

Н.Д. МакКормик, Р. Санчес, Х.С. Йи

ОЦЕНКА ОПТИЧЕСКОЙ ТОЛЩИНЫ ОБЛАКОВ ИЗ НАЗЕМНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Представлены два метода для оценки неизвестной оптической толщины однородной облачной атмосферы по измерениям интенсивности нисходящего излучения или освещенности на уровне Земли. В итерационном методе используется аналитически рассчитанная первая производная неизвестной, полученной F_N -методом теории переноса. Приведены выборочные результаты анализа чувствительности итерационной схемы. Приведен также неитерационный метод, основанный на двух аналитических решениях уравнения переноса излучения, полученных с помощью алгоритма, основанного на асимптотической теории переноса, и алгоритма, использующего транспортное приближение.

Введение

Одним из источников наиболее существенных ошибок в моделях, используемых для анализа глобального потепления, является влияние облаков. Основной вклад в эти ошибки обусловлен поглощением лучистой энергии в облаках, которое напрямую является функцией полной эффективной толщины облачного слоя. Поэтому если оптическая толщина облаков может быть оценена из радиационных измерений, то влияние источника этой ошибки может быть ослаблено. Мы рассмотрим только случай однородного, анизотропно рассеивающего облачного слоя без источников излучения с известным альбедо однократного рассеяния и известной индикатрисой рассеяния.

В 1987 г. Кинг предложил алгоритм, использующий интенсивность обратно рассеянного излучения, измеренную одним приемником над оптически плотным облачным слоем для оценки его оптической толщины в предположении известного альбедо поверхности Земли [1]. Данный алгоритм получен с применением приближенного (т.е. асимптотического) прямого решения теории переноса излучения. В 1990 г. для этой же цели был предложен алгоритм [2], основанный на измерении потока рассеянного назад излучения (т.е. по измерениям проинтегрированного по углам парциального потока, проходящего через плоский коллектор). Отдельно были разработаны алгоритмы для случаев расположения детектора над, под и внутри облака.

В отличие от таких явных методов обращения, которые не требуют итерационных вычислений переноса для воспроизведения измеряемых величин, можно попробовать комбинировать, в итерационной манере, решения прямых задач переноса с измерениями для получения одновременных оценок оптической толщины облаков и альбедо подстилающей поверхности [3].

В данной статье мы подводим итог части работ, выполненных в Университете штата Вашингтон [2, 3] по таким обратным задачам теории радиационного переноса, и основное внимание уделяем оценке лишь одного параметра, а именно оптической толщины облаков, находящихся над поверхностью с известным альбедо. При этом мы будем предполагать, что на уровне Земли измеряется либо интенсивность нисходящего излучения, либо освещенность. Эта часть работ, представленных в [2, 3], выбрана исходя из того, что вероятнее всего именно она будет наиболее широко использоваться в программе наземного контроля атмосферной радиации.

Во втором разделе статьи вводятся физическая модель и основы итерационной стратегии для решения данной обратной задачи. В третьем разделе приведены два алгоритма осуществления итерационной процедуры. С помощью этих алгоритмов можно получить неплохие начальные оценки оптической толщины облаков без привлечения вычислений радиационного переноса. В четвертом разделе приводим численный анализ чувствительности, осуществленный на модельном облаке. В пятом разделе приводятся некоторые выводы относительно использования процедуры обращения такого рода.

2. Итерационный метод обращения

Пусть $I(\tau, \mu; x)$ есть зависящая от времени интенсивность в положении τ , проинтегрированная по азимутальному углу ϕ :

$$I(\tau, \mu; x) = \int_0^{2\pi} I(\tau, \mu, \phi; x) d\phi.$$

Освещенная поверхность облака расположена при $\tau = 0$, и его толщина τ , равная x , в оптическом смысле есть длина свободного пробега; μ есть косинус полярного угла, отсчитываемого относительно оси τ . Будем считать, что между нижней кромкой облака и уровнем, где осуществляются измерения, находится вакуум, так что альbedo поверхности, по сути, то же, каким оно было бы, если бы поверхность находилась на уровне нижней кромки облака. Можно, конечно, рассмотреть и другие Фурье-моменты уравнения радиационного переноса по азимутальному углу, но таковые моменты интенсивности I трудней измерять, да к тому же они не приводят к упрощениям алгоритма. Использование зависимости радиации от длины волны дало бы дополнительную переменную, которой можно было бы воспользоваться в алгоритме обращения, но мы рассмотрим только одну длину волны, которую явно не обозначаем.

Интегрирование по азимуту дает симметричное по азимуту уравнение переноса излучения для интенсивности, которую можно записать как [4]

$$(\mu \partial_\tau + 1) I(\tau, \mu; x) = \frac{\omega}{2} \sum_{\ell=0}^L (2\ell + 1) f_\ell P_\ell(\mu) \int_{-1}^1 P_\ell(\mu') I(\tau, \mu'; x) d\mu', \quad 0 \leq \tau \leq x, \quad (1)$$

где $\omega < 1$ есть альbedo однократного рассеяния, а индикатриса рассеяния разложена в ряд по $(L + 1)$ полиномам Лежандра с коэффициентами разложения f_ℓ , ℓ изменяет значения от 0 до L и $f_0 = 1$. Величина ω и все коэффициенты f_ℓ предполагаются заранее известными. Наиболее важным из коэффициентов старших порядков является асимметрия рассеяния $f_1 \equiv g$.

Интенсивность мононаправленного излучения, падающего на облако сверху, можно записать как

$$I(0, \mu; x) = I_0 \delta(\mu - \mu_0), \quad 0 \leq \mu \leq 1, \quad 0 < \mu_0 \leq 1, \quad (2)$$

где значение I_0 считаем известным. Граничные условия на поверхности, находящейся на расстоянии $\tau = x$, приняты как для изотропного (ламбертовского) отражения:

$$I(x, -\mu; x) = 2\rho \int_0^1 \mu' I(x, \mu'; x) d\mu', \quad 0 \leq \mu \leq 1, \quad (3)$$

где альbedo поверхности ρ удовлетворяет ограничению $0 \leq \rho \leq 1$ и также считается известным.

Задачу можно сформулировать следующим образом. Пусть для случая интенсивности нисходящего излучения $I(x, 1; x)$ или освещенности $\int_0^1 I(x, \mu; x) \mu d\mu$ на поверхности Земли I^m

есть измеренное значение, а $I^c = I(x, \mathbf{p})$ есть соответствующее рассчитанное значение, где \mathbf{p} представляет известные параметры задачи, т.е. ω , f_1 и ρ . Наша задача состоит в том, чтобы получить такое значение x , при котором рассчитываемая «измеренная» величина $I^c = I(x, \mathbf{p})$ близка к экспериментально измеренному значению I^m .

Для того чтобы решить данную проблему, определим функционал наименьших квадратов \tilde{F} от x :

$$\tilde{F}(x, \mathbf{p}, I^m) = \frac{1}{2} [I^c(x, \mathbf{p}) - I^m]^2. \quad (4)$$

Решение обратной задачи находится минимизацией данного функционала относительно неизвестной x . Минимизация осуществляется итерационным методом с использованием условия $\partial_x \tilde{F} = 0$. В начале n -й итерации уравнение переноса решается с использованием значения $x^{(n)}$ и затем рассчитывается соответствующее значение функционала $\tilde{F}^{(n)}$. Если критерий сходимости не выполнен, то рассчитывается новое значение $x^{(n+1)}$ по локальному приближению второго порядка к значению функционала при $x = x^{(n)}$:

$$\tilde{F}(x + \Delta x) \approx \tilde{F}(x) + \Delta x \partial_x \tilde{F} + \frac{1}{2} (\Delta x)^2 \partial_x^2 \tilde{F}.$$

Минимизация этого функционала приводит к алгебраическому уравнению для Δx :

$$H \Delta x = -h, \quad (5)$$

где

$$h = \partial_x \tilde{F} = [I^c(x, \mathbf{p}) - I^m] \partial_x I^c; \quad (6)$$

$$H = \partial_x^2 \tilde{F} = (\partial_x I^c)^2 + [I^c(x, \mathbf{p}) - I^m] \partial_x^2 I^c \approx (\partial_x I^c)^2, \quad (7)$$

если в (7) пренебречь членом, содержащим вторую производную, так чтобы H содержал лишь член вида $(\partial_x I^c)^2$. Заметим, что данное приближение становится лучше по мере приближения итерируемого к решению.

Итерации считаются завершенными, если результат сходится с измеренной величиной в пределах заданной относительной погрешности ε^* :

$$\varepsilon_1 = \left| \frac{I^c - I^m}{I^m} \right| < \varepsilon^*, \quad (8)$$

или если функционал \tilde{F} становится стационарным, т.е. если для двух последующих итераций имеем

$$\varepsilon_2 = \left| \frac{\tilde{F}^{(n)} - \tilde{F}^{(n-1)}}{\tilde{F}^{(n-1)}} \right| < \varepsilon_2^*. \quad (9)$$

Итерации начинаются с применением какого-либо из двух алгоритмов одномерного обращения в явном виде, которые рассматриваются в следующем разделе для получения $x^{(0)}$; эти алгоритмы, основанные на асимптотической теории переноса излучения и транспортном приближении, дают значение $x^{(0)}$ при известных ρ и пропускании облака. Пропускание $t(x)$ задается отношением потока нисходящей радиации на уровне, где проводятся измерения, к потоку нисходящей радиации, падающей на атмосферу, т.е.

$$\frac{\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 d\mu \mu I(x, \mu, \phi; x)}{\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 d\mu \mu I(0, \mu, \phi; x)} = \frac{\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 d\mu \mu I(x, \mu, \phi; x)}{I_0 \mu_0}. \quad (10)$$

В обычной итерационной процедуре из двух последовательных итераций численно оценивают производные $\partial_x I^c$ и полученный результат используют вместе с последним значением I^c для оценки x . Однако такое оценивание часто очень чувствительно к неточностям вычисления производных. Лучшим подходом является построение, когда это возможно, аналитической процедуры

для вычисления производных. В задаче без учета азимутальной зависимости, которую здесь и рассматриваем, особенно уместно использование F_N -метода [5–8], ибо он позволяет свести к минимуму необходимые в итерационной схеме численные расчеты. Это связано с тем, что матрица, необходимая для расчета интенсивности выходящего излучения и их производных, зависит только от свойств облака и не зависит от итераций, т.е. в каждой последующей итерации остается лишь рассчитать новые члены, представляющие источники. Подробнее с F_N -методом расчета производных можно ознакомиться в [3] и в сжатом виде в приложении к данной статье.

3. Начальная оценка

В данном разделе рассматриваются два алгоритма оценки (в явном виде) оптической толщины однородного облачного слоя постоянной толщины из отношения прозрачности к падающему потоку [2]. Первый из алгоритмов основан на асимптотической теории переноса излучения и следует из работы Кинга [1], который использовал двунаправленную функцию отражения; второй алгоритм основан на транспортном приближении.

В обоих алгоритмах x оценивают с помощью следующей формулы [2]:

$$x = \frac{1}{k} \ln \left[\frac{\beta}{2t(x)} \left\{ 1 + \left[1 + \gamma G(\rho) \left(\frac{2t(x)}{\beta} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \right]. \quad (11)$$

Здесь k есть показатель диффузии, который в слабопоглощающей атмосфере коррелирует с параметром подобия s , задаваемым через альbedo однократного рассеяния ω и через коэффициент асимметрии рассеяния g с помощью следующего соотношения:

$$s = [(1 - \omega)/(1 - \omega g)]^{1/2}. \quad (12)$$

Кинг и Харшвардхан [10] дают следующую аппроксимацию для k :

$$\frac{k}{1 - \omega g} = 3^{1/2} s - \frac{(0,985 - 0,253 s) s^2}{(6,464 - 5,464 s)}. \quad (13)$$

Параметры γ , β и $G(\rho)$ зависят от альbedo однократного рассеяния и от индикатрисы рассеяния и они разные в алгоритмах, основанных на асимптотической теории переноса и транспортном приближении.

В алгоритме асимптотической теории переноса [2]

$$\gamma = l; \quad (14a)$$

$$\beta = mn K(\mu_0)/(1 - \rho\rho^*); \quad (14b)$$

$$G(\rho) = l - mn^2 \rho/(1 - \rho\rho^*), \quad (14c)$$

где l , m , n и ρ^* есть величины, определенные в ссылке [9]; они зависят от оптических свойств облака. Приближенные выражения для этих функций также были увязаны с параметром подобия s . Кинг и Харшвардхан [10] нашли, что

$$l \approx \frac{(1 - 0,681s)(1 - s)}{1 + 0,792s}, \quad (14d)$$

$$m \approx (1 + 1,537s) \ln \left[\frac{1 + 1,800s - 7,087s^2 + 4,740s^3}{(1 - 0,819s)(1 - s)^2} \right]; \quad (14e)$$

$$n \approx \left[\frac{(1 + 0,414s)(1 - s)}{1 + 1,888s} \right]^{1/2}, \quad (14f)$$

а ван де Хюлст [9, с. 369], что

$$\rho^* \approx (1 - 0,139 s) (1 - s)/(1 + 1,170 s). \quad (14g)$$

Было показано, что все эти функции относительно мало чувствительны к коэффициентам индикатрисы рассеяния высших порядков, т.е. к f_n при $n \geq 2$, поэтому все вышеприведенные аппроксимации вполне годятся для большинства облаков.

Функция выхода $K(\mu)$ в уравнении (14b), определенная в [9], также сравнительно нечувствительна к коэффициентам индикатрисы рассеяния высших порядков. По этой причине она может быть оценена подгонкой с использованием индикатрисы по Хеньи–Гринстайну [11], которая зависит только от ω и g . С применением таблиц для функции выхода, составленных Длугачем и Яновитским [12] для индикатрисы Хеньи–Гринстайна с параметрами $\omega \geq 0,8$; $0,8 \leq g \leq 0,9$ и $\mu \geq 0,5$, получен следующий подгоночный полином [2]:

$$K(\mu) \approx A(\mu) + B(\mu) (1 - s) + C(\mu) (1 - s)^2 + D(\mu) (1 - s)^3 \quad (14h)$$

с коэффициентами

$$A(\mu) = -1,1130 + 5,3924 \mu - 9,1658 \mu^2 + 5,4673 \mu^3;$$

$$B(\mu) = 5,9551 - 26,488 \mu + 46,782 \mu^2 - 25,743 \mu^3;$$

$$C(\mu) = -8,7748 + 43,229 \mu - 73,949 \mu^2 + 39,059 \mu^3;$$

$$D(\mu) = 4,3639 - 21,230 \mu + 36,285 \mu^2 - 18,799 \mu^3.$$

Данное приближение согласуется с приближением ван де Хюлста для индикатрисы Хеньи–Гринстайна с точностью в пределах $< 3\%$ при $\omega \geq 0,8$; $< 1,5\%$ при $\omega \geq 0,9$ и $< 0,6\%$ при $\omega \geq 0,95$ и указанных выше пределах значений g и μ .

С другой стороны, в алгоритме, основанном на транспортном приближении, множители в уравнении (11) те же, что и в уравнении (14), за исключением того, что теперь

$$\gamma = r(\infty); \quad (15a)$$

$$\beta = [1 - r^2(\infty)]/[1 - \rho r(\infty)]; \quad (15b)$$

$$G(\rho) = \frac{r(\infty) - \rho}{1 - \rho r(\infty)}. \quad (15c)$$

Здесь отношение отраженного потока $r(\infty)$ есть расчетное отношение восходящего потока к нисходящему на верхней границе полубесконечного облака:

$$\frac{\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 d\mu \mu I(0, -\mu, \phi; \infty) \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 d\mu \mu I(x, -\mu, \phi; \infty)}{\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 d\mu \mu I(0, \mu, \phi; \infty)} = \frac{I_0 \mu_0}{I_0 \mu_0}. \quad (15d)$$

Полиномиальная подгонка $r(\infty)$ к значению по ван де Хюлсту для индикатрисы Хеньи–Гринстайна с параметрами $\omega \geq 0,8$; $0,75 \leq g \leq 0,875$ и $\mu_0 \geq 0,5$ дала следующее выражение:

$$r(\infty) \approx a(\mu) + b(\mu) (1 - s) + c(\mu) (1 - s)^2 + d(\mu) (1 - s)^3 \quad (15e)$$

с коэффициентами

$$a(\mu) = 0,02101 - 0,18048 \mu + 0,20185 \mu^2 - 0,09142 \mu^3;$$

$$\begin{aligned}
b(\mu) &= 1,5734 - 2,6548 \mu + 2,0400 \mu^2 - 0,41333 \mu^3; \\
c(\mu) &= -1,1479 + 3,6698 \mu - 4,2307 \mu^2 + 1,0236 \mu^3; \\
d(\mu) &= 0,55283 - 0,83289 \mu + 1,9855 \mu^2 - 0,51758 \mu^3.
\end{aligned}$$

Эта подгонка совпадает со значением по ван де Хюлсту с точностью $< 3\%$ при $s \leq 0,6$ и $< 1\%$ при $s \leq 0,3$.

Формула из уравнения (11) является полезной для оценок оптической толщины x даже без выполнения итераций. Для оптически толстых облаков оба алгоритма: и алгоритм, основанный на асимптотической теории переноса, и алгоритм с использованием транспортного приближения – дают хорошие результаты. Алгоритм с использованием транспортного приближения оказывается лучше в случае оптически тонких облаков, но он менее точен при промежуточных значениях толщины облака по сравнению с алгоритмом, основанным на асимптотической теории переноса.

4. Анализ чувствительности

Обозначим через y известные параметры ω , f_1 , ρ и измеренное значение I^m . Влияние неопределенности в известных параметрах и ошибок измерений на величины оцениваемых параметров представлено, в первом приближении, величиной Δy в выражении

$$\left| \frac{\Delta x}{x} \right| \approx \sum_j s_j \left| \frac{\Delta y_j}{y_j} \right|. \quad (16)$$

Коэффициенты чувствительности s_j ,

$$s_j = \left| (y/x) (\partial_y x) \right|, \quad (17)$$

дают множитель, который позволяет вычислить относительную ошибку в x по относительной ошибке в y_j . Поскольку мы заранее полагаем параметры ω , f_1 и ρ известными, то нас интересует коэффициент чувствительности для оптической толщины от ошибок детектора в измерении I^m . Мы остановимся на рассмотрении чувствительности при измерении интенсивности $I(x, 1; x)$ и освещенности $\int_0^1 I(x, \mu; x) \mu d\mu$.

Численные эксперименты были выполнены для облаков, индикатриса рассеяния которых бралась такой же, как в дымке L [13]; в расчетах использовалась длина волны, равная $0,7$ мкм; действительная часть показателя преломления составляла $1,33$; распределение частиц по размерам задавалось функцией $4,9757 \cdot 10^6 r^2 \exp(-15,116 r^{1/2})$ со средним радиусом $r_c = 0,07$ мкм. Для этой функции мы использовали 83 коэффициента разложения из работы Бенасси и др. [14], при этом фактор асимметрии рассеяния $f_1 = 0,8042$. Величину альbedo однократного рассеяния брали равной $\omega = 0,99999$ и полагали, что излучение падает на верхнюю границу облака нормально, так что $\mu_0 = 1$. Критерии сходимости в (8) и (9) выбирались в виде $\varepsilon_1^* = 10^{-4}$ и $\varepsilon_2^* = 10^{-8}$.

Проверка неявной итерационной процедуры проводилась по выборке точек облака путем расчетов по F_N -методу, чтобы вычислить модельное значение I^m . Затем проверялась сходимость функционала \tilde{F} подстановкой различных начальных значений $x^{(0)}$. Все оценки исходного значения $x^{(0)}$ делались с применением асимптотического алгоритма.

Было выполнено множество расчетов для исследования сходимости итераций при выборе различных x и выборе двух детекторов. Во всех случаях решения сходились по критериям (8) и (9) после нескольких итераций, так что мы пришли к заключению, что итерационная схема устойчива при нахождении одной переменной x .

На рис. 1 и 2 представлена чувствительность s при различных альbedo поверхности ρ для двух измерителей. (Графики строились линейной интерполяцией данных, рассчитанных на сетке из 24 значений x и 6 значений ρ , поэтому кривые на графиках весьма приближенные).

Такого рода графики могут быть полезны при определении областей пространства x , благоприятных для восстановления с точки зрения максимальной допустимой ошибки в оценке $\epsilon_x = \Delta x/x$ и минимума ошибки измерителя $\epsilon_I = \Delta I/I^m$. Так, например, мы хотим оценить x с погрешностью 20 %, $\epsilon_x = 0,2$, и если точность измерений 2 %, $\epsilon_I = 0,02$, то область нахождения неизвестного расположена под кривой для коэффициента чувствительности $s = 10$ (показана на рисунке жирной линией).

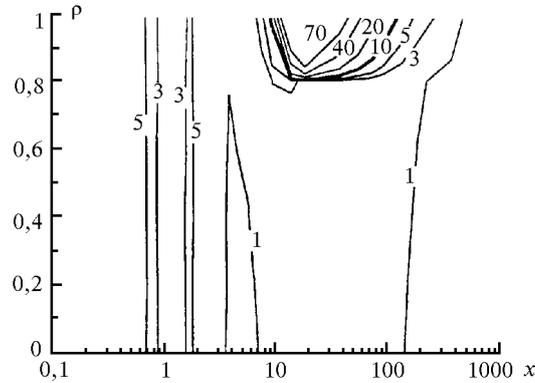


Рис. 1. Коэффициенты чувствительности оптической толщины облаков для детектора, измеряющего интенсивность $I(x, 1; x)$ при различных альbedo ρ поверхности и оптических толщинах x [3]

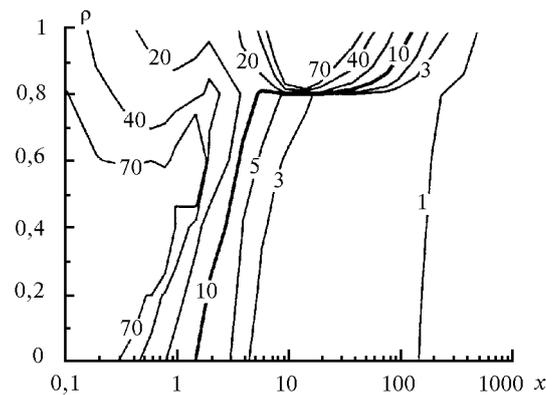


Рис. 2. Коэффициенты чувствительности оптической толщины облаков для детектора, измеряющего освещенность $\int_0^1 I(x, \mu; x) \mu d\mu$ при различных альbedo ρ поверхности и оптических толщинах x [3]

Из рис. 1 и 2 видно, что при одной и той же точности измерений область восстановления искомого параметра при измерениях направленным в зенит ($\mu = 1$) детектором, измеряющим интенсивность, намного больше, чем область восстановления при измерении детектором, измеряющим освещенность. Однако при использовании детектора, измеряющего освещенность, сигнал от прошедшего излучения будет намного слабее, что в реальности может привести к большим ошибкам измерений.

5. Заключение

Предложен метод неявного обращения для оценки оптической толщины x облачного слоя и продемонстрирована осуществимость расчетов с его помощью на специальном примере итерационного подхода к оценке x и ρ . Мы рассмотрели задачу без азимутальной зависимости в плоскопараллельном слое, полагая, что облачный слой освещен однородно и что при этом детектор измеряет интенсивность или освещенность на уровне Земли при нормальном падении излучения. Для решения такой задачи может быть применена итерационная процедура с использованием F_N -метода, так что минимизация по схеме наименьших квадратов может быть выполнена с использованием аналитически рассчитанных производных, полученных F_N -методом.

задаче с азимутальной зависимостью F_N -метод требует больших затрат времени на счет, но итерационную схему все еще можно применять при использовании другого метода решения прямой задачи, например метода дискретных ординат, правда, при этом производные придется считать численно.

Для оптически толстых облаков оба алгоритма (и алгоритм, основанный на асимптотической теории переноса, и алгоритм с использованием транспортного приближения) дают хорошие результаты. Алгоритм с использованием транспортного приближения оказывается лучше в случае оптически тонких облаков, но он менее точен при промежуточных значениях толщины облака по сравнению с алгоритмом, основанным на асимптотической теории переноса.

ПРИЛОЖЕНИЕ

F_N -метод

Мы непосредственно следуем работе [15] и записываем интенсивность уходящего излучения на поверхности среды разложением в ряд вида

$$I(0, -\mu) = \mathbf{p}(\mu) \bullet \mathbf{a} + \rho \Phi(x) \exp(-x/\mu), \quad 0 \leq \mu \leq 1, \quad (\text{A1a})$$

$$I(x, \mu) = \mathbf{p}(\mu) \bullet \mathbf{b} + F(\mu) \exp(-x/\mu), \quad 0 \leq \mu \leq 1, \quad (\text{A1b})$$

где

$$\mathbf{p}(\mu) = \{P_n(2\mu - 1), n = 0, N\}; \quad \mathbf{a} = \{(\omega/2) a_n, n = 0, N\}; \quad \mathbf{b} = \{(\omega/2) b_n, n = 0, N\}$$

и

$$\Phi(\tau) = 2 \int_0^1 \mu F(\mu) \exp(-\tau/\mu) d\mu. \quad (\text{A2})$$

Уравнения F_N -метода следуют из системы интегральных уравнений

$$\int_{-1}^1 \mu \phi(\xi, \mu) I(0, -\mu; x) d\mu + \exp(-x/\xi) \int_{-1}^1 \mu \phi(-\xi, \mu) I(x, \mu; x) d\mu = 0, \quad (\text{A3a})$$

$$\int_{-1}^1 \mu \phi(\xi, \mu) I(x, \mu; x) d\mu + \exp(-x/\xi) \int_{-1}^1 \mu \phi(-\xi, \mu) I(0, -\mu; x) d\mu = 0, \quad (\text{A3b})$$

где $\phi(\xi, \mu)$ есть элементарные решения уравнения переноса излучения [16, 17], а ξ есть число из интервала $[0, 1]$ либо это дискретное собственное число v_i , $i = 0, 1, 2, \dots, k-1$, которое может быть рассчитано с помощью, например, процедуры из [18]. Если уравнения (A1) подставить в уравнения (A3), то получим [19, 20] набор линейных уравнений для $2(N+1)$ неизвестных a_n и b_n , которые решаются с использованием $\xi = v_i$, $i = 0, 1, \dots, k-1$ и оставшихся точек коллокации $i = k, k+1, \dots, N$, которые выбираются так, чтобы они были нулями полиномов Чебышева второго рода $U_{N+1-k}(2x-1)$.

Уравнения F_N -метода могут быть записаны в виде

$$R \mathbf{z} = \mathbf{q}, \quad (\text{A4})$$

где $\mathbf{z} = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$; R есть матрица:

$$R = \begin{bmatrix} B & DA \\ DA & B \end{bmatrix} - \rho \begin{bmatrix} 0 & D\hat{B} \\ 0 & \hat{A} \end{bmatrix} \quad (\text{A5})$$

и D есть диагональная матрица $\{\exp(-x/\xi_i)\}$. Элементы матриц A и B есть

$$A_n(\xi_i) = -B_n(-\xi_i) = (2/\xi_i) \int_0^1 \mu P_n(2\mu - 1) \phi(-\xi_i, \mu) d\mu,$$

которые могут быть рассчитаны с помощью рекуррентных соотношений [15]; также имеем

$$\hat{B}_n(\xi_i) = (\delta_{n0} + \delta_{n1}/3) B_0(\xi_i);$$

$$\hat{A}_n(\xi_i) = (\delta_{n0} + \delta_{n1}/3) A_0(\xi_i).$$

Вектор источника $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b)$ имеет элементы, состоящие из несингулярных интегралов:

$$q_a(\xi_i) = e^{-x/\xi_i} q_b(-\xi_i) = 2(\omega \xi_i)^{-1} \int_0^1 \{F(\mu) \phi(-\xi_i, \mu) [1 - e^{-x/\xi_i} e^{-x/\mu}] + \rho \Phi(x) \phi(\xi_i, \mu) [e^{-x/\xi_i} - e^{-x/\mu}]\} \mu d\mu. \quad (A6)$$

Чтобы выполнить процедуру минимизации, нам необходимо вычислить значения производных $\partial_x I^f$. Например, из уравнения (A1) их значения получены для измерителя $\int_0^1 I(x, \mu; x) \mu d\mu$ в виде

$$\partial_x I^f = \partial_x \mathbf{a} \left[\int_0^1 \mathbf{p}(\mu) \mu d\mu \right] + \rho \partial_x \left[\Phi(x) \int_0^1 e^{-x/\mu} \mu d\mu \right], \quad \tau = 0 \quad (A7a)$$

и

$$\partial_x I^f = \partial_x \mathbf{b} \left[\int_0^1 \mathbf{p}(\mu) \mu d\mu \right] + \partial_x \left[\int_0^1 F(\mu) e^{-x/\mu} \mu d\mu \right], \quad \tau = x. \quad (A7b)$$

Величины $\partial_x \mathbf{a}$ и $\partial_x \mathbf{b}$ получаем из системы уравнений

$$R \partial \mathbf{z} / \partial x_k = \partial \mathbf{q} / \partial x_k - \partial R / \partial x_k \mathbf{z}, \quad (A8)$$

где

$$\partial R / \partial x = \begin{bmatrix} 0 & D'A \\ D'A & 0 \end{bmatrix} - \rho \begin{bmatrix} 0 & D'\hat{B} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (A9a)$$

$$\partial R / \partial \rho = - \begin{bmatrix} 0 & D\hat{B} \\ 0 & A' \end{bmatrix} \quad (A9b)$$

и $D' = \text{diag} \{-\exp(-x/\xi_i)/\xi_i\}$.

Поскольку обратная матрица R^{-1} также необходима для расчетов \mathbf{z} , то дополнительно потребуются лишь незначительные вычислительные усилия по расчету $\partial \mathbf{q} / \partial x_k$ для оценки новой итерации.

1. King M. D. // J. Atmos. Sci. 1987. V. 44. P. 1734.
2. Yi H. C., McCormick N. J., and Sanchez R. // J. Atmos. Sci. 1990. V. 47. P. 2567–2579.
3. Sanchez R., McCormick N. J., and Yi H. C. // Transp. Th. Statist. Phys. 1990. V. 19. P. 357–385.
4. Case K. M. and Zweifel P. F. Liner Transport Theory. Addison-Wesley (Reading, MA), 1967.
5. Devaux C., Siewert C. E., and Yuan Y. L. // Astrophys. J. 1982. V. 253. P. 773.
6. Garcia R. D. M. and Siewert C. E. // Transp. Th. Statist. Phys. 1985. V. 14. P. 437.
7. Garcia R. D. M. // Transp. Th. Statist. Phys. 1985. V. 14. P. 391.
8. Garcia R. D. M. and Siewert C. E. // J. Quant. Spectrosc. Rad. Transfer. 1989. V. 42. P. 385.
9. Van de Hulst H. C. Multiple Light Scattering Tables, Formulas, and Applications. Vols. 1 and 2. Academic Press, 1980.
10. King M. D. and Harshvardhan // J. Atmos. Sci. 1986 V. 43. P. 784.
11. Henyey L. C. and Greenstein J. L. // Astrophys. J. 1941. V. 93. P. 70.
12. Dlugrach J. M. and Yanovitskii E. C. // Icarus. 1974. V. 22. P. 66.
13. Lenoble J. Radiative Transfer in Scattering and Absorbing Atmospheres: Standard Computational Procedures. A. Deepak (Hampton, VA), 1985.
14. Venassi M., Garcia R. D. M., Karp A. H., and Siewert C. E. // Astrophys. J. 1984. V. 280. P. 853.

15. Devaux C., Siewert C.E., and Yuan Y.L. // *Astrophys. J.* 1982. V. 253. P. 773.
16. McCormick N.J. and Kuscer I. // *J. Math. Phys.* 1996. V. 7. P. 2036.
17. Kuscer I. and McCormick N.J. // *Transp. Th. Statist. Phys.* 1991. V. 20. P. 351.
18. Garcia R.D.M. and Siewert C.E. // *J. Quant. Spectrosc. Rad. Transfer.* 1989. V. 42. P. 385.
19. Garcia R.D.M. and Siewert C.E. // *Transp. Th. Statist. Phys.* 1985. V. 14. P. 437.
20. Garcia R.D.M. // *Transp. Th. Statist. Phys.* 1985. V. 14. P. 391.

Университет штата Вашингтон, США
Коммиссариат по атомной энергии, Франция
Дженерэл Этомикс, США

Поступила в редакцию
19 мая 1997 г.

N.J. McCormick, R. Sanchez, H.C. Yi. Cloud Optical Thickness Estimation from Ground-Level Measurements.

Two methods for estimating the unknown optical thickness of a homogeneous cloudy atmosphere using a ground-level downward radiance or irradiance measurement are presented. An iteration method incorporates an analytically-computed first derivative of the unknown that is obtained from the F_N method of transport theory; sample results from a sensitivity analysis for the iteration scheme are included. A noniterative method derived from two analytical solutions of the equation of radiative transfer is also given – an asymptotic radiative transfer algorithm and a transport-corrected diffusion algorithm.