix for Monodisperse Ensembles of Hexagonal Ice Crystals.*

A methodology of construction of databases for interpreting the measurements of back-scattering matrices (BSM) of high-level clouds is presented. The beam division method is used for calculation of BSM at hexagonal prisms. An influence of the ice hexagonal plates and bars orientation on the BSM is studied. The process of formation of beams mostly contributing into the back scattering is under analysis. The BSMs were calculated for monodisperse ensembles of chaotically oriented ice hexagonal plates and bars. All calculations were made for incident radiation of  $\lambda = 0.55 \mu\text{m}$  and refractive index  $m = 1.311$  (the absorption is ignored).