«Оптика атмосферы и океана», **12**, N 3 (1999)

УДК 551;521;535.31;535.36

Т.А. Сушкевич

О МОДЕЛИРОВАНИИ ПЕРЕНОСА СОЛНЕЧНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В СФЕРИЧЕСКОЙ АТМОСФЕРЕ ЗЕМЛИ И ОБЛАКАХ

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, г. Москва

Поступила в редакцию 19.10.98 г. Принята к печати 10.11.98 г.

Рассматривается перенос излучения в сферическом слое с осевой симметрией. Численное решение краевой задачи для кинетического уравнения осуществляется методом последовательных приближений с интегрированием по характеристикам дифференциального оператора в частных производных.

Введение

Интерес к проблеме переноса излучения в атмосфере в последнее время заметно возрос в связи с многосторонним анализом физических, химических, метеорологических, биологических процессов, ответственных за формирование радиационного поля Земля. Радиационные процессы играют центральную роль в атмосферном теплоэнергообмене и, как следствие, в формировании глобального и локального климата планеты. Нарушение радиационных процессов в системе «атмосфера–Земля» (САЗ) под влиянием антропогенных и естественно-природных воздействий может спровоцировать разрушение самовосстановительного потенциала биосферы Земли и вызвать катастрофические последствия. Неслучайно за последние годы эти проблемы вышли за пределы чисто научных и обсуждаются международным сообществом на межправительственном уровне. Для обеспечения устойчивого развития необходима ясность в понимании происходящих процессов, чтобы выработать меры по предотвращению возможных негативных последствий климатических изменений или существенных отклонений в спектрально-радиационном балансе планеты. К сожалению, в настоящее время пока еще велика неопределенность прогнозов возможных климатических и биофизических изменений, в частности, из-за низкой точности описания радиации в моделях климата, циркуляции атмосферы и океана.

Обширную информацию дает комплекс оптического зондирования атмосферы и земной поверхности, осуществляемый с наземных станций, самолетов, вертолетов, аэростатов, ракет, космических спутников и долгосрочных орбитальных станций. Однако эти данные имеют общий серьезный недостаток: в натурных условиях невозможно адекватно одновременно определить и контролировать все параметры среды, ответственные за формирование радиационного поля в момент измерений. Положение осложняется также и тем обстоятельством, что вследствие непрерывного изменения состояния среды во времени и по пространству нельзя точно повторить условия измерений. Интерпретация экспериментальных данных в совокупности с теоретическими расчетами в контролируемых «детерминистических» условиях позволяет радикально пополнить знания об окружающей среде.

Построение радиационной модели Земли как планеты и среды обитания человечества оказывается чрезвычайно важным для решения ряда сложных прикладных и технических проблем, связанных, в частности, с развитием космических систем землеобзора, ориентации, стабилизации, навигации, дополнительного энергообеспечения КА на околоземных орбитах за счет использования второй стороны солнечных батарей, ориентированных на прием солнечного излучения, отраженного от САЗ.

Настоящая работа является естественным продолжением и развитием многолетних исследований по методам и алгоритмам численного решения задач теории переноса излучения в рассеивающих, поглощающих и излучающих сферических системах сложной структуры [1, 2]. Значительным стимулом этой работы послужило качественное изменение информационных технологий, обусловленное внедрением высокопроизводительных многопроцессорных ЭВМ с параллельными структурами.

Работы со сферическими многомерными моделями САЗ начаты в 60-х годах в связи с освоением космоса и развитием астрофизики и физики планет. В теории переноса излучения в неплоских средах конечного объема значительное место занимают задачи для систем с осевой симметрией. Эти задачи, решение которых при достигнутом уровне развития ЭВМ вполне реально, представляют собой модели, достаточно хорошо отражающие основные черты или механизмы физического процесса в ряде проблем. Сферические модели с осевой симметрией интересны в связи со следующими задачами.

1. Исследование поля излучения в атмосфере сферической планеты, находящейся в параллельном потоке внешнего (например, солнечного) излучения. Эта задача имеет различные приложения к техническим проблемам. В то же время это классическая задача астрофизики и атмосферной оптики.

2. Определение поля излучения, создаваемого точечным источником в неоднородном сферическом слое, – это не только прикладная, но и классическая задача теории переноса, связанная с расчетом функции влияния (функции Грина) краевой задачи для кинетического уравнения.

3. Исследование отражающих свойств шара, на который падает параллельный или диффузный внешний поток излучения. Такой шар может соответствовать модели отдельного кучевого облака или оптически плотной частицы мутной среды.

4. Исследование поля излучения внутри сферической полости, окруженной сферическим слоем вещества, на который падает внешний поток радиации. Эта задача из теории защиты КА от излучения.

Введение осевой симметрии является некоторым модельным элементом, который, с одной стороны, мало искажает физический процесс, с другой стороны, – ограничение техническое (из-за большой размерности задачи), а не принципиальное (для сокращения объема вычислений). Например, в рамках такой модели можно изучать чисто сферические эффекты, связанные с наблюдениями в полярных областях, на терминаторе, в сумерках, вблизи лимба и горизонта Земли, радиационного переноса по широте, фазовой кривой яркости Земли (полный или неполный диск яркости – фазы, подобные наблюдаемым на Луне), светимости звезд на ярком фоне земной атмосферы, в том числе по лимбовым направлениям, когда наблюдение осуществляется с космической орбиты и линия, соединяющая точки нахождения звезды и наблюдателя, проходит выше диска Земли через ее атмосферу. Вместо звезды – пассивного источника – могут использоваться активные источники (типа лазерного луча) в актуальнейших на сегодня проектах томографии атмосферы Земли.

Нас интересует проблема расчета поля яркости САЗ в глобальном масштабе – в масштабе всей планеты одновременно. Если наблюдатель находится выше фиксированной верхней границы атмосферы (например, на космической орбите), то решение в точке наблюдения получаем путем переноса значений яркости, определенных для верхней границы оболочки, без ослабления с учетом геометрии задачи. Сложность геометрии задачи в значительной степени обусловлена наличием обширной области тени, создаваемой диском Земли, т.е. приходится иметь дело со сферической оболочкой, в которой есть область с отражающей вогнутой верхней и «вакуумной» выпуклой нижней поверхностями, а также прозрачной боковой цилиндрической поверхностью.

Первые сферические модели исследовались В.В. Соболевым и И.Н. Мининым [3–9] преимущественно в приближении однократного рассеяния, при этом многократное рассеяние учитывалось частично в диффузионном приближении для плоского слоя. Этот подход, называемый методом В.В. Соболева, получил значительное развитие в работах О.И. Смоктия [10–14] и Л.Г. Титарчука [15, 16]. Однократное приближение использовал О.А. Авасте [17–19]. Фундаментальный вклад в решение сферических задач внесли Г.И. Марчук, Г.А. Михайлов, М.А. Назаралиев, Р.А. Дарбинян, В.С. Антюфеев: они заложили основы метода Монте-Карло в атмосферной оптике [20–31]. Одновременно Т.А. Сушкевич разрабатывался детерминированный подход к моделированию глобального поля излучения Земли [1, 2, 32–36]. Проводился сравнительный анализ методов [37–40], которые использовались для интерпретации первых космических данных [10–12, 19–21, 32–36], в частности спектрофотометрических измерений горизонта и фона Земли, а также съемок «космических зорь».

Предыдущий опыт работ со сферическими САЗ убедительно показал, что наш базовый метод – итерационный метод характеристик (ИМХ) – совокупность метода интегрирования уравнения переноса по характеристикам и метода последовательных приближений по кратности рассеяния с процедурами ускорения сходимости итераций – оптимально реализуется посредством алгоритмов распараллеливания вычислений [41–48].

Для двумерной сферической системы с осевой симметрией впервые алгоритмы метода характеристик (без интерполяции и с интерполяцией) разработаны Т.А. Сушкевич [1]. Частные случаи (при значительных ограничениях на структуру рассеивающей и поглощающей среды, а также условий освещения и наблюдения) интегрирования уравнения переноса в приближении однократного рассеяния содержатся в работах О.А. Авасте и О.И. Смоктия. Позже и в настоящее время практически во всех реализациях решения сферической задачи методом Монте-Карло приближение однократного рассеяния рассчитывается методом интегрирования по характеристикам, которые совпадают с траекториями световых лучей.

Попытки решения сферической задачи за рубежом (США) были предприняты Секерой и Ленобль [49], которые предложили использовать метод последовательных приближений, соответствующих разложению решения по малому параметру, взяв в качестве первого приближения решение плоской задачи, а в качестве малого параметра – отношение эффективной высоты однородной атмосферы к радиусу Земли. Большинство работ за рубежом выполняется методом Монте-Карло или приближенными методами [42, 49].

Математическая постановка задачи

Рассмотрим задачу переноса излучения в земной атмосфере в приближении сферической оболочки, на которую падает внешний параллельный поток. Выберем направление оси OZ, проходящей через центр Земли, противоположным внешнему потоку. Система «атмосфера–Земля» рассматривается как двумерная: радиус-вектор $\mathbf{r}$ любой точки $A(\mathbf{r})$ определяется расстоянием $r = |\,\mathbf{r}\,|$ от центра Земли и полярным углом ψ, отсчитываемым от оси симметрии системы OZ; $y = \cos\psi$. Направление распространения светового луча $\mathbf{s}$ в точке $A(\mathbf{r})$ описываем локальной сферической системой координат: зенитным углом ϑ, отсчитываемым от $\mathbf{r}$, и азимутом φ в касательной плоскости, проведенной в точке $A(\mathbf{r})$ к сфере радиуса r. Совокупность всех точек $A(\mathbf{r})$ сферической оболочки образует открытую область G с нижней G_H и верхней G_b границами – сферическими поверхностями с радиусами R_H и R_b. Векторное поле всех направлений световых лучей $\mathbf{s}(A)$ в каждой точке $A(\mathbf{r})$ образует множество $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$ – единичную сферу, где Ω^+ и Ω^- – полусферы направлений $\mathbf{s}$ с $\mu^+ \in [0, 1]$ и $\mu^- \in [-1, 0]$; $\mu = \cos\vartheta$. Вводим множества $b \equiv G_H \times \Omega^+$, $t \equiv G_b \times \Omega^-$.

Задача состоит в определении интенсивности ослабленного прямого излучения источников и стационарного поля интенсивности однократно и многократно рассеянного излучения в рассеивающей, поглощающей и излучающей сферической оболочке G с границами G_H и G_b или за пределами G. Полную интенсивность излучения $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{s})$ в точке $A(\mathbf{r})$ в направлении $\mathbf{s}$ находим как решение общей краевой задачи теории переноса (ОКЗ) [1, 2, 41, 43]:

$$\hat{K}\Phi = F^{in}, \quad \Phi\big|_t = F^t, \quad \Phi\big|_b = \varepsilon\hat{R}\Phi + F^b \tag{1}$$

в фазовой области $\Gamma \equiv G \times \Omega + G_b \times \Omega^- + G_H \times \Omega^+$ с линейными операторами: оператор переноса

$$\hat{D} = \frac{\partial}{\partial s} + \sigma_{tot}(\mathbf{r}), \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial s}\right|_{\mathbf{r}} = \cos\vartheta \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\sin\vartheta}{r}\left[\cos\varphi \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} - \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} - \operatorname{ctg}\psi \sin\varphi \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\right];$$

интеграл столкновений – функция источника

$$B(\mathbf{r}, \mathbf{s}) \equiv \hat{S}\Phi = \sigma_{sc}(\mathbf{r}) \int\limits_{\Omega} \gamma(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{s}')\, \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{s}')\, d\mathbf{s}', \quad d\mathbf{s}' = d\mu'\, d\varphi'; \tag{3}$$

интегродифференциальный оператор $\hat{K} \equiv \hat{D} - \hat{S}$; оператор отражения

$$[\hat{R}\Phi](\mathbf{r}_H, \mathbf{s}) = \int\limits_{\Omega^-} q(\mathbf{r}_H, \mathbf{s}, \mathbf{s}^-)\Phi(\mathbf{r}_H, \mathbf{s}^-)\, d\mathbf{s}^-, \qquad \in \Omega^+;$$

$\sigma_{tot}(\mathbf{r})$ и $\sigma_{sc}(\mathbf{r})$ – пространственные распределения полного сечения взаимодействия излучения с веществом и сечения рассеяния. Функция F^{in} – плотность источников излучения, расположенных внутри области G; F^b и F^t – источники излучения на границах сферической оболочки, определенные для лучей $\mathbf{s}$, направленных внутрь области G; параметр $0 \le \varepsilon \le 1$ фиксирует акт взаимодействия с границей.

Краевая задача (1) рассматривается при естественных, вытекающих из физики исследуемого процесса, ограничениях на коэффициенты, источники и граничные условия:

а) $\sigma_{tot}(\mathbf{r})$ и $\sigma_{sc}(\mathbf{r})$ – ограниченные, кусочно-непрерывные и кусочно-дифференцируемые функции;

б) $\gamma(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{s}')$ – непрерывная функция угла рассеяния $\chi = \arccos(\mathbf{s}\cdot\mathbf{s}')$, имеющая кусочно-непрерывные производные по каждой переменной;

в) операторы $\hat{S}$ и $\hat{R}$ – равномерно ограниченные: $0 \le \hat{S}(1), \hat{R}(1) \le 1$;

г) среды внутри G, на G_H и G_b – немультиплицирующие (без размножения);

д) $F^{in}(\mathbf{r}, \mathbf{s})$, $F^t(\mathbf{r}_b, \mathbf{s}^-)$, $F^b(\mathbf{r}_H, \mathbf{s}^+)$ – ограниченные, кусочно-непрерывные или финитные функции.

Отметим, что все изложение ведется для области G – сферической оболочки. Задача для полной сферы (например, в случае сферического облака) сводится к задаче со сферическим слоем путем постановки граничных условий с отражением на границе G_H, имеющей сколь угодно малый радиус RH. Эти условия описывают прохождение излучения через внутреннюю сферу, ограниченную GH. Если внутри полость, то на GH ставится условие «прострела». Если внутренняя сфера является рассеивающей или поглощающей средой, то на GH вводится «условие отражения», учитывающее ослабление излучения внутри малой сферы. Такие средства расширяют прикладные возможности рассматриваемой модели переноса радиации, в частности, они позволяют включить ряд задач астрофизики и физики планет.

Построение решения ОКЗ (1) основано на результатах анализа свойств функций Φ и B (их непрерывности, дифференцируемости, локальных свойств). Непрерывность и дифференцируемость функции источника B по угловым переменным в значительной степени определяется свойствами индикатрисы рассеяния. Из-за зависимости индикатрисы рассеяния от скалярного произведения $\mathbf{s}\cdot\mathbf{s}'$, а не от каждого направления отдельно, B является локально по $\mathbf{s}$ гладкой функцией (при гладкости Φ в среднем). Степень гладкости B по пространственным переменным та же, что и у функций σ_{sc}, γ, Φ. Разрывы B возможны лишь на тех поверхностях, на которых терпят разрыв функции $\sigma_{tot}(\mathbf{r})$ и $\sigma_{sc}(\mathbf{r})$. Вдоль траекторий характеристик функция $\hat{D}^{-1}B$ более гладкая, чем Φ. Пространственные производные B имеют логарифмические особенности в окрестностях точек $\mathbf{r} \in G$ на поверхностях разрыва коэффициентов $\sigma_{tot}(\mathbf{r})$ и $\sigma_{sc}(\mathbf{r})$ [50].

Метод характеристик

Решение краевой задачи для стационарного уравнения переноса осуществляется методом последовательных приближений – простыми итерациями по столкновениям разной кратности или модифицированными итерациями с включением ускоряющих процедур.

Обращение дифференциального оператора уравнения переноса (2) осуществляем интегрированием по характеристикам на каждой итерации при расчете приближений любого порядка. Принципиально важным для широкого распространения метода характеристик является включение интерполяции [51] и использование аддитивных свойств экспонент в схеме расщепления вычислений по отрезкам вдоль характеристик. Фиксируем направление $\mathbf{s} \in \Omega$. Проведем через точку $A(\mathbf{r}(0))$ в этом направлении прямую так, что уравнение прямой можно записать в виде

$$\mathbf{r}(\xi) = \mathbf{r}(0) - \xi\mathbf{s}, \quad -\infty < \xi < \infty, \tag{4}$$

где $D(\mathbf{r}(\xi))$ – текущая точка на прямой; $A(\mathbf{r}(0))$ – фиксированная точка на прямой, от которой отсчитывается сдвиг $\xi = |AD|$ вдоль прямой. С помощью таких прямых можно взаимно однозначно преобразовать точки области G в точки (A, ξ). Это преобразование переводит функции, измеримые в $G \times \Omega$, в функции, измеримые на Ω вдоль прямых с направлениями $\mathbf{s}$. Прямые линии (4) – пути, по которым движутся фотоны, – являются характеристиками линейного дифференциального оператора (2) [1, 2, 44–47]. Уравнение переноса (2), записанное в адекватной форме:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \sigma_{tot}(\mathbf{r} - \xi\mathbf{s})\, \Phi(\mathbf{r} - \xi\mathbf{s}, \mathbf{s}) = E(\mathbf{r} - \xi\mathbf{s}, \mathbf{s}), \tag{5}$$

при известной правой части разрешается явно интегрированием по характеристике:

$$\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = \Phi(\mathbf{r} - \xi\mathbf{s}, \mathbf{s}) \exp\left[-\int\limits_0^{\xi} \sigma_{tot}(\mathbf{r} - \xi'\mathbf{s})\, d\xi'\right] +$$

$$+ \int\limits_0^{\xi} E(\mathbf{r} - \xi'\mathbf{s}, \mathbf{s}) \exp\left[-\int\limits_0^{\xi'} \sigma_{tot}(\mathbf{r} - \xi''\mathbf{s})\, d\xi''\right] d\xi'. \tag{6}$$

Если задача (5) с ненулевыми граничными источниками f, то ее можно свести к задаче с нулевыми граничными условиями путем преобразования вида

$$\Phi^0(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = f(\mathbf{r} - \xi\mathbf{s}) \exp\left[-\int\limits_0^{\xi} \sigma_{tot}(\mathbf{r} - \xi'\mathbf{s})\, d\xi'\right] \tag{7}$$

и представления решения в виде суммы $\Phi = \Phi^0 + \Phi_d$. Функция Φ^0 отвечает прямому излучению от источника и будет иметь те же свойства, что и f, но несколько сглаженные благодаря экспоненциальному множителю в (7). Для функции Φ_d, соответствующей многократно рассеянной, диффузной компоненте, получается задача со свободным членом в уравнении $F_1 = F^{in} + \hat{S}\Phi^0$. Выделим рассеяние первой кратности $\Phi_1 = \hat{D}^{-1} F_1$, т.е. представим суммарное поле в виде суперпозиции $\Phi_d = \Phi_1 + \Phi_{d-1}$. В уравнении для Φ_{d-1} свободный член будет иметь вид $F_{d-1} = \hat{S}\,\hat{D}^{-1} F_1$ и в результате интегрирования вдоль луча **s** (действие оператора $\hat{D}^{-1}$) и по всем направлениям единичной сферы Ω (действие оператора $\hat{S}$) оказывается сглаженным (по сравнению с F^{in}) и по пространственным и по угловым переменным. Разрывы в функции F_1 по угловым переменным приводят к разрывам F_{d-1} по **r**. Но с увеличением номера кратности рассеяния эти разрывы сглаживаются. Однако разрывы по **r** в коэффициентах σ_{tot}, σ_{sc}, γ проявляются в Φ и B на всех итерациях. При разработке численного алгоритма уделяется специальное внимание локальным свойствам решения, что позволяет повысить точность решения и описания поведения решения в окрестностях особых точек.

Из формулы (6) интегрирования по характеристике следует, что дифференциальные свойства Φ определяются соответствующими свойствами функций B, σ_{tot}, F в пределах G и гладкостью границ, которая характеризуется дифференциальными свойствами $\xi(\mathbf{r}, \mathbf{s})$. Пространственные и угловые производные функции Φ существуют и ограничены. В окрестности касательных направлений **s*** (к линиям или поверхностям разрыва коэффициентов σ_{tot} и σ_{sc}) производные имеют особенности вида [1]:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r} \sim \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{r}-\mathbf{r}^*|}}, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial s} \sim \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{s}-\mathbf{s}^*|}}.$$

Функция Φ является абсолютно непрерывной вдоль лучей **s** и на множестве точек **r**, **s**, отличных от **r***, **s***, удовлетворяет условиям непрерывности по Гельдеру:

$$|\Phi(\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r}, \mathbf{s}+\Delta\mathbf{s}) - \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{s})| \sim A|\Delta\mathbf{r}|^{1/2}\;|\Delta\mathbf{s}|^{1/2}.$$

Свойства гладкости учитываются при интерполяции в алгоритме интегрирования по характеристикам.

Интегрирование по характеристике без интерполяции

Интегрирование уравнения переноса по характеристике без интерполяции проводится по всей длине траектории луча **s** от расчетной точки $A(\mathbf{r})$ до точки входа луча **s** в область G через верхнюю G_b или нижнюю G_H границы по формуле (6), где $\Phi(\mathbf{r}-\xi\mathbf{s}, \mathbf{s}) = f(\mathbf{r}-\xi\mathbf{s}, \mathbf{s})$ и E – источники на границе и внутри слоя. Реализация расчета Φ по формуле (6) при известных функциях E и f осуществляется по следующему алгоритму.

1. Определение границы (G_H или G_b), которую пересекает луч **s**, входя в слой G, и расстояния ξ от точки $A(\mathbf{r})$ до точки $Q(\mathbf{r}-\xi\mathbf{s})$ пересечения траекторией луча **s** этой границы.

2. Нахождение координат точки Q с радиусом-вектором $\mathbf{r}(\xi) = \mathbf{r} - \xi\mathbf{s} = (r_\xi, \psi_\xi)$ и углов $(\vartheta_\xi, \varphi_\xi)$, описывающих направление луча **s** в местной системе координат точки Q; вычисление $f(\mathbf{r}-\xi\mathbf{s}, \mathbf{s}) = f(r_\xi, \psi_\xi, \vartheta_\xi, \varphi_\xi)$ из соответствующих граничных условий.

3. Определение координат точки D с радиусом-вектором $\mathbf{r}(\xi') = \mathbf{r} - \xi'\mathbf{s} = (r', \psi')$ на расстоянии ξ' от точки A и углов ϑ', φ', описывающих направление **s** в местной системе координат точки D.

4. Нахождение значений коэффициентов $\sigma_{tot}(\mathbf{r}-\xi'\mathbf{s})$ в точке $D(r', \psi')$ и расчет интенсивности источников $E(\mathbf{r}-\xi'\mathbf{s}, \mathbf{s}) = f(r', \psi', \vartheta', \varphi')$ в точке $D(r', \psi')$ в направлении $\mathbf{s}' = (\vartheta', \varphi')$ с координатами (ϑ', φ') направления **s** в местной системе координат с центром в точке D.

5. Вычисление интегралов по квадратурным формулам с адаптивным выбором шага интегрирования Δ_ξ, учитывающим структуру коэффициентов $\sigma_{tot}(\mathbf{r})$, источника $E(\mathbf{r}, \mathbf{s})$, положение расчетной точки $A(\mathbf{r})$, направление луча **s**, масштаб длины ξ отрезка траектории луча **s**.

6. Расчет $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{s})$ по формуле (6).

Такой алгоритм позволяет выбирать направления траекторий лучей **s** независимо друг от друга, а пространственную разностную сеть – произвольно. Приближение однократного рассеяния для сферических моделей является основополагающим, поскольку помимо составляющей поля яркости, в которой отражаются все особенности задачи, именно это приближение используется в решении обратных задач. Расчет приближения однократного рассеяния осуществляем методом характеристик без интерполяции. Такой подход требует увеличенных затрат времени вычислений, однако возможность включения в алгоритм любых источников и сколь угодно сложных сред, несомненно, является его важным достоинством. А указанный недостаток в алгоритме с распараллеливанием вычислений существенно компенсируется.

Интегрирование по характеристике с интерполяцией

Интегрирование уравнения переноса по характеристике с интерполяцией используется для расчета полного набора значений сеточных функций $\Phi(\mathbf{r}_m, \mathbf{s}_n)$ при известных сеточных функциях $E(\mathbf{r}_m, \mathbf{s}_n)$. В этом случае в областях G и Ω по всем переменным вводится разностная сеть. Радиусы r_k и полярные углы ψ_l образуют пространственную разностную сеть: $\mathbf{r}_m = (r_k, \psi_l)$. Совокупность расчетных направлений луча $\mathbf{s}_n$ в каждой точке слоя $\mathbf{r}_m$ определяется парой углов: $\mathbf{s}_n = (\vartheta_i, \varphi_j)$. Определение интенсивности излучения $\Phi(\mathbf{r}_m, \mathbf{s}_n)$ в точке $A(\mathbf{r}_m)$ в направлении $\mathbf{s}_n$ проводится интегрированием уравнения

$$\frac{\partial\Phi}{\partial s_n} + \sigma_{tot}(\mathbf{r}_m)\,\Phi(\mathbf{r}_m, \mathbf{s}_n) = E(\mathbf{r}_m, \mathbf{s}_n)$$

по характеристике – лучу $\mathbf{s}_n$:

$$\Phi(\mathbf{r}_m, \mathbf{s}_n) = \Phi(\mathbf{r}', \mathbf{s}_n')\exp\left[-\int_0^\xi \sigma_{tot}(\mathbf{r}_m - \xi'\mathbf{s}_n)\,d\xi'\right] +$$

$$+\int_0^\xi E(\mathbf{r}_m - \xi'\mathbf{s}_n, \mathbf{s}_n)\exp\left[-\int_0^{\xi'} \sigma_{tot}(\mathbf{r}_m - \xi''\mathbf{s}_n)\,d\xi''\right]d\xi'.$$

Сдвиг $\xi = |\mathbf{r}_m - \mathbf{r}'|$ вдоль луча $\mathbf{s}_n$ берется в пределах границ расчетной пространственной ячейки, представляющей собой кольцо, ограниченное двумя коническими (y_1, y_2) и двумя сферическими (r_1, r_2) поясами. Луч может войти в ячейку либо через границы r_2 или r_1, либо через границы y_2 или y_1. Обозначим в этой точке координаты через (r', ψ'), а направление $\mathbf{s}$ – через (ϑ', φ'). Для вычисления интеграла на участке характеристики $[0, \xi]$ для функции $E(\mathbf{r}, \mathbf{s})$ вводится интерполяция по ξ между значениями в узлах $E(r_1, \psi_1, \vartheta_1, \varphi_1)$ и $E(r', \psi', \vartheta', \varphi')$. Значения $\Phi(r', \psi', \vartheta', \varphi')$ и $E(r', \psi', \vartheta', \varphi')$ при аргументах $r', \psi', \vartheta', \varphi'$, отличных от узлов разностной сетки, вычисляются с помощью интерполяции между соседними узлами разностной сети [1, 2].

Реализация алгоритма интегрирования по характеристикам требует детальной проработки уравнений характеристик с тем, чтобы осуществлялась такая последовательность перебора аргументов $r_k, \psi_l, \vartheta_i, \varphi_j$, которая обеспечивает неперемешивание итераций при получении значений $\Phi(r_k, \psi_l, \vartheta_i, \varphi_j)$. Кроме того, необходимо уметь определять значения всех четырех переменных $r, \psi, \vartheta, \varphi$ в любой точке траектории луча $\mathbf{s}$ по заданным значениям $r_1, \psi_1, \vartheta_1, \varphi_1$. С помощью геометрических построений это сделать невозможно. Универсальным оказывается подход, основанный на анализе аналитического уравнения траектории луча в пространстве переменных r и y с учетом первых интегралов дифференциального оператора переноса в частных производных [1, 2, 44–47].

Расчет одного луча $\mathbf{s}_n = (\vartheta_i, \varphi_j)$ в точке $\mathbf{r}_m = (r_k, \psi_l)$ сводится к следующему алгоритму.

1. Определение точки входа луча $\mathbf{s}_n$ в расчетную ячейку по заданным значениям $r_k, \psi_l, \vartheta_i, \varphi_j$ и ее координат $r', \psi', \vartheta', \varphi'$.

2. Вычисление $\Phi(r', \psi', \vartheta', \varphi')$ и $E(r', \psi', \vartheta', \varphi')$ по формулам интерполяции между значениями в узлах разностной сети.

3. Расчет интегралов методом квадратур с адаптивным шагом Δ_ξ, учитывающим, в частности, структуры задания коэффициентов $\sigma_{tot}(r, \psi)$.

Ухудшение точности квадратурных формул для расчета сеточных значений функции источника $B(\mathbf{r}_m, \mathbf{s}_n)$ наблюдается при сильной анизотропии рассеяния. Такой эффект может привести к расходимости итераций из-за превышения единичной нормы оператора $\hat{S}$ (3). В таких ситуациях используется прием с выделением сильно вытянутой части индикатрисы с виде δ-функции [43] и предлагается последовательность вычислений, отличная от простых итераций. Для учета селективного поглощения в расчете многократного рассеяния разработан метод подгрупп с экспоненциальной аппроксимацией функции пропускания [35].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 97-01-00995).

1. *Сушкевич Т.А.* Осесимметричная задача о распространении излучения в сферической системе // Отчет №О-572-66. М.: ИПМ АН СССР, 1966. 180 с.
2. *Сушкевич Т.А.* Об одном методе решения уравнения переноса для задач с двумерной сферической геометрией. М., 1972. 32 с. (Препринт / ИПМ АН СССР). Деп. в ВИНИТИ 28.02.73. № 5557-73.
3. *Соболев В.В., Минин И.Н.* // Искусственные спутники Земли. Вып. 14. М.: Изд-во АН СССР, 1962. С. 7–12.
4. *Соболев В.В., Минин И.Н.* // Астрономический журнал. 1963. Т. 40. № 3. С. 496–503.
5. *Минин И.Н., Соболев В.В.* // Космические исследования. 1963. Т. 1. № 2. С. 227–234.
6. *Минин И.Н., Соболев В.В.* // Там же. 1964. Т. 2. № 4. С. 610–618.
7. *Минин И.Н.* Теория рассеяния света в связи с некоторыми астрофизическими применениями: Дис. ... докт. физ.-мат. наук. Л., 1966. 255 с.
8. *Соболев В.В.* Рассеяние света в атмосферах планет. М.: Наука, 1972. 335 с.
9. *Минин И.Н.* Теория переноса излучения в атмосферах планет. М.: Наука, 1988. 264 с.
10. *Смоктий О.И.* // Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1967. Т. 3. № 3. С. 245–257.
11. *Смоктий О.И.* // Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1967. Т. 3. № 4. С. 384–393.
12. *Смоктий О.И.* // Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1967. Т. 3. № 5. С. 496–506.
13. *Смоктий О.И.* Многократное рассеяние света в сферической планетной атмосфере: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Л., 1967. 135 с.
14. *Смоктий О.И.* Моделирование полей излучения в задачах космической спектрофотометрии. Л.: Наука, 1986. 349 с.
15. *Титарчук Л.Г.* Рассеяние света в сферической многослойной атмосфере. М., 1971. 30 с. (Препринт/ ИКИ АН СССР, № 53). Деп. ВИНИТИ 29.03.71 Астр. 2762.71.
16. *Титарчук Л.Г.* Рассеяние солнечного излучения в многослойной сферической планетной атмосфере: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1972. 140 с.
17. *Авасте О.А.* // Труды ГГО. 1964. Вып. 166. С. 144–151.
18. *Авасте О.А.* // Там же. С. 152–172.
19. *Кондратьев К.Я., Авасте О.А., Федоров М.П.* и др. Поле излучения Земли как планеты. Л.: Гидрометеоиздат, 1967. 314 с.
20. *Марчук Г.И., Михайлов Г.А.* // Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1967. Т. 3. № 3. С. 258–273.
21. *Марчук Г.И., Михайлов Г.А.* // Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1967. Т. 3. № 4. С. 394–401.
22. *Марчук Г.И., Михайлов Г.А., Назаралиев М.А. и др.* Решение прямых и некоторых обратных задач атмосферной оптики методом Монте-Карло. Новосибирск: Наука, 1968. 100 с.
23. *Михайлов Г.А.* Статистическое моделирование процессов переноса излучения в атмосфере: Дис. ... докт. физ.-мат. наук. Новосибирск, 1971. 265 с.
24. *Назаралиев М.А.* Использование метода Монте-Карло для расчетов интенсивности и поляризации света в сферической атмосфере: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, 1973. 138 с.
25. *Антюфеев В.С.* Решение некоторых стохастических задач атмосферной оптики методом Монте-Карло: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, 1977. 105 с.
26. *Дарбинян Р.А.* Статистическое моделирование радиационных измерений в сферической атмосфере. М.: ИВМ РАН, 1997. 21 с. Деп. ВИНИТИ № 2982-В97.
27. *Марчук Г.И., Михайлов Г.А., Назаралиев М.А.* и др. Метод Монте-Карло в атмосферной оптике. Новосибирск: Наука, 1976. 215 с.
28. *Назаралиев М.А.* Численное исследование радиационных полей в атмосфере методом Монте-Карло: Дис. ... докт. физ.-мат. наук. Новосибирск, 1985. 280 с.
29. *Назаралиев М.А.* Статистическое моделирование радиационных процессов в атмосфере. Новосибирск: Наука, 1990. 227 с
30. *Антюфеев В.С.* Решение обратных задач переноса излучения методом Монте-Карло: Дис. ... докт. физ.-мат. наук. Новосибирск, 1997. 235 с.
31. *Дарбинян Р.А.* // Исследование Земли из космоса. 1998. № 3. С 18–30.
32. *Гермогенова Т.А., Копрова Л.И., Сушкевич Т.А.* // Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1969. Т. 5. № 12. С. 1266–1277.
33. *Сандомирский А.Б., Сушкевич Т.А., Розенберг Г.В. и др.* // Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1971. Т. 7. № 3. С. 279–290.
34. *Сандомирский А.Б., Розенберг Г.В., Сушкевич Т.А. и др.* // Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1971. Т. 7. № 6. С 590–598.
35. *Сушкевич Т.А.* Исследование поля яркости сферической атмосферы: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1972. 191 с.
36. *Розенберг Г.В., Сандомирский А.Б., Сушкевич Т.А. и др.* // Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1980. Т. 16. № 8. С. 861–864.
37. *Авасте О.А., Дарбинян Р.А.* // Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1975. Т. 11. № 10. С. 1030–1037.

38. *Кондратьев К.Я., Марчук Г.И., Михайлов Г.А. и др.* Поле излучения сферической атмосферы. Л.: Изд-во ЛГУ, 1977. 214 с.
39. *Назаралиев М.А., Сушкевич Т.А.* // Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1975. Т. 11. № 7. С. 705–717.
40. *Сушкевич Т.А., Коновалов Н.В.* // Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1978. Т. 14. № 1. С. 44–57.
41. *Сушкевич Т.А.* Об уравнении переноса в сферической геометрии с пространственной неоднородностью и рефракцией // Численное решение задач атмосферной оптики. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР, 1984. С. 138–151.
42. *Сушкевич Т.А., Владимирова Е.В., Игнатьева Е.И. и др.* Сферическая модель переноса излучения в земной атмосфере – I. Обзор. М., 1997. 32 с. (Препринт / ИПМ РАН, № 84).
43. *Сушкевич Т.А., Владимирова Е.В., Игнатьева Е.И. и др.* Сферическая модель переноса излучения в атмосфере Земли – III. Постановка задачи. Метод решения. М., 1997. 32 с. (Препринт / ИПМ РАН, № 85).
44. *Сушкевич Т.А. Владимирова Е.В.* Сферическая модель переноса излучения в атмосфере Земли – II. Криволинейная система координат. Характеристики уравнения переноса. М., 1997. 28 с. (Препринт / ИПМ РАН, № 73).
45. *Сушкевич Т.А., Максакова С.В.* Осесимметричная задача распространения излучения в сферическом слое – I. Характеристики уравнения переноса. М., 1997. 32 с. (Препринт / ИПМ РАН, № 65).
46. *Сушкевич Т.А., Максакова С.В.* Осесимметричная задача распространения излучения в сферическом слое – II. Алгоритм вычисления криволинейных координат на траекториях характеристик. М., 1998. 32 с. (Препринт / ИПМ РАН, № 1).
47. *Сушкевич Т.А., Владимирова Е.* Осесимметричная задача распространения излучения в сферическом слое – III. Алгоритм расчета оптичсекой толщины и функции пропускания отрезка траектории светового луча в неоднородной земной атмосфере. М., 1997. 24 с. (Препринт / ИПМ РАН, № 74).
48. *Sushkevich T.A., Vladimirova E.V.* Net-characteristic method for numerical solution of axisymmetric problem of radiation transfer in sphericall shell // Proceed. of Intern. conf. «Finite-difference methods: theory and application» (CFDM98). V. 3. Минск: Ин-т. математики НАН Беларуси, 1998. P. 94–98.
49. *Перенос* радиации в рассеивающих и поглощающих атмосферах. Стандартные методы расчета / Под ред. Ж. Ленобль. Л.: Гидрометеоиздат, 1990. 263 с.
50. *Гермогенова Т.А.* Локальные свойства решений уравнения переноса. М.: Наука, 1986. 272 с.
51. *Магомедов К.М., Холодов А.С.* Сеточно-характеристические численные методы. М.: Наука, 1988. 288 с.

T.A. Sushkevich. **On Modelling of the Sunlight Radiation Transfer in Atmosphere Earth Spherical Shell and Clouds.**

The radiative transfer in spherical shell is considered. The numerical solution of radiative transfer boundary-value problem is performed by the method of succesive orders with integration over the characteristics of the partial differential operator.